# CABRI II: OLTRE LA GEOMETRIA EUCLIDEA

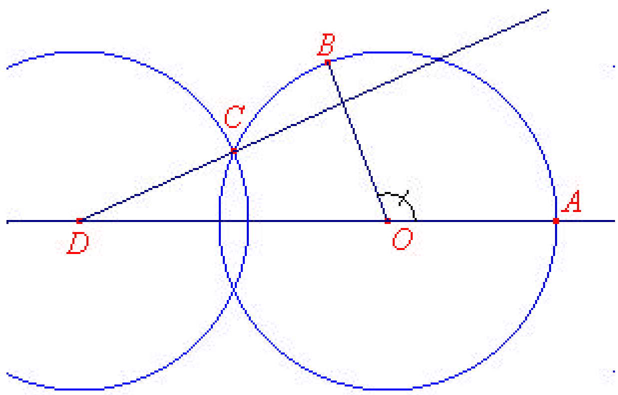
prof. Michele Impedovo

***Bollettino CABRIRRSAE, n° 18, dicembre 1998***

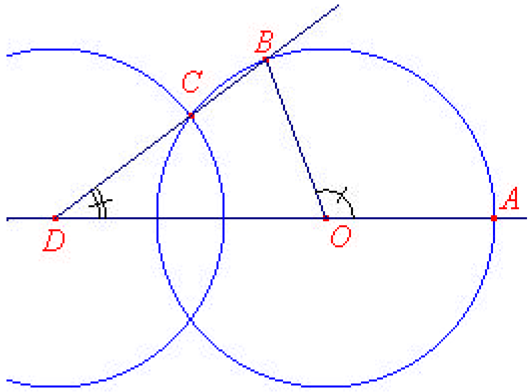
La versione II di Cabri Géomètre introduce nell'universo di Cabri delle novità sostanziali, che in un certo senso stravolgono il contesto semantico (strettamente euclideo, ancorato alle costruzioni con riga e compasso) in cui il progetto originario è nato e cresciuto.
Cabri II presenta la possibilità di utilizzare, nelle costruzioni, i **numeri**: è una novità di notevole impatto in una tradizione euclidea (corroborata dai libri di testo) che da 2000 anni ha bandito i numeri dalla geometria, e li ha sostituiti con una pomposa ma ormai farraginosa *Teoria delle Grandezze*.

Un esempio: in Cabri I per definire la *macro* dell'omotetia occorre dare il rapporto di omotetia $k$ mediante una coppia di segmenti tali che le loro lunghezze stiano in rapporto $k$, oppure mediante una terna ordinata $O$, $U$, $P$ di punti su una retta tali che $OP/OU=k$.
Con Cabri II è tutto più semplice, non tanto perché le omotetie sono già predefinite nel menù *Trasforma*, ma perché il rapporto di omotetia (eventualmente negativo) è dato mediante un numero, che l'utente definisce direttamente attraverso la casella degli strumenti *Visualizza*, *Numeri*.

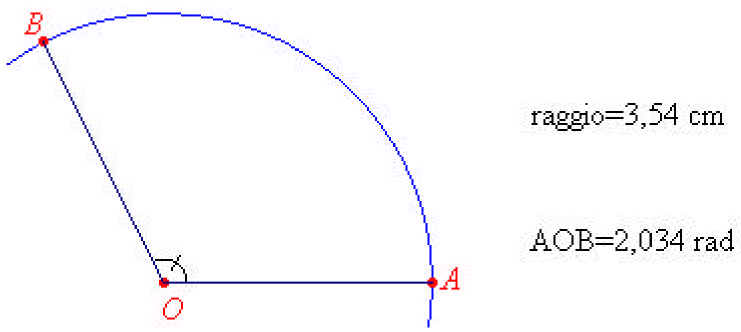
Il classico problema della **trisezione di un angolo** è impossibile con riga e compasso, e la relativa costruzione è quindi impossibile con Cabri I; nel numero 16 di CABRIRRSAE, giugno 98, è riportata una costruzione della trisezione dell'angolo che tradisce lo spirito euclideo e l'ambiente semantico di Cabri I. La costruzione è la seguente: data una circonferenza di centro $O$ e su di essa due punti $A$ e $B$, sia $\angle AOB$ l'angolo da trisecare. Si prende un punto $D$ sulla semiretta opposta alla semiretta $OA$, e si traccia la circonferenza di centro $D$ e raggio $OA$, che interseca la circonferenza in $C$.



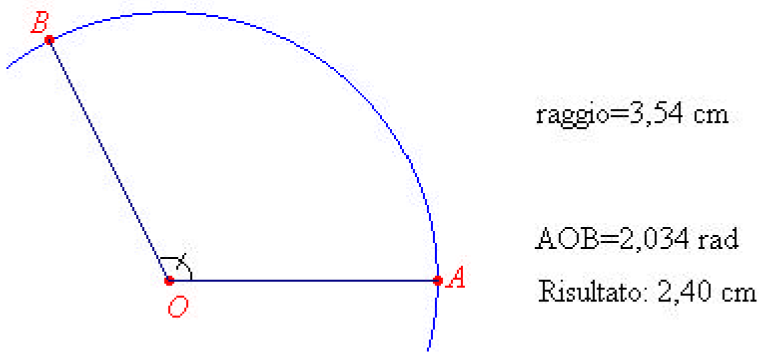

<u>Si sposta ora il punto *D* sulla retta *OA* fino a che la retta *DC* passi per B.</u>



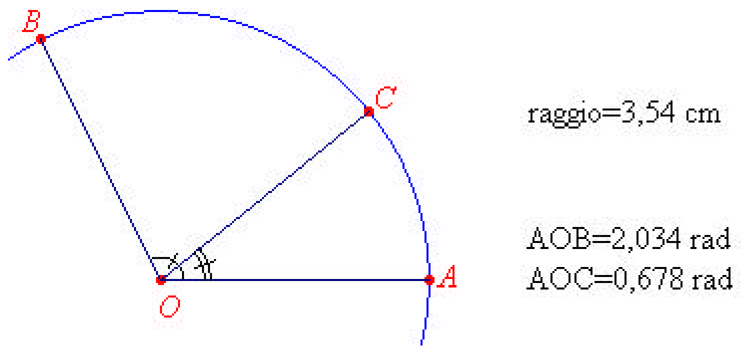

Si dimostra facilmente che l'angolo *ODC* è un terzo dell'angolo *OAB*.
Naturalmente questa costruzione non rispetta le *regole* della riga e compasso: non è consentito spostare un punto fino a che non si raggiunge "a occhio" una certa configurazione; dal punto di vista didattico equivarrebbe per esempio al costruire "a occhio" la perpendicolare per un punto ad una retta. L'inadeguatezza della costruzione è confermata dal fatto che essa non resiste alla *prova-trascinamento*: se si sposta il punto *B* modificando l'ampiezza dell'angolo da trisecare l'angolo in *D* (ovviamente) resta tristemente fisso. La *prova-trascinamento* è il paradigma didattico in Cabri, in un certo senso ne costituisce l'essenza.
Ho sempre trovato curiosamente nostalgico l'attaccamento alle regole della riga e compasso: ormai da qualche secolo i numeri fanno stabilmente parte delle nostre conoscenze di base (certamente più delle "grandezze"). È giusto usarli; usare i numeri è anzi utile e produttivo dal punto di vista didattico, per un'immagine unitaria della matematica.
Con Cabri II la trisezione dell'angolo è possibile: data una circonferenza di centro *O* e raggio *OA*, e dato un punto *B* su di essa, si segna l'angolo $\alpha = \angle AOB$, e lo si misura con lo strumento *Misura*, *Misura dell'angolo*. Sullo schermo compare il numero che rappresenta, (con l'approssimazione voluta, in gradi o radianti) l'ampiezza dell'angolo $\alpha$ da trisecare. Poi si misura il raggio *OA* (*Misura*, *Distanza e Lunghezza*).




Si usa ora la calcolatrice di Cabri II (*Misura*, *Calcolatrice*). Cliccando sulla misura di $\alpha$ si porta il numero nella riga di comando della calcolatrice; si divide per 3 e si moltiplica per il raggio; cliccando sul simbolo "=" si ottiene a destra il risultato. Ora si "prende" con il mouse questo risultato e lo si porta sullo schermo.




A questo punto si utilizza il comando che più di tutti rappresenta in Cabri II il superamento di riga e compasso: *Trasporto di misura*, dalla casella *Costruisci*.
La sintassi è semplice: si clicca sul numero (2,40 cm), poi sulla circonferenza e infine sul punto *A*: sulla circonferenza viene creato un punto *C* tale che l'arco *AC* abbia lunghezza uguale al numero selezionato. È ovvio che questa costruzione è vietata dalle regole del gioco *riga e compasso*.

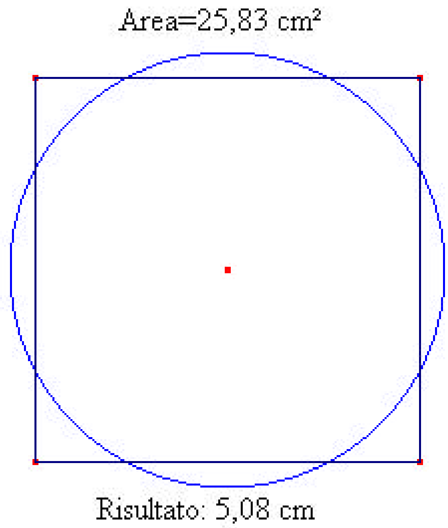



L'utilizzo dei numeri in geometria (numeri reali dal punto di vista teorico, numeri-macchina dal punto di vista operativo) consentirebbe di svolgere una geometria più potente, più vicina all'intuizione degli allievi, forse più efficace dal punto di vista didattico, certamente più snella.
Per esempio: i criteri di congruenza insegnano a stabilire se due triangoli sono congruenti, ma non insegnano a *risolverli*.

| **Geometria senza numeri** | **Geometria con i numeri** |
|---|---|
| Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo compreso sono congruenti. | Se di un triangolo è nota la misura di due lati e dell'angolo compreso, tutte le misure sono univocamente determinate. |

Con Cabri II si può risolvere sia l'uno che l'altro problema: dati due segmenti e un angolo si costruisce il triangolo relativo, e se ne *misurano* (nel contesto semantico di Cabri, che naturalmente offre una misura approssimata) lati e angoli.

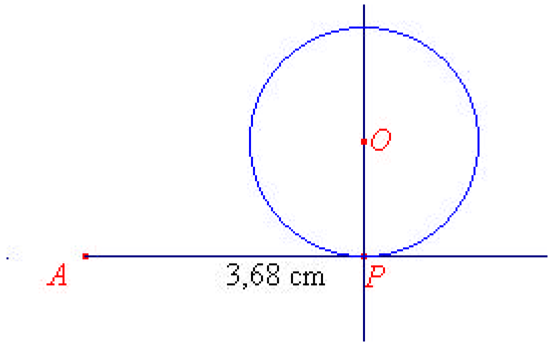
E se si può trisecare l'angolo, perché non togliersi il gusto di (finalmente!) **quadrare il cerchio**?



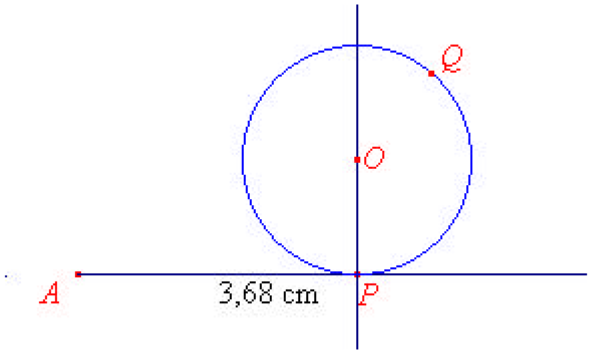

La quadratura del cerchio (la cui impossibilità con riga e compasso è assicurata dal fatto che π è un numero trascendente) è consentita in questa costruzione dal comando *Area* della casella *Misura*. Si ottiene l'area (approssimata) del cerchio , con la calcolatrice si estrae la radice quadrata (*sqrt*) e con *Trasporto di misura* si costruisce su una semiretta il lato del quadrato.

Con il potente comando *Trasporto di misura* è possibile procedere a costruzioni di curve trascendenti, che sono impossibili con riga e compasso: tali strumenti, come è noto, consentono, dato un segmento unitario, di costruire soltanto punti a coordinate razionali, oppure ottenibili da numeri razionali mediante un numero finito di estrazioni di radici quadrate.

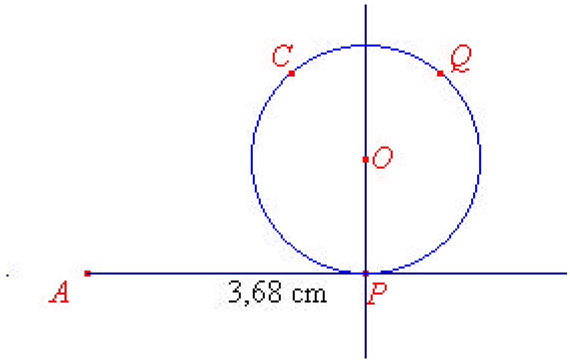
Vediamo ad esempio la costruzione della classica e celebre **cicloide** (è già stata descritta dal prof. P. Boieri su CabrIRRSAE n. 12, giugno 97): è la curva descritta da un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta.



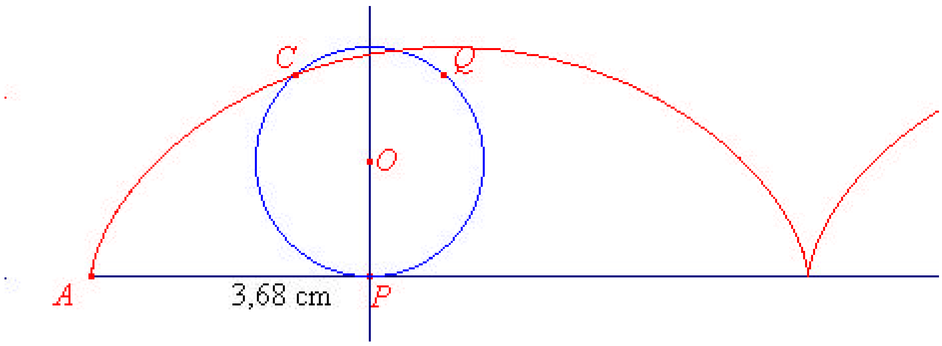

Si costruisce una semiretta di origine *A*, e su di essa un punto *P*; si misura la distanza di *P* da *A*. Poi si costruisce la retta per *P* perpendicolare alla semiretta *AP*, su di essa un punto *O* e la circonferenza di centro *O* e raggio *OP*. Ora si usa *Trasporto di misura*: si costruisce sulla circonferenza il punto *Q* tale che l'arco *AQ* abbia lunghezza pari a quella del segmento *AP*.



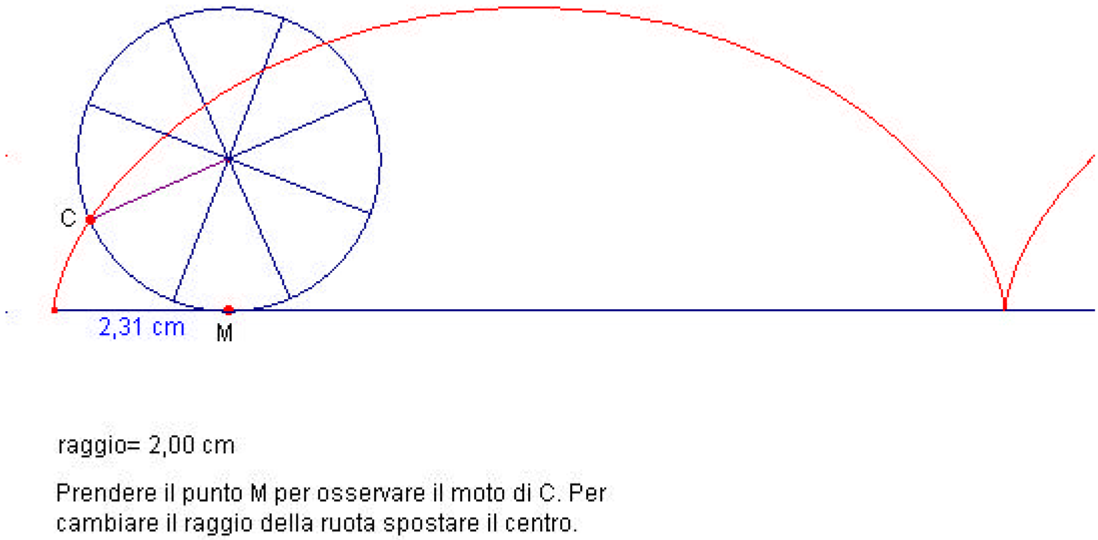

Se si vuole che la circonferenza rotoli verso destra, è sufficiente considerare il simmetrico *C* di *Q* rispetto alla retta *OA*.



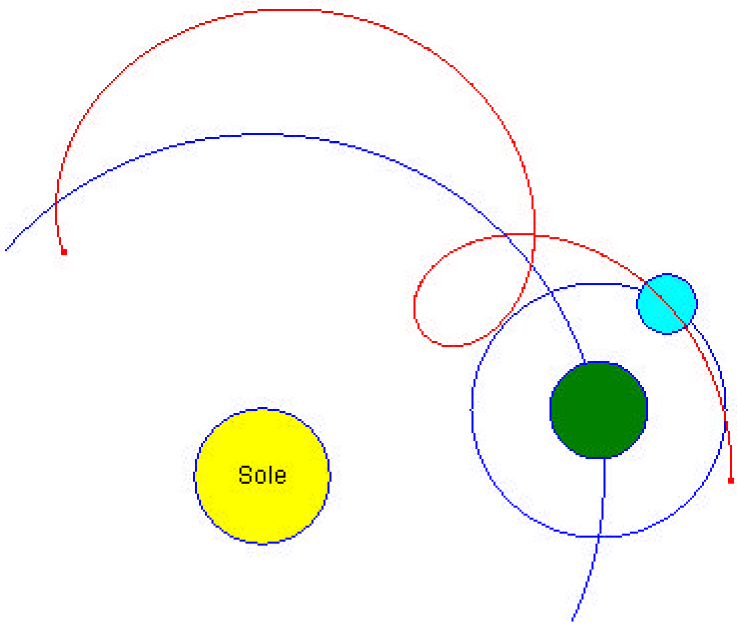

Mentre *P* si muove sulla semiretta, *C* descrive la cicloide. Si può usare il comando *Luogo* per vederla apparire,



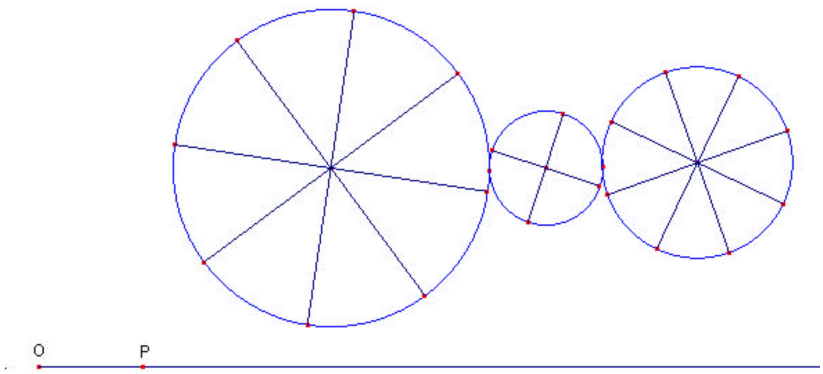

e si può arricchire la costruzione simulando il moto di una ruota.



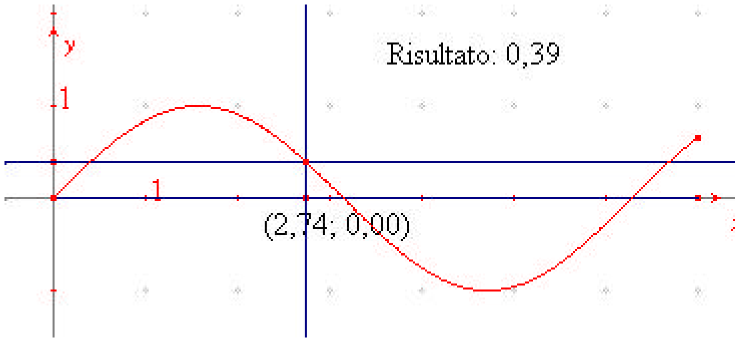

Con lievi modifiche a questa costruzione è possibile mostrare il moto di un satellite intorno al proprio pianeta rispetto ad un osservatore posto sul Sole.




È possibile anche costruire meccanismi articolati. Nella costruzione illustrata nella figura seguente tre ruote dentate ruotano solidalmente con velocità angolari inversamente proporzionali ai loro raggi.



Inoltre con la *Calcolatrice* e con il *Trasporto di misura* è possibile, come ha ben mostrato il prof. P. Boieri nell’articolo citato, costruire il grafico di qualunque funzione elementare. Infatti Cabri II, a differenza di Cabri I, ha *sullo sfondo* del quadro un piano cartesiano (e una griglia di punti), che è possibile far apparire o nascondere. Se si costruisce un punto sull’asse *x*, se ne determina l’ascissa (*Misura, Coordinate ed equazioni*), e si sfrutta tale numero *x* con la *Calcolatrice*, è possibile ottenere l’ordinata $y=f(x)$ per una funzione trascendente qualsiasi. Per esempio, si vuole tracciare la sinusoide: si costruisce un segmento sull’asse *x* (questo per fare in modo che il comando *Luogo* sia più efficiente, perché limitato ai punti di questo segmento e non a tutto l’asse *x*), e su questo segmento un punto, di cui si chiede l’ascissa. Con la calcolatrice si calcola il seno di tale numero, e con *Trasporto di misura* si costruisce sull’asse *y* un punto che abbia il numero ottenuto come ordinata. Con il comando *Luogo* si ottiene la sinusoide.




Il contesto semantico di Cabri II è insomma enormemente più ricco di quello di Cabri I: la geometria si arricchisce dello strumento numerico (fatto che può secondo me rendere più efficace l’insegnamento e più potente la rappresentazione mentale dell’allievo), e si inserisce in un contesto più ampio di quello tradizionale. Il fatto di poter utilizzare o nascondere il piano cartesiano permette di trattare uno stesso problema da punti di vista diversi e complementari.

Cabri II prefigura una compenetrazione tra saperi che sono ancora trasmessi come rigidamente separati, e apre nuovi orizzonti all’insegnamento della geometria. Difendere la geometria della riga e del compasso finisce per essere un tabù, uno dei tanti di cui è ricca la tradizione matematica.