Che cosa è davvero importante del calcolo letterale?

Michele Impedovo

Periodico Mathesis Milano n°7, 1993

Riassunto. *L'enfasi con la quale viene insegnato il calcolo letterale in Italia è eccessiva. Tutte le cosiddette "regole" del calcolo algebrico sono da ricondursi essenzialmente alle caratteristiche della struttura algebrica di* ***campo****, e quindi sono tutte riassumibili in poche, semplici proprietà che riguardano le due operazioni fondamentali di addizione e moltiplicazione. Scarsa attenzione viene invece rivolta al concetto di struttura algebrica, che potrebbe costituire il filo conduttore dello sviluppo del calcolo algebrico.*
Lo spazio tradizionalmente dedicato alle frazioni algebriche è spropositato in rapporto al valore culturale e anche agli obiettivi operativi. Insufficiente e spesso imprecisa è invece l'attenzione rivolta all'anello dei polinomi in una variabile; tale struttura costituisce un contesto fondamentale per gran parte del curriculum di matematica delle scuole medie superiori.

Introduzione. Si può dire che in Italia l'insegnamento preuniversitario dell'algebra sia pressoché assente, se per algebra si intende lo studio delle *strutture algebriche*.
È invece massiccio l'insegnamento del *calcolo letterale*, che inizia già nelle scuole medie inferiori, nonostante non sia previsto da alcun programma ministeriale; gli esiti didattici sono spesso deludenti, e dovuti probabilmente a due ordini di motivi:
• si intraprende il calcolo letterale quando non è ancora ben sviluppato nell'allievo il *senso del numero*, e quindi manca un terreno solido su cui innestare la *generalizzazione*;
• si tende a insegnare il calcolo letterale in termini *prescrittivi*, come un insieme di tecniche operative (le *ricette di cucina* di cui parlava Croce) da un lato troppo generiche (che cosa rappresentano le lettere? in quale insieme si opera? quali operazioni sono definite? con quali proprietà? a quale insieme numerico appartengono i coefficienti?), e dall'altro, paradossalmente, troppo specifiche, proponendo già al biennio esercizi di semplificazione di frazioni algebriche complessi e faticosi.
Può accadere così che si sviluppi nell'allievo una ossessiva bramosia di semplificazione a tutti i costi (aspirazione legittima, quando la semplificazione di una espressione algebrica è l'unico obiettivo didattico), che trova le sue estreme conseguenze in esempi (grotteschi, ma non impossibili) del tipo

$$\frac{(a+b)^2}{a+b} = 2 \qquad\qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{}$$

I programmi Brocca relativi al biennio purtroppo non introducono alcuna novità di rilievo a proposito dell'insegnamento dell'algebra; nel tema n° 2 (Insiemi numerici e calcolo) il punto 2.3 recita: *Il linguaggio dell'algebra e il calcolo letterale: monomi, polinomi, frazioni algebriche*. È presente invece un accenno positivo nel commento ai temi: "*...si sottolinea l'inopportunità del ricorso ad espressioni inutilmente complesse, tenendo presente che la sicurezza del calcolo si acquisisce gradualmente nell'arco del biennio…*".
I programmi Brocca relativi al triennio prevedono espressamente, anche per il programma debole, gli argomenti: *Strutture algebriche fondamentali. Strutture d'ordine. Corrispondenze tra insiemi strutturati* (contenuto 2*a*). Nel programma forte si aggiungono: *Spazi vettoriali: struttura vettoriale in* R^2 *e in* R^3. *Basi, trasformazioni lineari. Risoluzione di sistemi lineari. Struttura algebrica delle matrici di ordine 2* (contenuto 2*d*).

Negli ultimi anni si sta lentamente diffondendo una nuova metodologia didattica, che tende a sostituire al tradizionale calcolo letterale la riflessione sulle caratteristiche delle strutture algebriche, già al biennio della scuola media superiore.
In questo articolo si vuole svolgere una riflessione (e fornire alcune indicazioni e proposte didattiche) sull'insegnamento del calcolo letterale che privilegi le poche e semplici proprietà delle strutture algebriche al farraginoso castello di tecniche sintattiche che compare sulla quasi totalità dei libri di testo del biennio di scuola media superiore.

Le proprietà delle operazioni. Perché il calcolo letterale si è imposto in modo così massiccio nell'insegnamento della matematica? Sarebbe interessante scoprire la storia di questa immeritata fortuna. Perché, nonostante l'esame di Algebra sia stato introdotto come esame fondamentale nel corso di laurea in matematica già da 30 anni, stenta ad imporsi un insegnamento del calcolo letterale in termini di strutture algebriche?
Per esempio, perché introdurre una *regola* di addizione dei monomi simili (spesso appesantita dalla raccomandazione: *non si possono sommare monomi non simili*)? La relazione

$$2x+3x=5x$$

è una conseguenza della proprietà distributiva, e non una regola.
Così come non è una regola la cosiddetta *regola dei segni*: in un anello (e quindi in un campo) è anch'essa conseguenza della proprietà distributiva: infatti

$$0 = a\cdot 0 = a\cdot[b+(-b)] = ab+a\cdot(-b),$$

quindi $ab+a\cdot(-b)=0$, cioè

$$a\cdot(-b)=-ab.$$

In modo analogo risulta

$$(-a)\cdot b = -ab,$$

da cui segue

$$(-a)\cdot(-b) = -a\cdot(-b) = -(-(ab)) = ab.$$

La dimostrazione è semplice, e anche una semplice verifica con una coppia di numeri può essere più convincente di qualunque *regola*.
Perché introdurre una *proprietà invariantiva* delle divisioni? Per la proprietà associativa della moltiplicazione, l'inverso di un prodotto è uguale al prodotto degli inversi:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1},$$

quindi

$$\frac{ak}{bk} = ak(bk)^{-1} = akk^{-1}b^{-1} = ab^{-1} = \frac{a}{b}.$$

D'altra parte, una volta introdotta nell'insieme delle frazioni la relazione di equivalenza

$$\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d} \iff ad = bc,$$

allora è immediato concludere

$$\frac{ak}{bk} \cong \frac{a}{b}.$$

Più interessante è invece mostrare perché le due divisioni $a:b$ e $(ak):(bk)$, con $a,b,k\in \mathrm{N}$, danno luogo allo stesso numero decimale; infatti se

$$a = bq+r,$$

con $r<b$, (q e r esistono e sono unici) allora

$$ka = (kb)q+kr$$

con $kr<kb$: il quoziente tra a e b è lo stesso che tra ka e kb, quindi le cifre decimali, che sono i successivi quozienti parziali delle due divisioni, sono uguali.
È ancora necessario eseguire le moltiplicazioni in colonna (con il misterioso trattino anziché lo 0)? Non è più semplice applicare la proprietà distributiva? Per esempio

$$\begin{aligned} 54\cdot 23 &= (50+4)\cdot(20+3) \\ &= (50\cdot 20)+(50\cdot 3)+(4\cdot 20)+(4\cdot 3) \\ &= 1000+150+80+12 \\ &= 1242; \end{aligned}$$

oppure, più schematicamente:

×	50	4	54
20	1000	80	1080
3	150	12	162
23	1150	92	1242

Alla base del calcolo letterale sta il concetto di *operazione* in un insieme. Non è necessario che l'insieme sia numerico: la composizione di trasformazioni geometriche, la somma di vettori, l'unione e l'intersezione di insiemi, sono esempi di operazioni in insiemi non numerici. *MCD*, *mcm*, media aritmetica, sono altri esempi di operazioni in insiemi numerici, oltre alle due fondamentali operazioni di addizione e moltiplicazione.
Si può introdurre il concetto di operazione in forma generale, e studiarne, sempre in generale, le proprietà: associativa, commutativa, distributiva (nel caso di due operazioni distinte nello stesso insieme: per esempio unione e intersezione nell'insieme s(x) delle parti di un insieme x, *MCD* e *mcm* in N, godono entrambe della proprietà distributiva rispetto all'altra).
L'uso delle parentesi assume un significato importantissimo: è bene che all'inizio le parentesi abbondino, e solo quando lo studente si sarà impadronito delle convenzioni (di cui noi matematici facciamo abuso: perché scrivere $\sin^2 x$, che significa $\sin(\sin x)$, e non $(\sin x)^2$?) potrà abbandonarle. I controesempi sono molto utili: la composizione di isometrie non gode in generale della proprietà commutativa: si può verificare che per esempio nell'insieme delle isometrie che mutano in sé un triangolo equilatero risulta $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, e non $a^{-1}b^{-1}$.
È il momento di definire in generale cosa sia l'elemento neutro di una operazione, e gli esempi non mancano; oltre a 0 e 1 per addizione e moltiplicazione, si possono proporre l'insieme vuoto $\varnothing$ e l'insieme universo x per unione e intersezione in s(x), l'identità lper le trasformazioni geometriche, il vettore nullo, e così via. Il concetto di elemento neutro non è di immediata comprensione, forse perché non appartiene alla cultura occidentale; lo zero è stato importato dall'oriente perché in Europa non si è ritenuto per secoli di dare un nome ad un concetto che appunto contraddistingue il nulla; non è raro che uno studente ci dica che 3–3 dà come risultato niente.
Le difficoltà con gli elementi neutri 0 e 1 nascono spesso dal fatto che solitamente con questi numeri non si opera; espressioni come le seguenti

$$1x,\ 0x,\ 0+x,\ \frac{x}{1}$$

sono generalmente vietate. Sembra che ci sia una sorta di *tabù* che ci fa indietreggiare di fronte alle operazioni con 0 e 1. È bene invece che gli studenti scrivano (e dicano) $1x$, $0+x$, perché solo così 1 e 0 diventeranno numeri come gli altri, perché *si opera con essi*.

Le difficoltà legate al concetto di elemento neutro sono note a chiunque insegni: il classico errore di semplificazione

$$\frac{a+b}{a}=b$$

non si verificherebbe, se fosse chiaro che 1 è l'elemento neutro del prodotto, non della somma. Propongo a tutti gli insegnanti di abolire le "sbarre" e le "linee" per semplificare; per esempio, non si semplifichi così:

$$\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}^{3}},$$

ma così:

$$\frac{8}{6}=\frac{4\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4}{3}.$$

Non così:

$$\cancel{a}+b-\cancel{a},$$

ma così:

$$a+b-a = 0+b = b.$$

Quando si usa lo stesso segno (la "sbarra") per compiere operazioni completamente differenti come la semplificazione di una frazione e l'addizione di un numero con il suo opposto, l'allievo meno pronto è portato a credere che le due operazioni siano in qualche modo la stessa cosa, siano riconducibili agli stessi meccanismi.

Non dovrebbero esserci a questo punto difficoltà a definire l'elemento inverso di un elemento rispetto all'operazione data; l'abitudine di dire "le quattro operazioni" andrebbe corretta: le operazioni elementari sono due, la somma e il prodotto, la sottrazione e la divisione sono le operazioni inverse: la sottrazione tra a e b è l'addizione tra a e l'opposto di b, e la divisione tra a e b è la moltiplicazione tra a e il reciproco di b.
Ci sono ora tutti gli elementi per introdurre la definizione di gruppo rispetto a una operazione. Secondo me è una tappa importante, da raggiungere ben prima di iniziare il calcolo letterale. Personalmente inizio a parlare di gruppi al primo anno, in quarta ginnasio, e non trovo difficoltà di apprendimento da parte degli studenti. Il concetto di gruppo è importante perché abitua all'astrazione, perché compare ovunque nella matematica ed è quindi notevole strumento di sintesi, perché fa comprendere a fondo come una operazione agisca sugli elementi di un insieme, cioè quale sia la *struttura* che l'operazione determina.
Un esempio notevole di gruppo è dato dall'insieme delle isometrie che mutano in sé una figura; il gruppo del triangolo equilatero è un ottimo esempio (e anche il più piccolo) di gruppo non commutativo.
Il concetto di gruppo è importante perché è l'ambiente più povero in cui sia possibile risolvere l'equazione di primo grado $ax=b$:

$$\begin{array}{ll}
a^{-1}(ax) = a^{-1}b & \text{(esistenza dell'elemento inverso } a^{-1} \text{ di } a\text{)}\\
(a^{-1}a)x = a^{-1}b & \text{(associatività dell'operazione)}\\
ux=a^{-1}b & \text{(elemento neutro } u\in G\text{)}\\
x=a^{-1}b & \text{(chiusura, } a'b\in G\text{).}
\end{array}$$

Questo significa per esempio che se a e b sono isometrie allora esiste ed è unica l'isometria x tale che $ax=b$.
Particolarmente utili per esempi e controesempi sono gli insiemi numerici finiti (le classi resto modulo n); si verifica (e, con qualche piccola difficoltà si dimostra) che se p è primo

(e solo allora) accade che Z_p è un gruppo rispetto alla somma, e $Z_p-\{0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto, cioè Z_p è un *campo*; altrimenti Z_n è un *anello*.
L'opposto di $[a]\in Z_p$ è naturalmente $[p-a]$, mentre non è immediato determinare l'inverso di un elemento diverso da [0]; è questa un'avventura interessante, ricca di spunti che possono eventualmente essere ripresi nel triennio: il bellissimo teorema di Fermat assicura che in Z_p per ogni $a>1$ risulta $[a^{p-1}]=[1]$, quindi l'inverso di $[a]$ è $[a^{p-2}]$.
Z_p è una buona palestra di verifica (o di dimostrazione) di parecchie relazioni; per esempio

$$-(a+b) = (-a)+(-b)$$
$$a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -ab$$
$$(-a)\cdot(-b) = ab$$
$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$
$$(ab)^2 = a^2b^2$$

Nell'approccio al calcolo letterale, partendo dall'analisi dell'insieme dei monomi, si noterà allora che esso non è un gruppo rispetto alla somma, ma contiene gli infiniti gruppi dei monomi simili.
Poiché la somma di due monomi in generale non è un monomio si amplia l'insieme di partenza (come accade per gli insiemi numerici), in modo tale che sia possibile la somma, ed ecco l'insieme dei polinomi, importante esempio di gruppo additivo. Cosa succede rispetto al prodotto? Gli studenti osserveranno che il prodotto di due polinomi è un polinomio, ma l'inverso di un polinomio non è un polinomio. Questo è un momento importante: il calcolo letterale può fermarsi qui, almeno in una prima fase.
È necessario impiegare tanto tempo e tante energie nella manipolazione delle *frazioni algebriche*? In fondo non c'è nulla di nuovo rispetto alle frazioni ordinarie: la relazione di equivalenza è sempre la stessa, le cosiddette regole di semplificazione sono sempre le stesse, e francamente la necessità di determinare il minimo comune multiplo dei denominatori per eseguire l'addizione non giustifica tanta enfasi, tanto tempo passato a fattorizzare polinomi.
Le frazioni algebriche sono argomento difficile dal punto di vista operativo, per il quale occorre una certa esperienza, che al biennio è poco consolidata.
E inoltre: abbiamo davvero bisogno di ragazzi che sappiano manipolare le frazioni algebriche? Quale bagaglio culturale resterà a coloro che non proseguiranno all'università con studi scientifici?

I polinomi. L'ambiente dei polinomi è importante: in esso vengono posti problemi rilevanti per tutta la matematica. Si può dire che in qualche modo i polinomi siano il vero filo conduttore del programma di matematica alle scuole medie superiori: dal semplice polinomio delle funzioni lineari, alla ricerca delle soluzioni di un'equazione algebrica, fino al polinomio di Taylor per approssimare una funzione reale.
Raramente, nell'approccio ai polinomi, si precisa quale sia l'insieme dei coefficienti, e nei problemi di fattorizzazione spesso si definisce la *irriducibilità* come un caratteristica assoluta di un polinomio, anziché relativa all'insieme dei coefficienti.

Si consideri l'insieme dei polinomi in una indeterminata, a coefficienti in un campo, per esempio R: tale insieme è un gruppo rispetto alla somma, ma non rispetto al prodotto, dato che l'inverso di un polinomio non è un polinomio (è una frazione algebrica). Si tratta di una struttura algebrica molto importante, a metà strada tra gruppo e campo: è un anello, che possiede elemento neutro della moltiplicazione, ed è privo di divisori dello zero.
In tale anello è possibile eseguire l'algoritmo euclideo; dati due polinomi A e B esistono e sono unici un polinomio quoziente Q e un polinomio resto R tali che $A=BQ+R$, e R abbia grado minore del grado di B. Anche dal punto di vista operativo, può essere più semplice determinare il *MCD* tra polinomi mediante l'algoritmo euclideo, anziché mediante la fattorizzazione.
Una volta trattate le equazioni di primo e di secondo grado, e svolta la relativa trattazione nel piano cartesiano (rette e parabole), si può terminare il biennio con il problema delle equazioni (polinomiali) di grado superiore al secondo: l'algoritmo della divisione tra polinomi diviene significativo se il resto è 0; il teorema di Ruffini ci dimostra che il problema della fattorizzazione di un polinomio (in R) coincide con il problema di determinarne le radici. Se una radice è razionale, allora possiamo facilmente determinarla; se è irrazionale, possiamo applicare qualche algoritmo di approssimazione.
Ecco perché è importante scomporre un polinomio, non per semplificare frazioni algebriche, ma per scoprire se ammette zeri, perché questo ci aiuta a tracciare il grafico della relativa funzione polinomiale e poi a risolvere le disequazioni di grado qualsiasi; se un polinomio $p(x)$ ammette zeri coincidenti, allora il grafico di $y=p(x)$ è tangente all'asse x; se $p(x)$ è di grado dispari allora interseca necessariamente almeno una volta l'asse x, cioè ammette almeno uno zero, e così via, le scoperte sono numerosissime.
Inoltre è possibile dare una buona definizione di retta tangente al grafico di $y=p(x)$ in un punto P: è la retta che ha in P almeno due punti di intersezione coincidenti. Questa definizione, che sembra perdere di significato per le funzioni trascendenti, potrà essere brillantemente recuperata (al triennio) esprimendo le funzioni in polinomi di Taylor.
La conclusione naturale di questo percorso è il teorema fondamentale dell'algebra, con la sua interpretazione geometrica per quanto riguarda il grafico di una funzione polinomiale.
Tutti questi argomenti possono essere svolti al biennio: le frazioni algebriche (viste soprattutto dal punto di vista delle funzioni razionali fratte) possono pacificamente attendere.
Non è importante che gli studenti al termine del secondo anno non sappiano scomporre una generica somma di cubi; però sanno certamente scomporre il polinomio x^3+1, perché vedono che ammette -1 come zero, e quindi è divisibile per $x+1$. In compenso sanno tracciare un grafico qualitativo della funzione $y=x^3+1$. Credo che sia più importante.

Conclusioni. Non è vero che un insegnamento del calcolo letterale fondato sulle strutture algebriche (gruppi, anelli, campi) sia difficile per i ragazzi: in un certo senso è vero il contrario. A 14 anni i ragazzi sono già in grado di compiere astrazioni di un certo livello, e il riconoscere la stessa struttura in insiemi completamente differenti è una avventura piacevole. Difficile è invece acquisire abilità operative come quelle necessarie per districarsi nel labirinto del calcolo letterale, in particolare delle frazioni algebriche; a 14 anni tali abilità (che sono solo operative, e quindi tecniche) non sono facili da acquisire, mentre negli anni successivi queste tecniche si imparano in ben poco tempo, e con minore sforzo. Un esempio: quando, al triennio, propongo il calcolo del rapporto incrementale della funzione $f(x)=1/x$:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right),$$

non registro alcun disorientamento nei ragazzi; nessuno ha dubbi sul fatto che per sommare le due frazioni algebriche in parentesi il minimo comune multiplo sia $x(x+h)$.