CALCOLO NUMERICO E CALCOLO SIMBOLICO:

NUOVE PROSPETTIVE PER IL CURRICULUM DI MATEMATICA

Michele Impedovo
www.matematica.it/impedovo/
impedovo@tin.it

> Se per esempio si vuole risolvere $x^2+4x-3=0$ si arriva a $-2 \pm \sqrt{7}$.
> Abbiamo progredito? Bisogna risolvere $x^2-7=0$.
> Non è perché lo si chiami $\sqrt{7}$ che lo si sa calcolare.
> Tutto ciò che si è fatto è stato di ricondurre
> un'equazione di secondo grado ad un'altra.
> Questo non significa "risolvere" l'equazione e se ci si ferma qui
> si dà agli allievi un'idea sbagliata di che cos'è la matematica
> e di che cosa ci si può aspettare da essa.
>
> Ivar Ekeland, *Il caos*

L'insegnamento attuale della matematica in Italia privilegia il calcolo simbolico: lo testimoniano la storica ed eccessiva abbondanza di calcolo letterale a partire dalla scuola media, la moltitudine di espedienti per la fattorizzazione dei polinomi (a coefficienti in **Z**? in **Q**? in **R**? mah?!**)** , i metodi artificiosi per risolvere equazioni particolarissime, gli innumerevoli "schemi" per le disequazioni, la "regola" di Ruffini, le "formule" di trigonometria e la "riduzione al primo quadrante", le regole di derivazione e soprattutto di integrazione e chissà quant'altro. Può capitare di seguire un intero corso di trigonometria senza vedere l'approssimazione in radianti di un solo angolo; può capitare di seguire un intero corso di analisi senza vedere un numero decimale.

Ricette di cucina

Questo tentativo di *esaurire* le potenzialità del calcolo simbolico ha innanzitutto condotto a un tipico errore didattico: privilegiare l'aspetto sintattico degli oggetti matematici trascurando il loro significato. Tale errore si è consolidato a tutti i livelli scolastici fino all'Università ma ha certamente prodotto i guasti maggiori nella scuola dell'obbligo, in cui molti insegnanti (tipicamente i non laureati in matematica) hanno scambiato l'insegnamento della matematica per un prontuario di "regole" e "formule" (le famigerate "ricette" del buon Croce). A queste tecniche di calcolo si aggrappano soprattutto gli alunni più deboli i quali, in assenza di significati riconosciuti, si accontentano di apprendere sequenze finite e ordinate di istruzioni. La scarsa spendibilità culturale di queste conoscenze è ben nota.
A testimonianza di quanto vado dicendo esiste un'esperienza di valutazione dell'apprendimento matematico in un certo senso unica in Italia: si tratta del *Progetto Prometeo*, realizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione in collaborazione con l'IRRSAE Marche (l'ultimo rapporto è stato pubblicato nel 2000). Questo progetto ha visto coinvolti dai 10000 ai 14000 studenti in ingresso e in uscita dal biennio delle scuole superiori, con test di valutazione in tutte le materie. I risultati del test di Matematica sono sconfortanti. In particolare colpiscono i tre item a risposta multipla seguenti, di cui riporto le percentuali di ciascuna risposta (si noterà la presenza di *distrattori*).

Test in ingresso

4. Il doppio di 3/4 è

A. 3/8	5%
B. 6/8	69%
C. 5/4	2%
D. 3/2	24%

7. Qual è il risultato della seguente espressione?

$$3 \cdot [-2 - (-5 + 3)]$$

A. −12	22%
B. +3	28%
C. +1	4%
D. 0	45%

Test in uscita (A= 4 ore settimanali di matematica, B= 5 ore settimanali di matematica)

13. Se a è un qualunque numero reale diverso da 0, quale tra le seguenti proposizioni è vera?

	A	B
A. a^2 è un numero negativo	37%	25%
B. $-a^2$ è un numero negativo	22%	39%
C. $-a$ è un numero negativo	8%	10%
D. $6a$ è un maggiore di a	29%	24%

Di fronte a risultati come questi, che provocano addirittura incredulità, non possiamo che sentirci tutti coinvolti e tutti responsabili. Ecco il *peccato mortale* dell'insegnante: tollerare che un solo studente sia convinto che il doppio di 3/4 sia 6/8. E invece, ahimè, il 69% della popolazione intervistata si rifugia nella sintattica, nell'applicazione di regole: è ovvio che se una "regola" è vuota di significato allora può essere sostituita da qualunque altra regola altrettanto priva di significato. Nessuno, dico nessuno, è in cuor suo convinto che il doppio di 3/4 d'ora siano 6/8 d'ora; tutti sanno che il doppio di 3/4 d'ora è un'ora e mezza. Perché allora la scuola produce questi risultati? Non diamo così fiato alle trombe di chi vorrebbe abolire l'insegnamento della matematica?

Si osservino anche le vistose percentuali di errore che riguardano la corretta applicazione del segno "–". Anche qui la colpa è nostra; nell'espressione

$$3 \cdot [-2 - (-5 + 3)]$$

il primo (e il terzo) "–" ha significato del tutto differente dal secondo. Il primo è il simbolo unario di "opposto di", il secondo è il simbolo binario di sottrazione. La comprensione non è certo agevolata da questa confusione simbolica; alcuni autori hanno proposto più di 10 anni fa di utilizzare scritture come le seguenti:

$${}^{-}2 - 5 \qquad {}^{-}2 \cdot {}^{-}5 \qquad {}^{-}2 - {}^{-}5$$

tali notazioni, utilizzando due simboli diversi, evidenziano le differenze semantiche, sono più semplici da scrivere e non esigono parentesi. Inspiegabilmente le proposte in tal senso sono rimaste lettera morta.

Le equazioni non si risolvono: si guardano

In secondo luogo in questa esasperata attenzione alle relazioni simboliche (si pensi alla abusata consegna di "semplificare" un'espressione) sono spesso mancate le visioni **di struttura** degli oggetti matematici; è cioè mancata la capacità di semplificare, strutturare, ridurre ad uno stesso schema cognitivo oggetti diversi. Per esempio tutto il calcolo letterale si può ridurre alle proprietà di *campo* (di **Q** per esempio) e quindi in definitiva alle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione, ma negli indici dei libro di testo questo non appare: si parte con la somma di monomi per arrivare minuziosamente alla divisione di polinomi. È davvero inammissibile che su molti libri di testo sia ancora scritto che "un polinomio è la somma algebrica di più monomi non simili", lasciando così intendere che x non sia un polinomio. Proviamo a chiederci quanti matematici hanno mai utilizzato il mistico concetto di "monomi simili" e chiediamoci se verrà mai più utilizzato dallo studente negli studi successivi di matematica. Analoghe perplessità dovrebbero essere nutrite nei confronti dei cosiddetti "principi di equivalenza", inutili e anzi dannosi; non occorre alcun principio per risolvere le equazioni e i sistemi lineari a coefficienti in un campo. Occorrono solo le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.

Un altro esempio di mancanza di struttura riguarda le equazioni (algebriche, esponenziali, trigonometriche, …), alla cui risoluzione si sacrifica solitamente una parte corposa del curriculum; gran parte di esse hanno coefficienti ad hoc, scelti apposta perché le soluzioni siano razionali, o comunque esprimibili in forma simbolica. Mettiamoci ancora gli occhiali *strutturali*: dato che di norma non si lavora nel campo dei numeri complessi (e ci mancherebbe altro!) tutto ciò che "si sa" risolvere, nel senso che le soluzioni appartengono sempre al campo dei coefficienti, sono le equazioni e i sistemi lineari. Stop.

Già con le equazioni di secondo grado inizia la confusione; se non si approssimano le soluzioni, con la formula risolutiva non si fa altro che ricondurre un'equazione di secondo grado ad un'altra equazione di secondo grado. Questa è una tentazione irresistibile dell'insegnamento matematico in Italia: ricondurre una soluzione simbolica ad un'altra soluzione simbolica. È quanto si fa, per citare un solo esempio, con le regole di derivazione e di integrazione: davanti all'espressione simbolica

$$\int x \ln(x)\, dx$$

la tacita consegna è che l'alunno restituisca qualcosa come

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

e spesso tutto finisce lì. Ma esprimere oggetti matematici esclusivamente in forma simbolica, come in questo caso, non aggiunge nulla in termini di conoscenza; aumentano invece le possibilità che l'allievo (in particolare l'allievo debole) accetti acriticamente di rifugiarsi nella sintassi, nelle "regole", nelle tecniche di calcolo.

Inoltre può sorgere l'equivoco del "non si può risolvere"; un'equazione di 5° grado ammette almeno una soluzione reale, che in generale non si può esprimere per radicali; ciò non significa affatto che non si possa "risolvere", o almeno non più di quanto non si sappia risolvere

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

La soluzione simbolica di quest'ultima equazione richiede l'utilizzo di $\sqrt{5}$, che è altrettanto ignoto, in linea di principio, di simboli solo apparentemente più complessi. Per esempio le soluzioni di un'equazione generica di quinto grado possono essere espresse in forma simbolica mediante la funzione θ di Jacobi.

Analogamente sostenere, come appare in molti testi scolastici, che "i valori dell'integrale definito

$$\int_a^b e^{-x^2}\, dx$$

non si possono esplicitare" è fuorviante e in definitiva obsoleto. Se si intende che "non si possono esplicitare" in forma simbolica, allora è falso: la (una) forma simbolica è proprio quella appena scritta. Se si intende che non si possono calcolare allora è falso quanto dire che non si può calcolare radice di 2.

In termini più semplici: risolvere un'equazione come

$$2^x = 100$$

limitandosi a fornire la soluzione tautologica

$$x = \log_2(100)$$

è davvero troppo poco; è necessario che ogni studente sia in grado di dare qualche approssimazione di tale numero. Lo slogan potrebbe essere:

LE EQUAZIONI SI RISOLVONO PER TENTATIVI

Ogni studente deve sapere al volo che la soluzione dell'equazione precedente è un numero irrazionale compreso tra 6 e 7. E per conoscerne la prima cifra decimale non resta che fare qualche tentativo con la calcolatrice. Ora sì che ha senso porsi il problema della *definizione* di potenze come $2^{6.6}$.
Se non si dà base empirica alla ricerca di equazioni non lineari si salta una fase fondamentale dell'apprendimento, non si costringe l'allievo ad osservare la grande ed affascinante danza dei numeri, dalla quale sarà poi possibile astrarre; quando infine si dirà "$\log_2(100)$" questo simbolo potrà appoggiare la propria validità semantica sul piedistallo dell'approccio numerico.
L'approccio per tentativi possiede una sorta di validità generale, è applicabile in generale, non costringe a conoscere regole ad hoc per ciascun tipo di equazione, ma costringe a comprendere il significato di "soluzione" di un'equazione. Nell'accezione che abbiamo dato, risolvere un'equazione per tentativi è *strutturale*.

Figurato *n* al tasso *i*?

Un terzo aspetto del calcolo simbolico su cui dovremmo riflettere riguarda le **notazioni**. È del tutto ovvio che le notazioni matematiche non sono state scelte per scopi didattici; anzi, in qualche modo i matematici si sono sempre compiaciuti di essere un po' incomprensibili, conservando nel tempo simboli e notazioni che hanno il vezzo di rivolgersi esclusivamente agli addetti ai lavori (un mio amico dice: "perché fare una lezione difficile quando con un piccolo sforzo si può essere veramente incomprensibili?"); anche su questo terreno è mancata una visione strutturale. In fondo, si può obiettare, i simboli sono convenzioni di scrittura sulle quali possiamo accordarci. Inoltre la ricchezza di simboli è in qualche modo ricchezza storica e ricchezza intellettuale. Giusto. Tuttavia una buona notazione veicola i concetti in modo più semplice e facilita l'apprendimento; e nella sterminata proliferazione di simboli manca una visione strutturale che forse aiuterebbe gli studenti a vedere oggetti diversi come riconducibili allo stesso processo mentale.
Mi spiego con un esempio: quando scriviamo

$$\binom{n}{i}$$

intendiamo il coefficiente binomiale "*n* su *i*" cioè il rapporto $\frac{n!}{i!(n-i)!}$; quando scriviamo

$$a_{\overline{n|}\, i}$$

intendiamo "*a* figurato *n* al tasso *i*" cioè la sommatoria $\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^t}$. Ciascuno di essi utilizza altri simboli, e così via, lungo la faticosa catena dell'apprendimento. Quei simboli sono molto sintetici e rappresentano due esempi significativi di "calcolo simbolico": entrambi hanno alle spalle un lungo percorso semantico e arrivare ad essi significa stringere in pugno, con un solo segno, un faticoso processo di apprendimento. Questa è, in definitiva, la ricchezza del "calcolo simbolico".
Ma quando usiamo simboli come $\binom{n}{i}$ e $a_{\overline{n|}\, i}$ non riusciamo a trasmettere che si tratta, in entrambi i casi, di funzioni: uno stesso processo mentale sovrintende alla costruzione di entrambi. Sono semplicemente funzioni a due argomenti; se le indicassimo, che so, con cb(n,i) e A(n,i) non

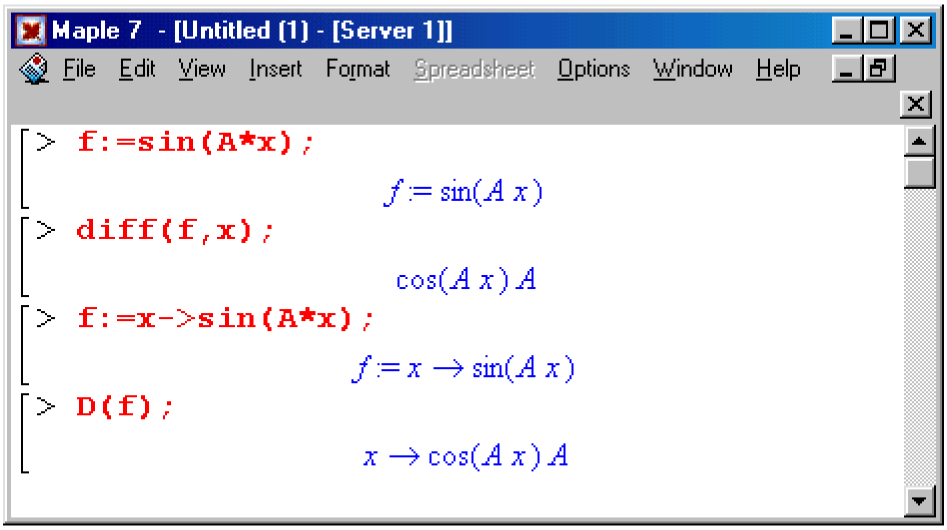
toglieremmo nulla al valore informativo di quei simboli e forse agevoleremmo la comprensione dei concetti.
La **scrittura in linea** di un'espressione matematica può diventare non solo un modo per utilizzare consapevolmente gli strumenti informatici e i software di calcolo simbolico, ma può anche essere uno strumento didattico per semplificare un processo mentale, per strutturare le conoscenze, per sfruttare gli aspetti algoritmici della matematica come inesauribili risorse di insegnamento-apprendimento.
È curioso che la scrittura elettronica non sia ancora riuscita a intaccare le notazioni matematiche, che ancora abbiamo difficoltà a scrivere la radice quadrata di 2. Continuiamo ad utilizzare simboli come

$$\frac{df}{dx}, \int f(x)dx$$

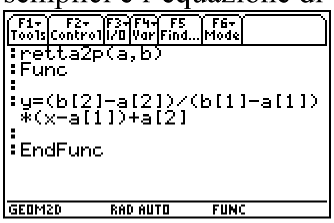
che sono inadatti a veicolare i concetti che si propongono di indicare, che sono inutilmente complicati (se non addirittura fuori luogo). Perché non sostituirli con notazioni più strutturate, come

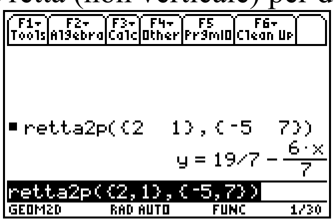
$$D(f,x) \text{ e } P(f,x),$$

dove f è un' espressione e x una variabile? In fondo D e P sono anch'esse due funzioni a due argomenti.
L'implementazione della computer algebra ha costretto a strutturare gli oggetti matematici: perché non imparare da quel percorso? Per esempio in MAPLE esistono addirittura due operatori di derivazione: diff e D.



Il primo prende in ingresso un'espressione e una variabile e restituisce un'espressione.
Il secondo prende in ingresso una <u>funzione</u> (che in MAPLE si definisce nella forma $x \rightarrow f(x)$) e restituisce una funzione. In questo caso non occorre specificare la variabile, perché questa è implicitamente contenuta nella funzione stessa. Noi solitamente non distinguiamo tra espressione e funzione; la distinzione invece diventa indispensabile quando l'una o l'altra diventano argomenti di nuove funzioni. Allora la sintassi (il vero "rigore") diventa ineludibile.
Mi è capitato più volte nel lavoro in classe di costruire con gli studenti funzioni (poi implementate sulle calcolatrici simboliche) per ottenere rapidamente un certo risultato. Un esempio tra i più semplici è l'equazione di una retta (non verticale) per due punti:





Un'attività di questo tipo costringe a strutturare il concetto di funzione attraverso

- il **numero** degli argomenti;

- l'**ordine** degli argomenti;
- la **struttura-dati** degli argomenti (abbiamo scelto di dare in input due argomenti: le liste $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ delle coordinate dei due punti).

Inoltre definire e implementare una funzione costringe a inventare nuove notazioni: il nome retta2p diventa un nuovo strumento di comunicazione in classe. L'abbreviazione del linguaggio diventa rapidità del pensiero.

Approssimazione, che passione

Proviamo a definire anche la **approssimazione** come una funzione: $f(x)$ prende in ingresso un numero reale x e fornisce in uscita l'approssimazione di x alla prima (per esempio) cifra decimale.
Tale funzione non conserva la somma, nel senso che in generale

$$f(a+b) \neq f(a)+f(b).$$

Per esempio

$$f(0.23+0.44) = f(0.67) = 0.7$$
$$f(0.23) + f(0.44) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

Questo fatto è una delle cause di diffidenza degli insegnanti nei confronti delle approssimazioni. D'altra parte perché mai l'approssimazione dovrebbe conservare una proprietà che è tipica delle funzioni lineari?
Se si lavora con un foglio elettronico si possono ottenere risultati drammaticamente errati. È celebre l'esempio della successione ricorsiva

$a_0 := \frac{1}{3}$

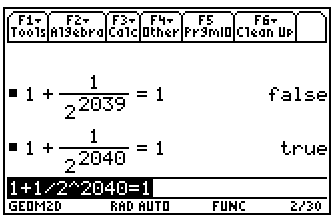
$a_{n+1} := 4a_n - 1$

che è la successione costante di valore 1/3, ma che secondo Excel diverge a $-\infty$.

n	**a_n**
0	0.333333333333
1	0.333333333333
2	0.333333333333
3	0.333333333333
4	0.333333333333
5	0.333333333333
6	0.333333333333
7	0.333333333333
8	0.333333333332

Infatti all'ottava iterazione l'errore prodotto dall'inevitabile troncamento di $0.\overline{3}$ risale fino alla 12ª cifra decimale, e da quel punto in poi si ha un rapido divergere a $-\infty$.
Il calcolo simbolico è immune dalla propagazione dell'errore, ma poiché ogni sistema di calcolo simbolico possiede un limite superiore ai numeri che può trattare (e un limite inferiore ai numeri positivi) le sorprese sono sempre dietro l'angolo. Ecco come la calcolatrice simbolica valuta, al variare di n, l'uguaglianza

$$1+\frac{1}{2^n} = 1.$$



Dagli esempi svolti risulta evidente che la diffidenza degli insegnanti nei confronti del calcolo numerico è in un certo senso comprensibile. L'insegnante deve possedere nuove competenze e deve essere in grado di padroneggiare gli eventuali errori prodotti dal calcolo automatico. Non possiamo tuttavia dimenticare che l'approssimazione è stata, da sempre, uno dei motori della storia della matematica.

Simbolico e numerico

Una delle difficoltà riconosciute nell'apprendimento della matematica è la "generalizzazione precoce": si cerca prematuramente un livello di astrazione al quale l'allievo non è preparato. Il calcolo letterale ne rappresenta in un certo senso l'esempio per eccellenza. Dire che "le lettere stanno al posto di numeri qualsiasi" non è sufficiente a consolidare la padronanza dei significati in gioco. Conosco un buon numero di studenti (ma anche di adulti) che sanno ripetere la formula del quadrato del binomio, ma dichiarano di non sapere assolutamente che cosa essa possa significare. È questo il nostro scopo? No, evidentemente. Eppure ci sono, si può dire, infiniti modi di riempire di significato una relazione simbolica.
Nell'esempio in questione: qual è la probabilità che lanciando 2 volte una moneta equa esca una volta TESTA (T) e una volta CROCE (C), non importa in che ordine?
Posti davanti a questo problema senza alcuna trattazione preliminare molti studenti rispondono 1/3, perché possono accadere 3 eventi diversi (2T, 1T 1C, 2C). Se si fa notare loro che 1T 1C si può ottenere in due modi diversi arrivano rapidamente ad una soluzione corretta; si accorgono anche che le combinazioni con cui si possono ottenere i diversi eventi sono nell'ordine 1, 2, 1. L'analogia con il quadrato del binomio è evidente: $(T+C)^2 = T^2+TC+CT+C^2 = T^2+2TC+C^2$; anche qui, dei quattro prodotti di $(T+C)\cdot(T+C)$ i termini TT e CC si possono ottenere in un solo modo, il termine TC in due modi diversi. Un passo avanti: qual è la probabilità che lanciando 3 volte una moneta esca due volte T e una volta C? Lo sviluppo

$$(T+C)^3 = T^3 + 3T^2C + 3TC^2 + C^3$$

conduce subito alla risposta, perché il prodotto $(T+C)\cdot(T+C)\cdot(T+C)$, il cui sviluppo prevede otto addendi, "conta" il numero di combinazioni di ciascun evento. La risposta è 3/8. Ma si può andare oltre: si può pensare più in generale ad un evento che accada o non accada con probabilità rispettive a, b, con $a+b=1$. Allora lo sviluppo di $(a+b)^n$ rappresenta esattamente la distribuzione di probabilità che l'evento accada 0, 1, 2, …, n volte su n prove indipendenti.
Potrebbe essere interessante testare il grado di intuizione degli allievi: un giocatore di pallacanestro, che fa centro nel tiro libero 7 volte su 10, tira tre volte; con quale probabilità otterrà 0, 1, 2, 3 centri? Le risposte sono date dagli addendi dello sviluppo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

dove a=0.3 e b=0.7:

k	0	1	2	3
$p(k)$	0.027	0.189	0.441	0.343

Sembrerà strano, ma il fatto che la somma delle probabilità dia 1 è per molti studenti sorprendente e confortante: il cubo di un binomio ha delle implicazioni semantiche che possiamo controllare.
Un'altra attività collegabile alla precedente è quella della **simulazione**. Possiamo simulare con un calcolatore un grande numero di prove e registrare i risultati sperimentali.
Siamo in una situazione privilegiata per l'apprendimento: lo studente può confrontare il risultato atteso dalla propria intuizione con il modello sperimentale e con il modello teorico; la corrispondenza o meno tra i diversi livelli costituisce elemento di forte partecipazione emotiva e intellettiva.

Numerico e simbolico

L'esagerata attenzione al calcolo simbolico ha fatto sì che l'approccio numerico a concetti matematici importanti fosse trascurato. È invece opinione diffusa che l'approccio numerico costituisca un valido supporto all'apprendimento e alla costruzione dei concetti; attività di esplorazione, di simulazione, la ricerca di un modello funzionale per i dati, la formulazione di congetture fondate sull'analisi empirica di dati numerici (in geometria, nell'interpretazioni dei dati, nel calcolo infinitesimale, in calcolo delle probabilità) possono aiutare a rendere solide le conoscenze matematiche e contribuiscono ad affinare l'astrazione.
In particolare è condivisa l'idea che l'approccio numerico ai concetti del calcolo infinitesimale sia efficace dal punto di vista dell'apprendimento. L'idea chiave è che, a parte le eccezioni del caso, una funzione può essere "linearizzata" vicino ad ogni punto: pur di ingrandire il grafico vicino a quel punto ci appare una retta. La pendenza di questa retta è l'oggetto dei nostri desideri. In altri termini, una funzione $f(x)$ può essere approssimata "vicino" ad un punto x_0 da una funzione lineare su un intervallo $[x_0-h, x_0+h]$ di pendenza

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

La pendenza su un intervallo simmetrico rispetto a x_0 sembra più naturale del solito *rapporto incrementale* (che brutta espressione!)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e fornisce un'approssimazione migliore. Il problema della definizione di $f'(x_0)$ è di là da venire, per ora ipotizziamo tacitamente che le funzioni che trattiamo siano derivabili in x_0.
Un possibile percorso, scandito da lavori di gruppo, potrebbe essere il seguente.

- Sia data la funzione $f(x):=x^3$. Approssimare la pendenza in $x_0:=2$, con h = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001. A quale valore sembra tendere la pendenza?

➢ COMMENTO. È bene non iniziare con una funzione quadratica, perché la pendenza media, qualunque sia h, è esattamente la pendenza istantanea nel punto. Gli studenti dovrebbero osservare il progressivo avvicinarsi delle diverse approssimazioni ad un numero intero (12), fino a congetturare che tale numero possa essere il valore simbolico della pendenza istantanea in 2. La verifica di tale congettura è lo scopo del lavoro di gruppo successivo.

- Qual è la funzione lineare $g(x)$ di pendenza 12 passante per $(2,f(2))$? Verificare che i grafici di $y=f(x)$ e $y=g(x)$ hanno in $x_0=2$ <u>due</u> intersezioni coincidenti.
- Approssimare la pendenza di $f(x):=x^3$, con $h=0.01$, nei punti $x_0=1, 2, 3, 4, 5$. Come varia la pendenza? Quali osservazioni si possono svolgere?

➢ COMMENTO. Gli studenti si accorgono della regolarità; congetturano che il "limite" a cui tendono le diverse approssimazioni sia $m(x_0)=3x_0^2$. È bene ora controllare la congettura su altri valori (anche non interi) di x_0. Inizia a nascere l'idea *funzionale*: la pendenza istantanea varia al variare di x secondo una precisa legge, è una funzione di x, <u>derivata</u> dalla legge $f(x)$. Quale?

- Approssimare la pendenza di $f(x):=x^4$, con $h=0.01$, nei punti $x_0=1, 2, 3, 4, 5$. Quale potrebbe essere la funzione *derivata*? Idem con $f(x):=x^5$. Idem con x^6.

➢ COMMENTO. Dovrebbe sorgere la congettura secondo cui la derivata di x^n è nx^{n-1}.

- Verificare la congettura secondo cui la derivata di x^n è nx^{n-1} con $n=2$, $n=-1$, $n=1/2$.
- Sia $f(x):=\sqrt{x}$. Sappiamo che $f(9)=\sqrt{9}=3$. Quanto può valere circa $\sqrt{10}$?

➢ COMMENTO. Si tratta di un lavoro fondamentale per cogliere il significato più profondo di "linearizzazione". Ci si aiuti con il grafico di $f(x)$ e della retta tangente in $x_0=3$. Il calcolo infinitesimale ha avuto come motore fondamentale dei suoi successi l'obiettivo di approssimare i valori delle funzioni.

Le cosiddette "regole di derivazione" sono non solo indigeste, ma inutili e dannose. Lasciamole come dessert, a coloro che proseguiranno con studi scientifici.

Una competenza essenziale del futuro cittadino potrebbe essere quella di riconoscere in una tabella di dati una crescita o una decrescita lineare ($ax+b$), oppure di tipo potenza (ax^b), oppure di tipo esponenziale (ab^x), o altre ancora. Gli esempi sono innumerevoli, limitati solo dalla fantasia dell'insegnante (e dello studente). Ecco alcuni esempi:

- Voti d'esame confrontati con i la media dei voti in pagella al II quadrimestre per la classe di maturità.
- Distanza media dal Sole e tempo medio di rivoluzione dei pianeti del Sistema Solare (III legge di Keplero).
- Raffreddamento di un bicchiere d'acqua bollente a temperatura ambiente: temperatura dell'acqua rispetto al tempo (si possono utilizzare i sensori collegati ad una calcolatrice).
- Intensità luminosa di una lampadina alimentata dalla rete a 220 Volt, 100 campionamenti ogni millesimo di secondo (sempre con i sensori): si "vede" la corrente alternata comporre una sinusoide.
- Posizione di uno studente (distanza dal sensore di moto) rispetto al tempo.
- Popolazione italiana nei diversi censimenti.
- Record mondiali di atletica (velocità e mezzofondo) sulle varie distanze: 100 m, 200 m, 400 m, 800 m, 5000 m, 10000 m.
- Record mondiale sui 100 m dal 1912 a oggi.
- PIL (Prodotto Interno Lordo) dell'Italia negli ultimi anni.
- Tempo di calcolo con una calcolatrice del determinante di una matrice $n\times n$ in funzione di n.
- Lunghezza della corda vibrante di un pianoforte in funzione della frequenza della nota emessa.
- …

I dati si possono cercare in rete.
Il tema della regressione (lineare, potenza, esponenziale) è centrale in un curriculum che valorizzi le competenze legate all'analisi e alla modellizzazione dei dati: si tratta di attività che consolidano i concetti, che avvicinano la matematica alla sensibilità dell'allievo, ma soprattutto che rafforzano (non è un paradosso) la capacità di astrazione.

Molti problemi di modellizzazione si possono ricavare dalla matematica stessa. Ecco qualche esempio.

- Quanto vale la somma dei primi n numeri naturali? Quanto vale la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali? Quanto vale la somma dei cubi?
- Consideriamo la somma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Pur di sommare un numero opportuno di addendi, possiamo raggiungere qualunque numero positivo M? Quanti addendi occorre sommare per raggiungere 3, 4, 5, 8, 10? Che tipo di crescita è?
- Quante sono le equazioni di secondo grado a coefficienti interi compresi tra $-n$ e n che hanno soluzioni razionali (quindi il discriminante è un quadrato perfetto)?
- Se approssimiamo $f'(x_0)$ con la pendenza media di $f(x)$ in $[x_0-h, x_0+h]$
$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$
come varia l'errore in funzione di h?
- Se approssimiamo l'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la somma
$$\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x$$
dove $\Delta x:=(b-a)/n$, che errore commettiamo al crescere di n?
- …

Chi è il futuro insegnante di matematica?

Penso al futuro insegnante di matematica come ad un insegnante che abbia una certa consapevolezza critica nei confronti dei tabù della nostra disciplina, che sia anche capace di inventare nuovi simboli, capace di guardare alla matematica senza reverenza e senza sudditanza, capace di piegare le tecnologie alla propria fantasia e alla fantasia degli studenti. Penso ad un insegnante curioso e aggiornato, che legge le riviste di didattica della matematica, che non si affida ciecamente al libro di testo, che studia e propone le applicazioni della matematica in altre discipline, che sa mostrare ai propri studenti la matematica all'opera, nei fatti. Penso ad un insegnante capace di comporre un proprio curriculum che abbia una struttura, un senso e una coerenza rispetto ai contenuti previsti.
Penso ad un insegnante di matematica padrone del proprio destino.