CINQUE ORE SONO TROPPE

Michele Impedovo

Cinque ore sono troppe, IPOTESI, anno 1 n° 2, gennaio 99

Esame di maturità scientifica 1998 (l'ultimo, il prossimo sarà *Esame di Stato*), **Piano Nazionale di Informatica**.
Il testo ministeriale, dopo la formulazione dei tre quesiti ("*La prova consiste nello svolgimento di due soli quesiti, scelti tra quelli proposti*"), recita:

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Vorrei tralasciare ogni ironico commento a quest'ultima infelice proposizione (il Ministero mostra di ignorare la differenza tra il **consentire** qualcosa e il **vietare** tutto il resto; se fossi uno studente solleverei un contenzioso, e mi porterei all'esame non solo una TI-92, ma addirittura un Pentium portatile a 300 MHz corredato delle ultime versioni di Cabri, Derive, Maple e Mathematica).
Siamo seri (e indulgenti): vietare l'uso di una calcolatrice programmabile all'esame di un corso di studi etichettato come PIANO NAZIONALE DI INFORMATICA è un po' come vietare l'automobile all'esame di scuola guida.

Vorrei mostrare invece come l'uso di una *calcolatrice programmabile* come la TI-92 nella risoluzione dei quesiti proposti sarebbe assai salutare: aiuterebbe il candidato a *progettare* una soluzione convincente evitando i calcoli più laboriosi e gli errori più fastidiosi, e aiuterebbe l'esaminatore a graduare la propria valutazione. Non è affatto vero che con strumenti automatici di calcolo ogni allievo saprebbe risolvere i quesiti di matematica: in un certo senso è vero il contrario. Chi padroneggia qualche strumento automatico di calcolo conosce meglio la matematica, se non altro perché ne ha una esperienza più ricca e più solida.
Naturalmente i quesiti rivolti a studenti capaci di padroneggiare una calcolatrice grafico-simbolica dovrebbero cambiare radicalmente: dalla richiesta di risultati che scaturiscono semplicemente da calcoli (per esempio le solite aree sottese dalle solite funzioni) si dovrebbe passare a problemi molto più aperti, in cui il candidato possa scegliere il livello di generalità che reputa più opportuno, la forma espositiva che preferisce, gli esempi particolari che ritiene maggiormente significativi.
Per esempio:

1. Approssimare al meglio mediante funzioni polinomiali di secondo grado la funzione $f(x)=\sin(x)$ nell'intervallo $[0,\pi]$.
   (*La formulazione è volutamente vaga: lo studente può affrontare il problema a diversi livelli di complessità e di generalità. Dall'articolazione dello svolgimento, prima ancora degli strumenti matematici utilizzati, è possibile valutare le capacità del candidato*).
2. Determinare rette che siano tangenti sia al grafico di e^x sia al grafico di $\ln(x)$.
3. Risolvere l'equazione $x^n = a^x$ (a, n reali positivi) rispetto alla variabile x.

Vediamo ora come risolvere i primi due quesiti avendo a disposizione la TI-92.

Quesito 1.

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti A(–1,0) e B(1,0).

Il candidato:

a) scriva l'equazione di Γ_1, luogo dei punti per cui è uguale a $2\sqrt{2}$ la somma delle distanze da A e da B, e l'equazione di Γ_2, luogo per cui è uguale a $\sqrt{2}$ la distanza da B;
b) verifichi che Γ_1 e Γ_2 hanno due punti C e D in comune e dimostri che CBD è un triangolo rettangolo;
c) determini, eventualmente sfruttando la simmetria della curva Γ_1 rispetto all'asse delle ordinate, l'area della regione finita di piano S delimitata dagli archi di Γ_1 e Γ_2 appartenenti al semipiano di equazione $y \geq 0$ e dai segmenti VW e V'W', essendo V, V' e W, W' i punti d'intersezione dell'asse delle ascisse rispettivamente con Γ_1 e Γ_2 (V e W di ascissa positiva);
d) considerato il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse, scriva la funzione f(x) che esprime l'area della sezione di T con il piano perpendicolare all'asse delle ascisse e passante per il punto P(x,0), distinguendo le varie posizioni di P, e disegni la curva Λ di equazione y=f(x);
e) dica cosa rappresenta per il solido T l'area della parte di piano compresa tra Λ e l'asse delle ascisse.

La curva Γ_1 è per definizione un'ellisse di centro l'origine, fuochi A e B, e quindi semiassi di lunghezza $\sqrt{2}$ e 1. L'equazione cartesiana è

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

e il grafico è dato dall'unione dei grafici delle due funzioni

$$f_1(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\,.$$

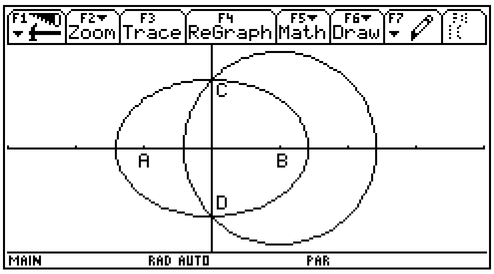
La curva Γ_2 è per definizione una circonferenza di centro B e raggio $\sqrt{2}$; l'equazione cartesiana è

$$(x-1)^2 + y^2 = 2$$

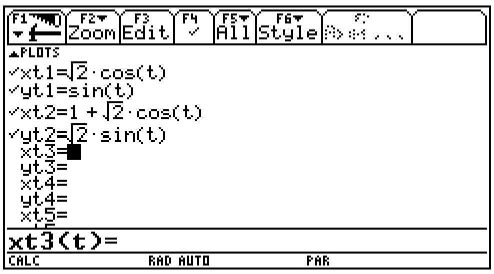
e il grafico è dato dall'unione dei grafici delle due funzioni

$$g_1(x) = \sqrt{2 - (x-1)^2}$$

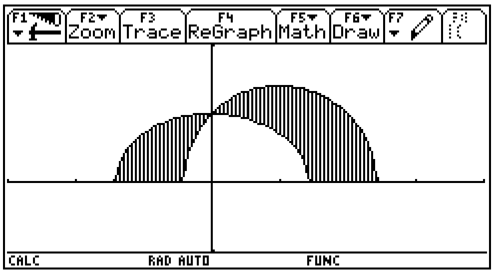
$$g_2(x) = -\sqrt{2 - (x-1)^2}\,,$$



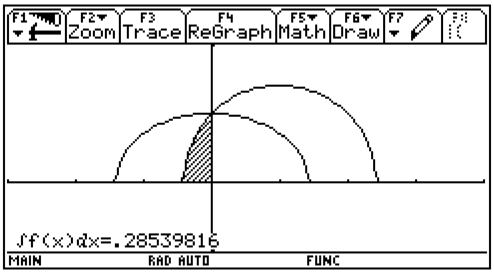
La figura precedente è stata ottenuta non nella modalità grafici Function (i grafici di f_1, f_2, g_1, g_2 sembrano staccati) ma in modalità grafici Parametric.



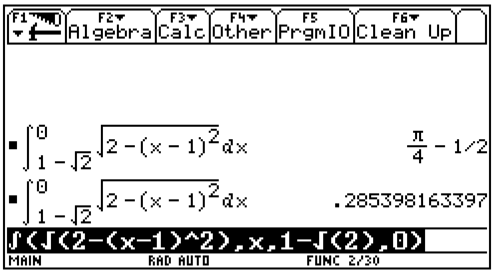
È importante conoscere le equazioni parametriche di (almeno) rette, circonferenze ed ellissi: non sono utili per la ricerca dei punti di intersezione, ma sono indispensabili per coglierne l'aspetto "cinematico", e per arricchire il significato delle funzioni circolari.
Le intersezioni tra Γ_1 e Γ_2 sono i punti C(0,1), D(0,–1), e il triangolo BCD è evidentemente rettangolo e isoscele (non è necessario alcun calcolo).
L'area S richiesta è quella tratteggiata nella figura seguente.



Per calcolarla occorre conoscere l'area del semi-segmento circolare U compreso tra l'arco di Γ_2 nel secondo quadrante e gli assi.

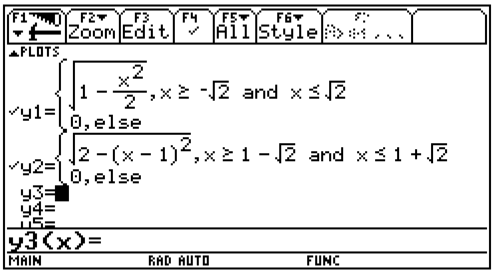


Calcoliamo l'area di U, in forma simbolica e in forma approssimata:



L'area della regione S, ricordando che l'area dell'ellisse di semiassi a e b è πab, è quindi data dalla somma:
(Area di 1/4 di ellisse – Area di U) + (Area di 1/2 di cerchio – Area di 1/4 di ellisse – Area di U) = Area di 1/2 di cerchio – 2 Area di U) = $\pi/2 + 1$.

Estendiamo le funzioni $f_1(x)$ e $g_1(x)$, in modo che valgano 0 al di fuori del loro insieme di definizione, e memorizziamole in $y1(x)$ e in $y2(x)$.



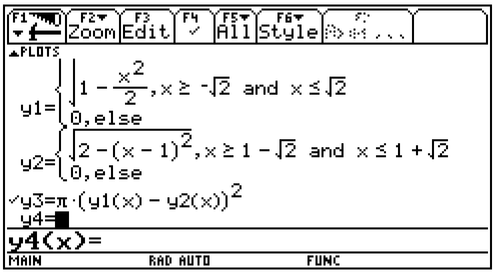
Consideriamo ora il solido T che si ottiene facendo ruotare S di un giro completo attorno all'asse delle ascisse. La sezione di T con un piano perpendicolare all'asse delle ascisse è un cerchio di raggio

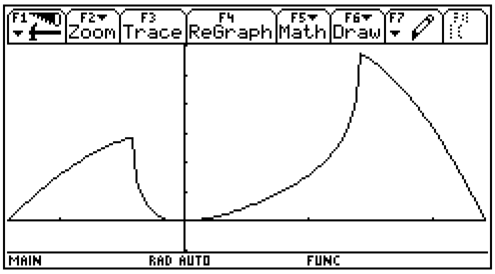
$$r(x) = |\, y1(x) - y2(x)\,|,$$

e area

$$\pi r(x)^2 = \pi\,(y1(x) - y2(x))^2$$

La funzione $f(x)$ richiesta ha il grafico seguente.





Naturalmente l'area sottesa da $f(x)$ è il volume di T:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \pi(y1(x) - y2(x))^2\,dx\,.$$

Quesito 2

Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$$

Il candidato:

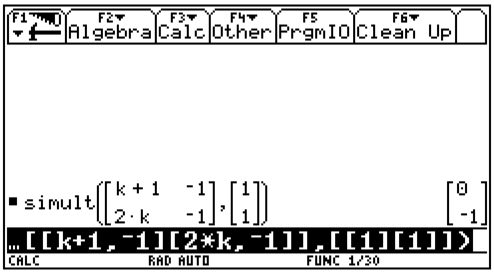
a) dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni;

b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette r, s, t di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione;

c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo;

d) in tale condizione, fissato h=1, studi come varia l'area del triangolo al variare di k e disegni, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali O'ks, la curva di equazione s=s(k).

Risolviamo il sistema delle prime due equazioni, usando il comando simult.



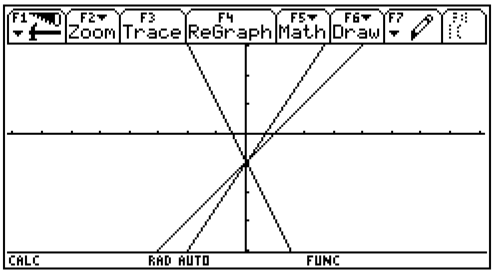
Il sistema delle prime due equazioni ammette come soluzione x=0 e y=–1, per qualunque valore di k. Sostituendo nella terza equazione otteniamo che il sistema dato ammette la soluzione x=0 e y=–1 per h=0 e per qualsiasi k.
Le tre equazioni lineari in x, y

r: $y = (k+1)x–1$

s: $y = 2kx–1$

t: $y = –2x–1–h$

individuano tre rette tutte passanti per il punto (0,–1), che rappresenta la soluzione del sistema. Ecco per esempio le tre rette per k=1/2.



Quando il sistema non ha soluzione, e perciò per h≠0, le rette r, s, t individuano un triangolo a patto che r e s non siano parallele a t, e quindi se

$$k+1 \neq -2 \rightarrow k \neq -3, \quad \text{e} \quad 2k \neq -2 \rightarrow k \neq -1.$$

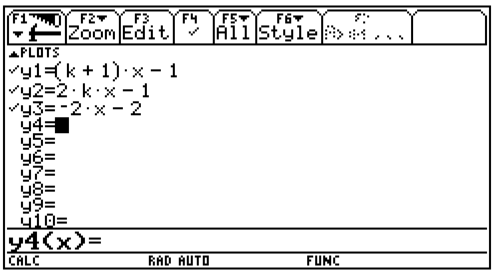
Se si fissa h=1, per ogni k diverso da –1 e da –3 le rette

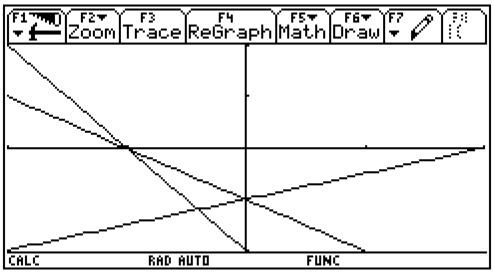
r: $y = (k+1)x–1$

s: $y = 2kx–1$

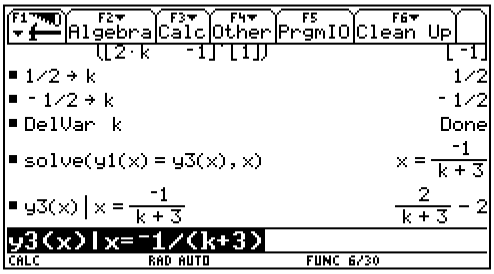
t: $y = –2x–2$

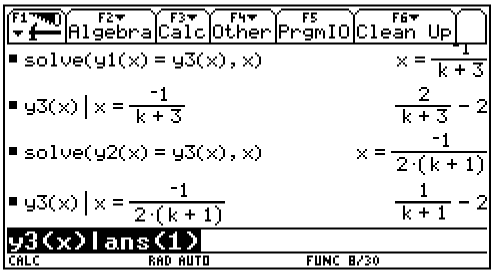
individuano un triangolo, in cui uno dei vertici è sempre (0,–1). Ecco per esempio il triangolo nel caso k=–1/2.





Per determinare l'area di tale triangolo, calcoliamo le coordinate delle intersezioni $r \cap t$ e $s \cap t$.





I vertici del triangolo sono dunque i punti di coordinate.

$$\mathrm{A}(0,-1), \qquad \mathrm{B}\left(\frac{-1}{k+3},\frac{2}{k+3}-2\right), \mathrm{C}\left(\frac{-1}{2(k+1)},\frac{1}{k+1}-2\right)$$

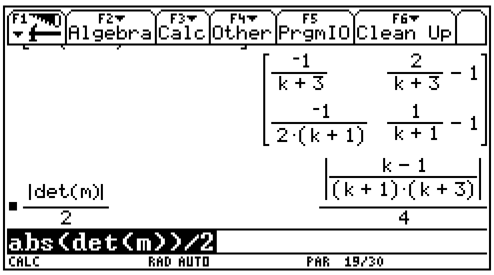
Per calcolare l'area, determiniamo le componenti dei vettori <u>AB</u> e <u>AC</u>:

$$\underline{\mathrm{AB}} = \left[\frac{-1}{k+3},\frac{2}{k+3}-1\right],$$

$$\underline{\mathrm{AC}} = \left[\frac{-1}{2(k+1)},\frac{1}{k+1}-1\right].$$

Detta M la matrice 2×2 formata dai vettori <u>AB</u> e <u>AC</u>, l'area del triangolo è data quindi da

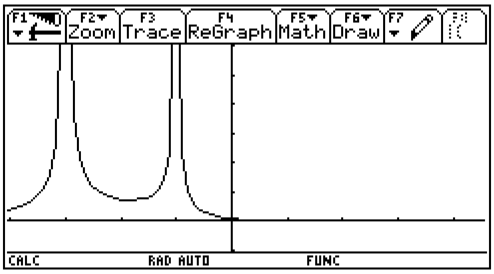
$$\frac{1}{2}\,|\det(\mathrm{M})|.$$



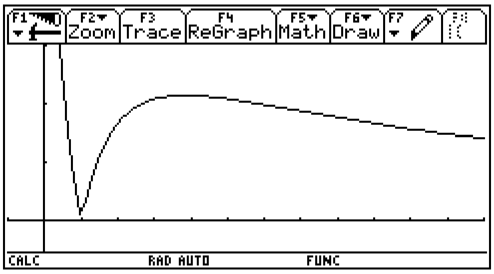
La funzione $s(k)$ è dunque

$$s(k) = \left| \frac{k-1}{4(k+1)(k+3)} \right|$$

Sostituendo x al posto di k e memorizzando in $y4(x)$ possiamo già tracciare il grafico della funzione richiesta, che è una razionale fratta avente due asintoti verticali: $x=-1$ e $x=-3$. Il seguente grafico si riferisce al rettangolo $[^-4, 4]\times[^-1, 6]$.



Il grafico è chiaro per $k<0$: l'area ammette un minimo relativo per $k=1-\sqrt{8}$, e tende a 0 per $k\to -\infty$. Per $k>0$ conviene mettere in evidenza i valori prossimi a zero della funzione.
Ecco il grafico nel rettangolo $[^-1, 12]\times[^-0.005, 0.03]$



La funzione si annulla per $k=1$ (r e s coincidono), ha un massimo relativo per $k=1+\sqrt{8}$ e tende a 0 per k tendente a $+\infty$.

Conclusioni. Per studiare i problemi e svolgere i relativi calcoli con la TI-92 ho impiegato mezzora. Naturalmente uno studente medio impiegherebbe più tempo: ma non molto di più se avesse a disposizione uno strumento che lo aiutasse nei calcoli e nell'analisi dei grafici. È auspicabile che il tradizionale studio di funzioni venga ridimensionato come forma di valutazione. Uno studente che conosce i concetti fondamentali del calcolo è in grado, utilizzando una calcolatrice grafica, di esplorare il grafico e di analizzare rapidamente le caratteristiche essenziali di una funzione. Uno studente che non conosce la matematica non sarebbe comunque avvantaggiato nella risoluzione dei problemi, perché non saprebbe quali strumenti utilizzare. Cinque ore sono troppe.