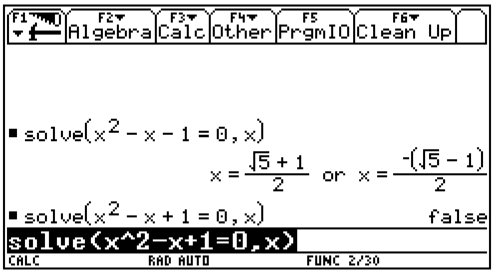
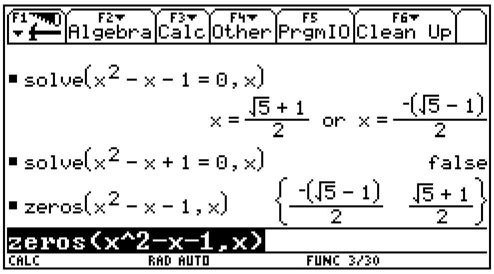
Equazioni di secondo grado

Michele Impedovo

Utilizzando la TI-92 e in particolare le possibilità che essa consente di operare su equazioni, proviamo a risolvere equazioni di secondo grado. Naturalmente la TI-92 possiede il comando solve per la risoluzione di equazioni.



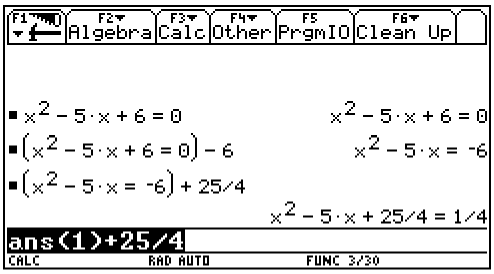
Si osservi l'attenzione alla struttura: se si interpreta l'equazione come una proposizione logica (aperta) le soluzioni vengono fornite nello stesso formato, come proposizione logica: x=… **or** x=…; se l'equazione non ammette soluzioni viene restituita la proposizione logica false.
Il comando zeros invece agisce su un'espressione (non su un'equazione) e restituisce un insieme, l'insieme delle soluzioni reali.



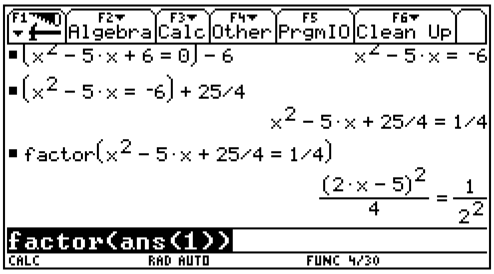
Per ora non vogliamo usare direttamente il comando solve, ma (come abbiamo fatto per le equazioni lineari) operare sulla equazioni.
A differenza delle equazioni lineari, in cui tutte le operazioni necessarie per arrivare alla soluzione x=… sono reversibili, sulle equazioni di secondo grado dobbiamo eseguire operazioni *irreversibili*. Vediamo perché.
Per risolvere l'equazione

$$x^2–5x+6 = 0$$

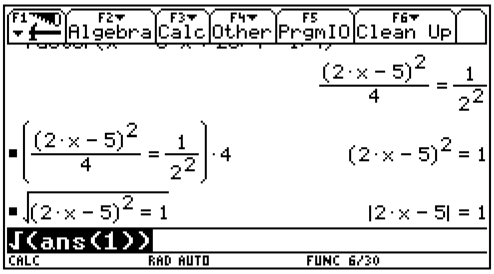
ricorriamo al classico metodo di *completamento del quadrato*: trasformiamo l'espressione a primo membro in modo di avere il quadrato di un binomio in x.



Il primo membro è il quadrato di (x–5/2).



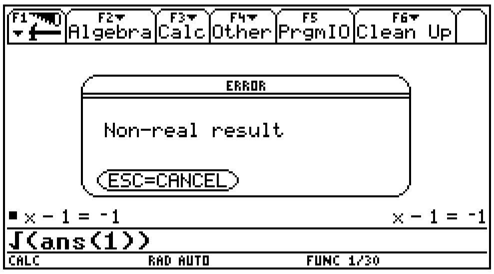
Moltiplicando per 4 si ottiene l'equazione $(2x–5)^2 =1$. Entrambi i membri sono non negativi: possiamo estrarre la radice quadrata: ecco l'operazione non reversibile.



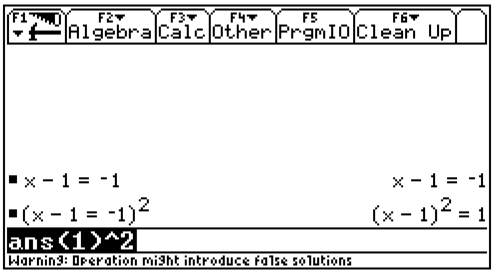
Si ottiene l'equazione $|2x–5| = 1$, equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{5}{2} \\ 2x-5=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \dfrac{5}{2} \\ -2x+5=1 \end{cases}$$

che ammettono come soluzioni $x = 2$ o $x = 3$.
Tradizionalmente si passa dall'equazione $(2x–5)^2 = 1$ alla *scrittura*
$2x–5 = \pm1$.
La scrittura ±1 può ingenerare misconcezioni negli alunni più deboli, e in può essere abbandonata, almeno in una prima fase; si tratta in definitiva di una inopportunità didattica, commessa in nome di una *economicità* che sacrifica alla rapidità di scrittura la comprensione e la trasparenza delle operazioni.
L'operazione di estrazione di radice in **R** non è in generale reversibile: per esempio l'equazione
$x–1 = –1$
(che ammette come soluzione $x = 0$) *perde* una soluzione quando si estragga la radice ad entrambi i membri.

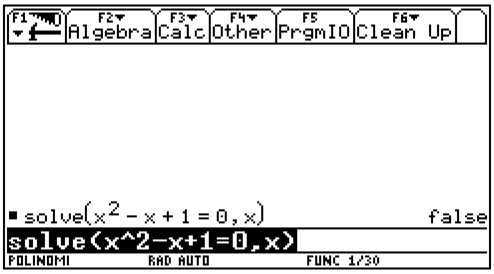


Viceversa elevando al quadrato entrambi i membri di un'equazione è possibile che si *acquistino* soluzioni da scartare. Elevando al quadrato la precedente equazione si ottiene un'equazione che ammette anche la soluzione x=2, che non è soluzione dell'equazione di partenza.

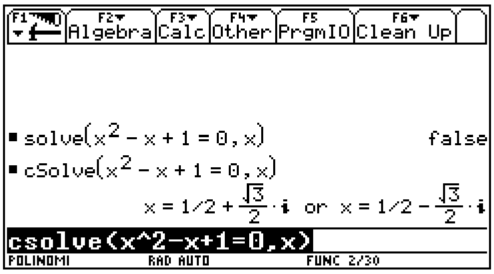


In questo caso la TI-92, correttamente, ci dà un avvertimento: *Warning: Operation might introduce false solutions*.
Nel caso delle equazioni di secondo grado, utilizzando il completamento del quadrato, non c'è rischio di aggiungere o togliere soluzioni: se, applicando il metodo del completamento del quadrato, il secondo membro è negativo (ciò accade se e solo se l'equazione non ammette soluzioni reali) l'estrazione di radice quadrata segnala errore. In caso contrario l'estrazione di radice quadrata conduce a due equazioni lineari distinte.

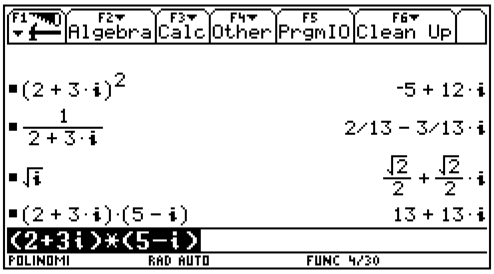
Un possibile ampliamento del tema porta a occuparsi anche delle soluzioni complesse. Il comando solve cerca soltanto soluzioni reali.



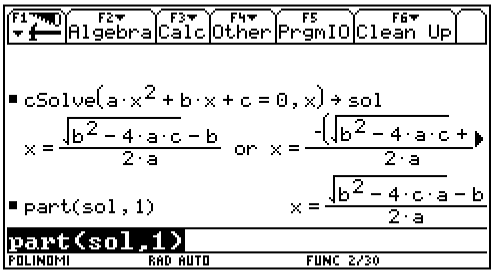
Utilizziamo ora il comando csolve.

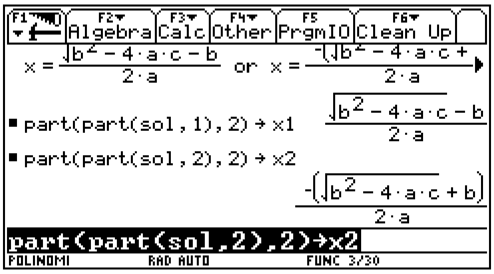


L’equazione viene ora risolta nel campo **C** dei numeri complessi.
La TI-92 opera con numeri complessi in forma simbolica.

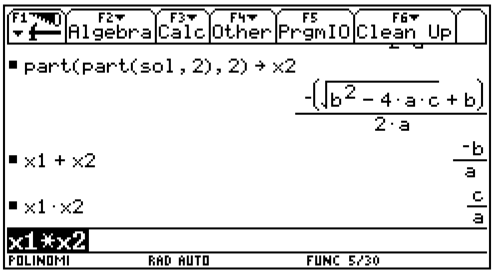


È interessante notare che le soluzioni di un’equazione di secondo grado, se non sono reali, sono sempre una coppia di numeri complessi con la stessa parte reale e parti immaginarie opposte, cioè due numeri complessi *coniugati*.
La conseguenza è che sia la somma sia il prodotto delle due soluzioni sono sempre numeri reali, anche quando le soluzioni sono complesse.
Memorizziamo nella variabile sol le soluzioni dell’equazione generica di secondo grado, e isoliamo ciascuna delle due soluzioni mediante la funzione predefinita part.





Possiamo così dimostrare che la somma e il prodotto delle soluzioni sono uguali rispettivamente a $-b/a$ e c/a.



La fattorizzazione di un polinomio viene quindi riferita al campo dei coefficienti. Con la TI-92 si può fattorizzare in **Q**[x], in **R**[x], in **C**[x].
Ecco per esempio la fattorizzazione di x^4-9 e le diverse sintassi.