MOTI PIANI ED EQUAZIONI PARAMETRICHE

Michele Impedovo

michele.impedovo@uni-bocconi.it

Non insegnate agli studenti ciò che essi
potrebbero scoprire da soli
H. Freudenthal

1. Perché le equazioni parametriche

Un punto si muove nel piano cartesiano. Ad ogni istante t (per esempio misurato in secondi) la sua ascissa x e la sua ordinata y (per esempio misurate in metri) sono espresse, in funzione del tempo t, dalle funzioni $x(t)$ e $y(t)$:

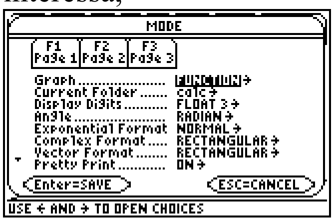
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

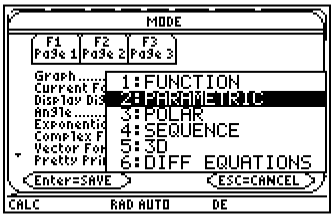
Questo semplice modello risulta, dal punto di vista didattico, assai remunerativo perché permette di affrontare dal punto di vista concettuale e dal punto di vista operativo diversi oggetti:

- il vettore bidimensionale;
- il legame tra coordinate cartesiane e coordinate polari;
- la linearità (o la non linearità) di una funzione;
- il ruolo di coseno e il seno di un angolo per individuare la direzione del moto;
- la velocità e l'accelerazione istantanea, e quindi un primo approccio al calcolo infinitesimale.

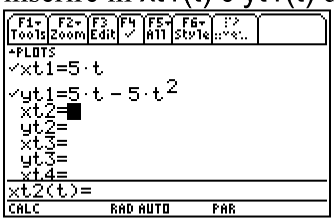
Inoltre, poiché lo studente può subito confrontare le proprie ipotesi con i risultati sulla calcolatrice, l'apprendimento risulta efficace e (almeno per certi aspetti) divertente.

Con la calcolatrice è possibile impostare con Mode, Graph, Parametric la modalità grafica che ci interessa,

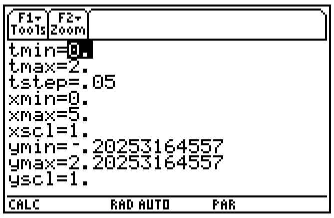




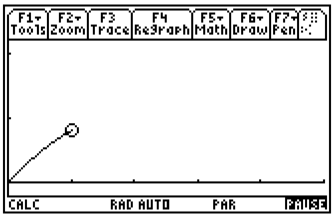
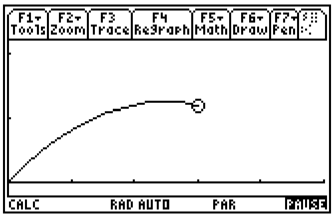
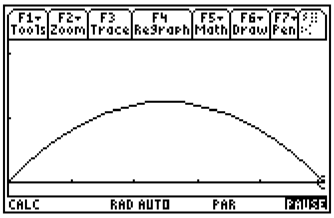
inserire in xt1(t) e yt1(t) due funzioni,



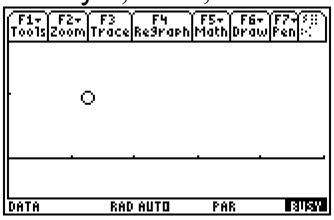
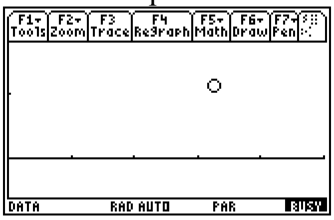
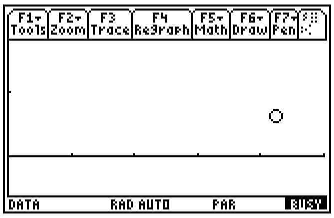
impostare in Window la finestra grafica (supponiamo che la posizione iniziale corrisponda al valore $t = 0$),



e osservare il moto che ne risulta:

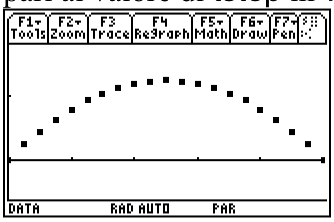
  

Per simulare il moto di una pallina che lascia dietro di sé la traiettoria abbiamo scelto, da Y=Editor, F6 Style, Path, mentre con Animate la pallina non traccia la traiettoria.

Le scelte in Window sono importanti: posto tmin=0, tmax rappresenta la durata del moto: viene calcolata la posizione del punto nell'intervallo di tempo [tmin, tmax] con passo tstep. Nell'esempio sopra riportato, viene raffigurato un moto parabolico: all'istante 0 parte dall'origine, dura 2 s, e la posizione è calcolata ogni 5 centesimi di secondo. Aumentando il valore di tstep si ottengono visualizzazioni più rapide ma meno precise del moto.

Se invece si imposta Y=Editor, F6, Square si ottiene un grafico della traiettoria per punti, una sorta di "foto stroboscopica" del moto, in cui la posizione è fissata a intervalli regolari di tempo pari al valore di tstep in Window (nel nostro caso ogni 5 centesimi di secondo).



Si osserva che i punti non sono equidistanti, e si ha quindi una prima percezione della variazione di velocità durante il moto.

Si osservi infine che la visualizzazione *metrica* del moto risulta corretta se il riferimento cartesiano è monometrico (altrimenti i cerchi si mutano in ellissi). È sufficiente, una volta impostati xmin, xmax, ymin, ymax, premere F2, 5: ZoomSqr.

È possibile definire e tracciare fino a 99 equazioni parametriche.

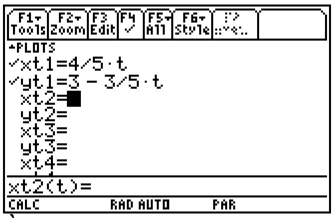
2. Equazioni parametriche della retta e moto rettilineo uniforme

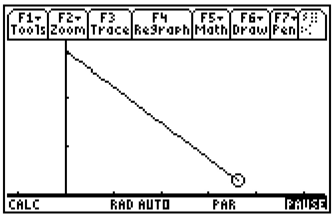
Una volta illustrate le caratteristiche fondamentali dell'ambiente Parametric, partiamo subito in classe con un lavoro di gruppo. Fissati sul piano cartesiano due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e un intervallo di tempo Δt, quali sono le equazioni di un moto rettilineo uniforme che parta da A all'istante t=0 e arrivi in B dopo Δt secondi?

Si tratta di un problema non banale, che coinvolge diversi registri di apprendimento; gli studenti arrivano ben presto a comprendere che la struttura delle funzioni è quella tipicamente lineare:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$$

con tmin=0 e tmax=Δt, ma si scontrano con il problema centrale: quale valore assumono le costanti a e b? Come utilizzare le coordinate di B, non ancora sfruttate? Quasi tutti gli studenti vanno allora per tentativi, e scoprono immediatamente che le costanti a e b decidono al tempo stesso la direzione e la velocità costante del moto; il vettore $[a, b]$ è il **vettore velocità** del moto: $a = \dfrac{x_2 - x_1}{\Delta t}$, $b = \dfrac{y_2 - y_1}{\Delta t}$. Ecco per esempio il moto rettilineo uniforme da $A(0,3)$ a $B(4,0)$ in 5 secondi:





È facile ora porre altri problemi, che conducono in modo naturale al problema di *spiegare* come il vettore $[a, b]$ determini la direzione α e le velocità v del moto:

- se $[a, b] = [4, -2]$ qual è la direzione del moto?
- quanto valgono a e b se la direzione del moto è di 60° e se la velocità è di 3 m/s?

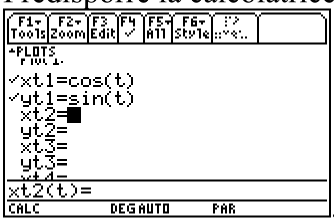
Un approccio sperimentale, per ora, è più che sufficiente. La *direzione* può essere determinata mediante un angolo compreso tra −180° e +180°: 90° è la direzione Nord, 0° è la direzione Est, e così via.

Secondo me la terminologia "moto rettilineo uniforme" non mette sufficientemente in luce il fatto centrale, che è squisitamente vettoriale: si tratta dell'unico moto in cui il **vettore velocità** rimane costante nel tempo.

3. Equazioni parametriche della circonferenza e moto circolare uniforme

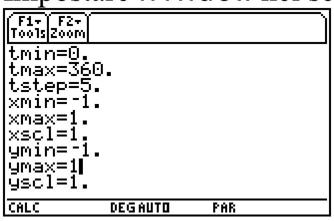
La definizione di coseno e seno di un angolo è una tappa fondamentale e irrinunciabile della preparazione scientifica. Perché non darne una definizione *cinematica*? Quello che segue è una proposta di percorso didattico per gli studenti; inizialmente gli angoli sono misurati in gradi.

Predisporre la calcolatrice in *deg*. Inserire cos(t) in `xt1(t)` e sin(t) in `yt1(t)`:

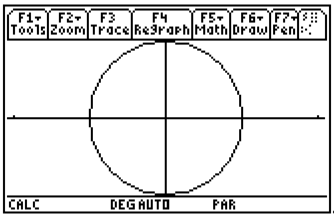


.

Impostare `Window` nel seguente modo:

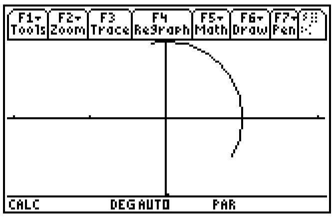


e premere `F2`, `ZoomSqr`. Dovrebbe apparire la seguente schermata:



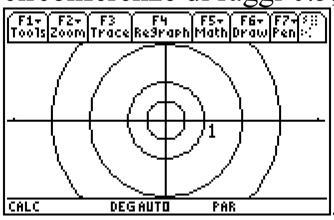
.

Come mai? Semplice: mentre il parametro *t* assume tutti i valori da 0 a 360°, cos(*t*) e sin(*t*) sono proprio (per definizione) l'ascissa *x* e l'ordinata *y* del punto di coordinate polari (1, *t*), cioè del punto di modulo 1 e coordinata angolare *t*. Quindi al variare di *t* viene percorsa la *circonferenza goniometrica*, cioè la circonferenza di centro (0,0) e raggio 1. Per rendersene conto, modificare `tmin` e `tmax` in `Window`, per esempio –30→`tmin`, 100→`tmax`.



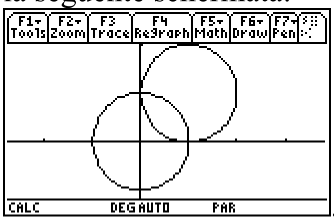
Domanda: Come si può fare a percorrere la circonferenza in <u>verso orario</u>? Non si può mettere 360 in `tmin` e 0 in `tmax`, perché viene segnalato errore. Provare a sostituire *t* con –*t* nelle equazioni.

2. Ora vogliamo cambiare il raggio della circonferenza: come fare? È sufficiente ricordarsi che per modificare il modulo del vettore [*x*,*y*] è sufficiente moltiplicarlo per una costante opportuna (2, per raddoppiarlo). Cercare dunque di ottenere la seguente schermata, dove sono raffigurate le circonferenze di raggi 0.5, 1, 2, 3.



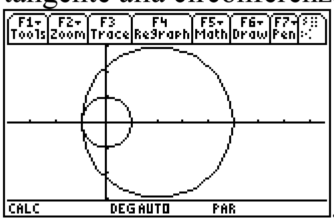
.

3. Ora vogliamo tracciare una circonferenza con centro in (1,1) anziché in (0,0): cercate di ottenere la seguente schermata:



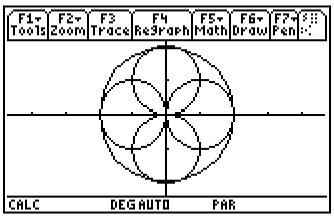
.

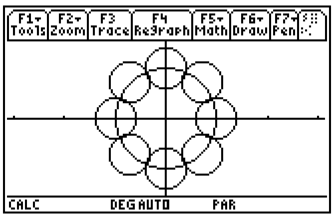
4. Ora mettiamo insieme i punti 2 e 3: tracciamo la circonferenza che ha centro in (2,0) ed è tangente alla circonferenza goniometrica.

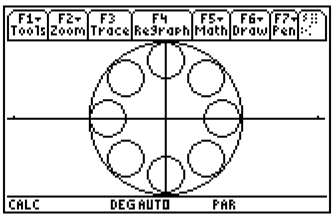


.

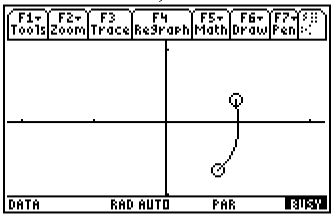
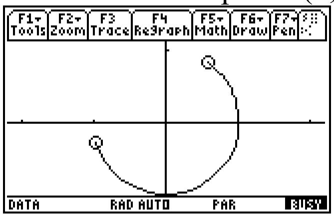
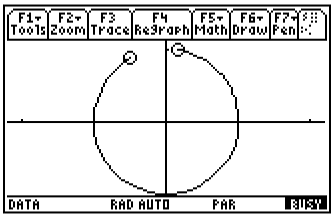
5. Cercate di ottenere le seguenti schermate.







6. Come si può fare per modificare il punto di partenza all'istante t=0? Definite un moto che percorra in verso <u>orario</u> la circonferenza di centro (1,1) e raggio $\sqrt{2}$ la cui posizione all'istante t=0 sia nell'origine.
7. Come si può fare per modificare la velocità del moto? Definite due moti circolari uniformi sulla circonferenza goniometrica: entrambi partono da (1,0), il primo in verso antiorario e il secondo in verso orario; fate in modo che si scontrino nel punto (0,1).

8. Passiamo ora a misurare gli angoli in radianti. Il moto circolare uniforme

$$\begin{cases} x = \cos(\omega t) \\ y = \sin(\omega t) \end{cases}$$

percorre la circonferenza goniometrica con velocità angolare ω=1 rad/s. Definite un moto circolare uniforme che compia un giro di circonferenza in 3 s e un altro in 0.5 s.
8. Simulate il moto delle lancette dell'orologio.

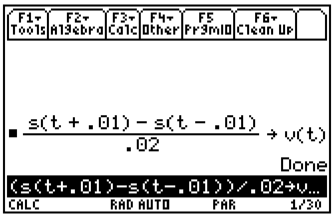
È possibile ora analizzare il moto dal punto di vista della velocità; il vettore velocità non è costante: come varia? Consideriamo il moto

$$\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \sin(2t) \end{cases}$$

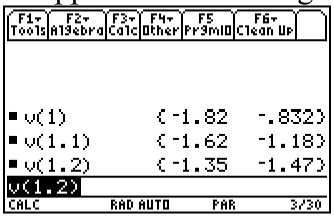
nell'istante t=1 s. Il vettore posizione è $\mathbf{s}$ =[cos(1), sin(1)] ≈ [–0.416, 0.909]: poiché il periodo del moto è $T=2\pi/\omega \approx 3.14$ s, dopo 1 s il punto ha coordinata angolare 2 rad ≈ 115° e si trova in effetti nel 2° quadrante. Per approssimare il vettore velocità, consideriamo la posizione agli istanti t_1 = 0.99 e t_2 = 1.01:
$\mathbf{s}(0.99) = \mathbf{s}_1 \approx [-0.398, 0.917]$
$\mathbf{s}(1.01) = \mathbf{s}_2 \approx [-0.434, 0.901]$.
In Δt=0.02 s il punto si è spostato da $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$, e il vettore velocità è approssimato da
$\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{\Delta t} \approx [-1.82, -0.832]$.
Come ci aspettavamo osservando il moto nel secondo quadrante, sia la velocità orizzontale sia quella verticale sono negative. Se proviamo a calcolare il modulo di $\mathbf{v}$ otteniamo
$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1.82)^2 + (-0.832)^2} \approx 2$ m/s.
È un risultato atteso, dato che la velocità del moto è $\|\mathbf{v}\| = \omega r$.

Possiamo analizzare (sempre numericamente) anche l'accelerazione: utilizziamo ora la calcolatrice in modo più raffinato. Definiamo la funzione $\mathbf{s}(t)$:

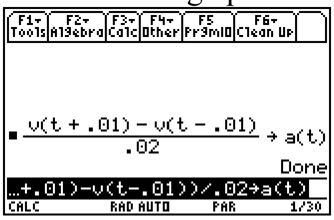
e la funzione $\mathbf{v}(t, h)$ sfruttando $\mathbf{s}(t)$:

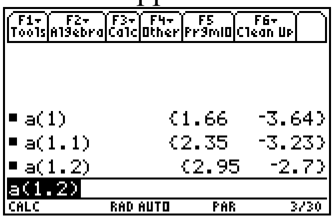


La funzione **v**(t) fornisce un'approssimazione del vettore velocità all'istante t, calcolando il rapporto incrementale simmetrico di **s**(t) in un intervallo di 2 centesimi di secondo (naturalmente per un'approssimazione migliore si possono utilizzare intervalli di tempo di ampiezza minore).

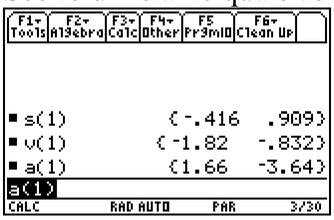


In modo analogo possiamo definire un'approssimazione della accelerazione con la funzione **a**(t).





Scelto un istante qualsiasi, possiamo ora confrontare i tre vettori **s**(t), **v**(t), **a**(t).



Le attività che possono nascere a questo punto sono diverse, limitate solo dalla fantasia dell'insegnante (e dello studente). Si può per esempio verificare che in un moto circolare uniforme:

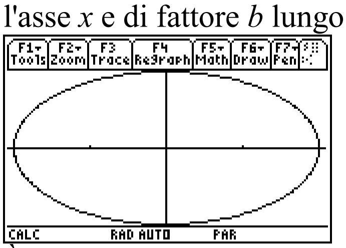
- il modulo dell'accelerazione è costante, e uguale a v^2/r;
- il vettore **s** e il vettore **v** sono tra loro perpendicolari ad ogni istante;
- il vettore **a** ha la stessa direzione e verso opposto del vettore **s**.

4. Dilatazioni: dal cerchio all'ellisse

Consideriamo ora l'equazione

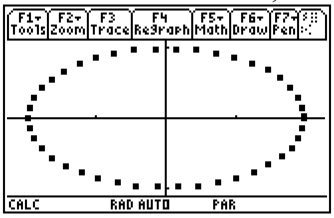
$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}$$

dove a e b sono costanti positive distinte. Poiché abbiamo operato una dilatazione di fattore a lungo l'asse x e di fattore b lungo l'asse y otteniamo un'ellisse di semiassi a e b.



È un lavoro di sicuro interesse analizzare questo moto (che non è più uniforme) e confrontarlo con i moti circolari uniformi di raggi a e b: il modulo della velocità oscilla tra a e b ed è minimo o massimo nei vertici dell'ellisse. L'accelerazione è ancora centripeta, anzi, risulta esattamente **a**(t) = –**s**(t).

La "foto stroboscopica" del moto, in cui la posizione è fissata a intervalli di tempo pari a 15 centesimi di secondo, è la seguente:



Il fatto che i punti siano più vicini in corrispondenza dei vertici sull'asse maggiore suggerisce che la velocità è minima in tali vertici e massima negli altri.

5. I moti parabolici

Confrontiamo ora il moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}$$

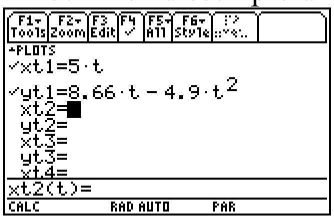
(che parte dall'origine e ha vettore velocità costante **v** = [a, b]) con il moto

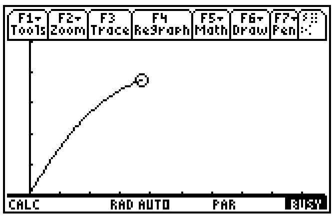
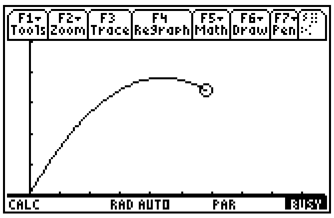
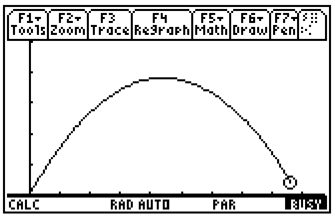
$$\begin{cases} x = at \\ y = bt - ct^2 \end{cases}$$

dove a, b, c sono costanti positive. Si tratta di un moto parabolico: la velocità orizzontale rimane costante, la velocità verticale inizialmente vale b e decresce linearmente con pendenza $2c$: ad ogni secondo la velocità diminuisce di 2 m/s. Se interpretiamo tale moto come un moto parabolico sulla superficie terrestre (in assenza di attrito l'accelerazione di gravità è costante: $g \approx 9.8$ m/s^2) con velocità iniziale v_0 e angolo di tiro α, le costanti a, b, c valgono:

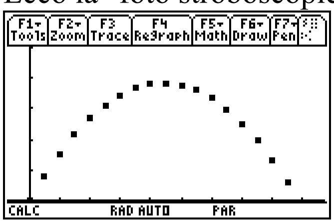
$a = v_0 \cos(\alpha)$
$b = v_0 \sin(\alpha)$
$c = 4.9$ m/s^2

Tracciamo ad esempio un moto parabolico con α=60°, v_0 = 10 m/s.



Ecco la "foto stroboscopica" del moto, in cui la posizione è fissata ad ogni decimo di secondo:

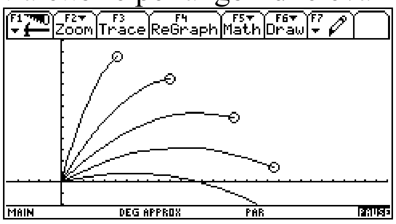


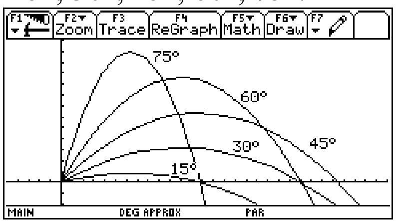
Il fatto che i punti siano più vicini in corrispondenza del vertice della parabola suggerisce che la velocità è minima nel vertice (c'è solo la velocità orizzontale).

Un esempio di attività potrebbe essere il seguente.
Un punto si muove di moto parabolico con $v_0 = 14$ m/s e $\alpha = 45°$.

a) Calcolare la gittata, il tempo di volo e l'altezza massima.
b) Calcolare dove si trova nell'istante $t = 1$ s.
c) Calcolare la velocità orizzontale, la velocità verticale e il modulo della velocità all'istante $t = 1$ s.
d) Calcolare la direzione del vettore velocità nell'istante $t = 1$ s.
f) Tracciare un grafico della velocità orizzontale rispetto al tempo.
g) Tracciare un grafico della velocità verticale rispetto al tempo.
h) Tracciare un grafico della velocità rispetto al tempo.
i) Stabilire in quale istante la velocità verticale è 12 m/s.
l) Stabilire in quale istante si trova ad altezza pari alla metà dell'altezza massima.
m) A quale velocità iniziale occorre lanciare affinché la gittata raddoppi?
n) A quale velocità iniziale occorre lanciare affinché l'altezza massima raddoppi?
o) A quale velocità iniziale occorre lanciare affinché il tempo di volo raddoppi?

È possibile visualizzare il fatto che la gittata massima si ha per 45°, e che angoli di elevazione complementari hanno la stessa gittata. Ecco per esempio, con velocità iniziale sempre di 50 m/s, le traiettorie per angoli di elevazione di 15°, 30°, 45°, 60°, 75°.

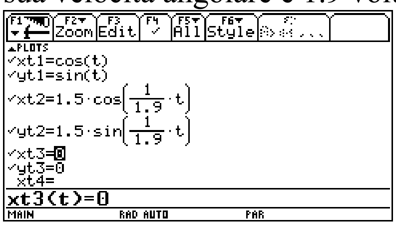


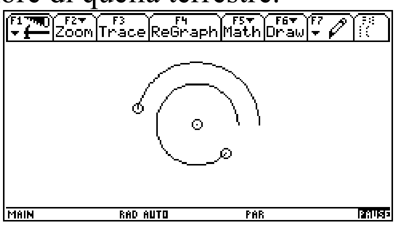


Un problema interessante consiste nello stabilire, dato un bersaglio posto nel punto (x_B, y_B), quale angolo di tiro e quale velocità iniziale consentono di colpire il bersaglio. Così formulato il problema ammette infinite soluzioni: la soluzione è unica invece se si richiede la <u>minima</u> velocità iniziale. Per questo problema vedi l'articolo *Colpire il bersaglio* su IPOTESI, , anno 1 n° 1, settembre 1998, oppure al sito www.matematica.it/impedovo.

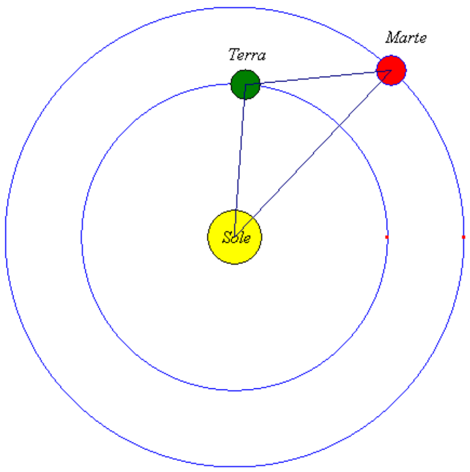
6. Composizione di moti

Un problema molto interessante, anche storicamente, è quello di capire il moto dei pianeti del Sistema Solare rispetto ad un osservatore sulla Terra. Rispetto ad un osservatore solidale con il Sole i moti appaiono semplici: in prima approssimazione sono moti circolari (ellittici ma con eccentricità trascurabile), uniformi (se trascuriamo le piccole variazioni di velocità) e concentrici. Tutt'altro che semplice è invece il moto visto da un osservatore sulla Terra.
Cominciamo a simulare il moto della Terra e di Marte rispetto ad un osservatore sul Sole, sapendo che Marte dista dal Sole circa 1.5 U.A., e che il suo periodo di rivoluzione è circa 1.9 anni, quindi la sua velocità angolare è 1.9 volte minore di quella terrestre.

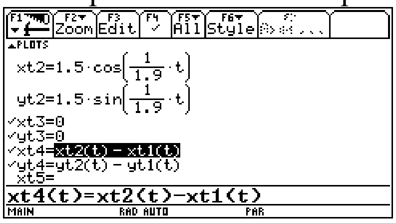




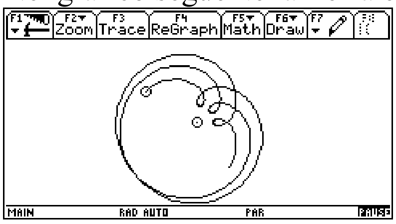
Ma cosa vediamo dalla Terra? Qual è il moto di Marte proiettato sulla volta celeste?



Per saperlo è sufficiente calcolare le componenti del vettore Terra-Marte, mediante la differenza tra le componenti di Marte e quelle della Terra rispetto al Sole.

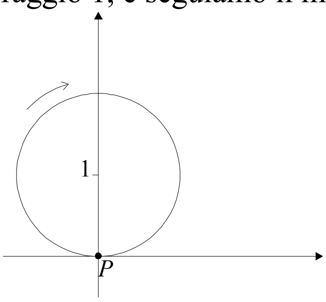


Nel grafico seguente la Terra è ferma al centro.



Si tratta di un moto periodico non facile da prevedere; gli *anelli* costituiscono il cosiddetto *moto retrogrado* del pianeta, che normalmente avanza da ovest a est sulla sfera celeste, e a intervalli regolari rallenta e inverte il moto. Tolomeo riuscì, mediante gli *epicicli*, a dare una descrizione di tali moti.

La **cicloide** è la traiettoria seguita da un punto P che si muove su una circonferenza che a sua volta rotola su un piano. Supponiamo che la circonferenza abbia inizialmente centro nel punto (0,1) e raggio 1, e seguiamo il moto del punto P inizialmente nell'origine.



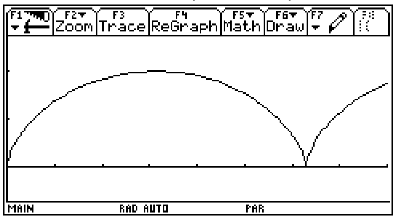
Con riferimento alla figura, si tratta di sommare due moti: il primo è circolare uniforme intorno al punto (0,1), con raggio 1; l'altro rettilineo uniforme nella direzione dell'asse x, con velocità lineare uguale alla velocità angolare (ovviamente misurata in rad/s).

Moto circolare uniforme: $\left[\cos\left(-t-\frac{\pi}{2}\right), 1+\sin\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Moto rettilineo uniforme: $[t, 0]$.

Le equazioni parametriche della cicloide sono quindi

$$\mathbf{s}(t) = \left[t + \cos\left(-t - \frac{\pi}{2} \right), 1 + \sin\left(-t - \frac{\pi}{2} \right) \right] = [t - \sin(t),\ 1 - \cos(t)]$$



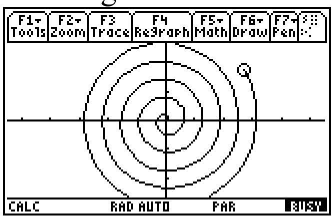
Un altro moto interessante è quello di un punto che si muove di moto uniforme lungo una semiretta la quale a sua volta ruota uniformemente intorno alla propria origine.
Partendo dall'equazione del moto circolare

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases}$$

possiamo imporre che il raggio della traiettoria non sia costante ma cresca linearmente con t, per esempio

$$\begin{cases} x = t\cos(t) \\ y = t\sin(t) \end{cases}$$

Ecco il grafico del moto nella finestra grafica $[-50, 50]\times[-25, 25]$.



7. L'esame di maturità 1993

Nel 1993 (è l'unico caso registrato dagli annali) il tema 3 del testo d'esame di matematica alla maturità scientifica suonava così:

Sia

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

Esprimere y in funzione di x e rappresentare tale funzione che si presenta sotto la forma y=±f(x). Individuare simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile soluzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$*).*

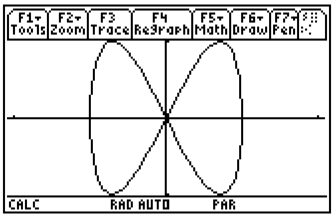
È un vero peccato che un'idea così originale sia stata buttata alle ortiche con la richiesta di trasformare l'equazione parametrica in cartesiana. E lasciamo stare l'imperdonabile errore

"… funzione che si presenta nella forma $y = \pm f(x)$ …";

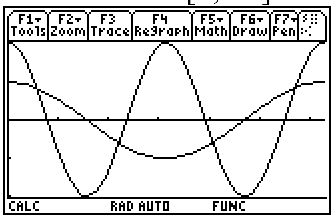
tralasciamo anche qualunque commento al perverso suggerimento

"L'integrale proposto è di facile soluzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$".

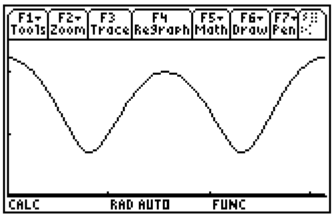
L'idea era interessante: uno studente con la TI-89 potrebbe sviluppare un tema articolato, analizzando sia la traiettoria, che è un simpatico farfallino:



sia il vettore velocità, analizzando separatamente le componenti orizzontale e verticale sull'intervallo $[0, 2\pi]$:



e il modulo della velocità nell'intervallo $[0, \pi]$:



Ma all'esame, come è noto, non è consentita la calcolatrice grafica …