I nuovi strumenti modificano l'insegnamento della matematica

Lettera Matematica P.RI.ST.EM n° 23, marzo 1997

Michele Impedovo

Il prepotente avvento degli strumenti automatici di calcolo, dei programmi di manipolazione simbolica come DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA, genericamente indicati con il termine *Computer Algebra Systems* (CAS), e infine della nuova TI92 della Texas Instruments hanno più volte richiamato l'attenzione dei matematici su un tema che potrebbe essere così sintetizzato:

In quale modo questi strumenti modificano
l'insegnamento e l'immagine della matematica?

Confesso innanzitutto di essere un drogato tecnologico: ho cominciato a programmare nel 1979 durante il corso di Matematiche Complementari (tenuto allora da Modesto Dedò), con la gloriosa TI57: una macchinetta dotata di 50 (cinquanta!) passi di programma. Con quel giocattolo abbiamo fatto programmi estremi, riducendo a 50 istruzioni algoritmi allora inesplorati per noi studenti (come la fattorizzazione) e oggi divenuti classici. Dopo di allora ho seguito da vicino l'evolversi del software che in qualche modo avesse a che fare con la matematica: prima il BASIC e poi i linguaggi strutturati come il TURBO-PASCAL, il programma CARTESIO e le prime trasformazioni geometriche, i fogli elettronici, CABRI, MICROCALC e infine i programmi di manipolazione simbolica: prima DERIVE e poi MAPLE, di cui sono un accanito ed irriducibile estimatore. Senza MAPLE, lo confesso, sarei un uomo finito.

Ora è uscita la TI92, della Texas Instruments: è una "calcolatrice" (è un mostro) che nelle dimensioni di un portafoglio da signora ha implementati:
1) Una versione ben più ricca di DERIVE
2) Un editor di funzioni
3) Una finestra grafica
4) Un ambiente di tabulazione delle funzioni
5) Un foglio elettronico dotato di tutte le funzioni statistiche, con fit su una curva a scelta
6) Un linguaggio di programmazione strutturato (vicino al Pascal)
7) La versione II di CABRI
8) Un Text editor per immettere testi e per registrare sessioni di lavoro
Inoltre tutti gli ambienti sono compatibili e interattivi: ogni oggetto definito in un ambiente ha piena e immediata funzionalità in un altro.
Questa macchina potrebbe mutare in poco tempo i paradigmi tradizionali dell'insegnamento della matematica. Così come l'algoritmo di Bombelli per l'estrazione della radice quadrata (che ho imparato in quinta elementare!) è stato rapidamente dimenticato con l'avvento delle calcolatrici tascabili, così come le tavole dei logaritmi sono diventate obsolete con l'avvento delle calcolatrici scientifiche, la stessa cosa potrebbe accadere per i sofisticati e ingegnosissimi (ma ahimé limitati) artifici per la fattorizzazione di un polinomio, per la ricerca di una primitiva o per la risoluzione di equazioni differenziali.

Molte questioni sulle quali era ancora possibile scantonare sono ora improcrastinabili:
- Si può fare a meno della tecnologia nell'insegnamento della matematica?
- È sensato vietare l'uso di strumenti automatici di calcolo agli esami?
- Ha ancora senso trasmettere contenuti matematici destinati a diventare obsoleti (per esempio lo studio di funzioni assai complicate)?

- Ha ancora senso dare agli studenti esercizi (esempio: equazioni, disequazioni) che si possono risolvere (in forma simbolica!) con la TI92?
- Quale matematica dobbiamo presentare nei corsi di Istituzioni di Matematica per la laurea in Biologia, Chimica, ecc.? È ancora l'Analisi la reginetta delle matematiche?
- Qual è il destino della matematica nelle scuole medie superiori? Arrancherà faticosamente dietro ogni innovazione tecnologica oppure saprà sfruttare le nuove tecnologie per arricchire e migliorare l'apprendimento?
- Può essere che tra vent'anni non si insegnerà più matematica nelle scuole? Che se ne chiederà l'abolizione, come per il Greco e il Latino? Esisterà ancora un Dipartimento di matematica? Non può succedere che i matematici verranno considerati inutili, e rapidamente dimenticati, anzi ricordati solo per l'angoscia che la matematica ha trasmesso a generazioni di studenti?

Insomma: abbiamo l'obbligo di ripensare al ruolo della matematica (meglio, dell'insegnamento della matematica). L'immagine che la matematica trasmette di sé soprattutto attraverso la scuola è quella di una disciplina che si avvita su se stessa, che autogiustifica i propri contenuti, che si esaurisce negli strumenti operativi e ne ignora sia il contesto storico che i problemi ad essi connessi, che non fornisce cultura, che non riesce più ad essere ciò che è sempre stata: uno strumento di conoscenza, un modo (uno dei tanti) di guardare il mondo e di capirlo.

Ebbene, in qualche modo le nuove tecnologie possono aiutarci ad avviare una riflessione positiva. Ormai il problema non è più:

SE

è giusto utilizzare il calcolatore o la TI92, ma

COME

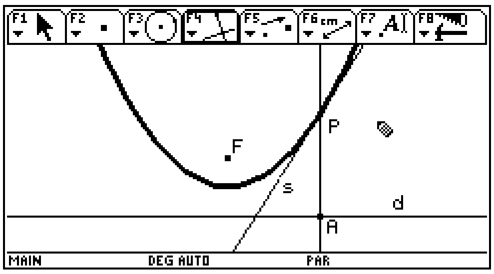
utilizzare gli strumenti automatici di calcolo nella didattica della matematica.

Rendere più efficace l'insegnamento

Provo ad elencare alcuni punti fermi, di cui già altri hanno detto e scritto.

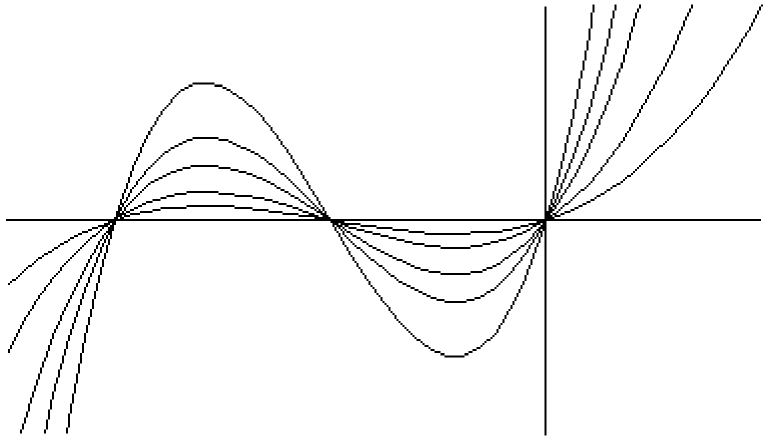
1. **La superlavagna**. La possibilità di utilizzare uno schermo grafico collegato ad un computer dà la possibilità all'insegnante di arricchire l'immagine degli oggetti che sta trattando nella mente degli allievi, e quindi di rendere più efficace il proprio insegnamento.

ESEMPIO 1. Il luogo dei punti equidistanti da un punto F e da una retta d è una parabola. Si traccia un punto A su d, la perpendicolare r per A a d, e l'asse s del segmento AF; il punto P d'intersezione tra r e s appartiene alla parabola; muovendo il punto A su d si genera la parabola. Con la Ti92:

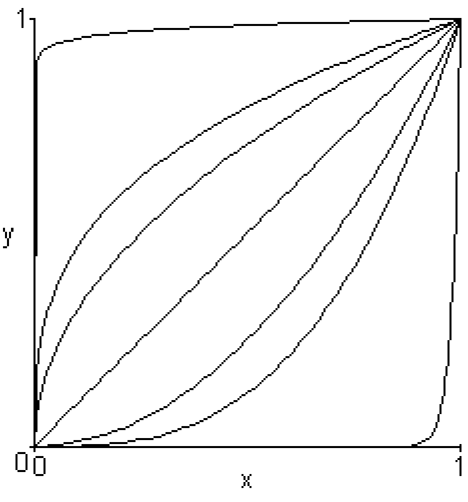


Questa è un'esperienza efficace per l'apprendimento. Si osservi anche che la retta s è la retta tangente alla parabola in P.

ESEMPIO 2. Tracciare il grafico di una funzione, cambiare la finestra di visualizzazione, ingrandire e rimpicciolire, dilatare lungo un asse: sono attività che rendono chiaro il legame tra il grafico e l'espressione analitica della funzione. Diventa facile (e rapido) spiegare come si ottiene dal grafico di $f(x)$ il grafico di $f(x)+k$, $f(x+k)$, $kf(x)$, $f(kx)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$, $1/f(x)$, ecc. Per esempio in poco tempo si tracciano i grafici di $kf(x)$ per diversi valori di k:



ESEMPIO 3. Tracciare $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt{x}$, x, x^2, x^3 nell'intervallo [0,1]; gli studenti (che sempre sono attratti dai casi estremi) provano subito a tracciare x^{50}, x^{100} e $x^{1/100}$, per vedere se il trucco funziona; in pochi minuti hanno appreso solidamente un concetto non banale.



2. **Recupero degli allievi più deboli**. La possibilità di affacciarsi ad argomenti più complessi senza aver completamente assimilato gli argomenti precedenti consente anche all'allievo più debole di dotarsi di un retroterra operativo in qualche modo solido. Per esempio, la possibilità di fattorizzare un polinomio rapidamente dà anche all'allievo più debole la possibilità di non rimanere definitivamente indietro nello studio delle funzioni polinomiali. Le difficoltà di calcolo possono non costituire più un abisso incolmabile; si può puntellare la mancata comprensione di passaggi operativi con uno strumento automatico, che in qualche modo fornisce fiducia nella propria capacità di dominare il problema.

3. **La matematica come scoperta**. Congetturare, mettere alla prova una ipotesi, fare molti tentativi, trovare controesempi: questa è sempre stata la matematica per i matematici.

ESEMPIO 1: approssimare il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_0. Si prende un punto della curva di ascissa x_1 "molto vicina" a x_0, e si calcola il coefficiente angolare della retta per questi due punti; al diminuire della distanza tra x_1 e x_0 ci si avvicina ad una buona approssimazione della pendenza della curva. Questo metodo si presta assai bene ad essere utilizzato con le funzioni polinomiali; per esempio, si vuole approssimare la pendenza di $f(x)=x^3-7x+2$ in $x=3$. Si può usare DERIVE:

f(x):= x^3-7x+2

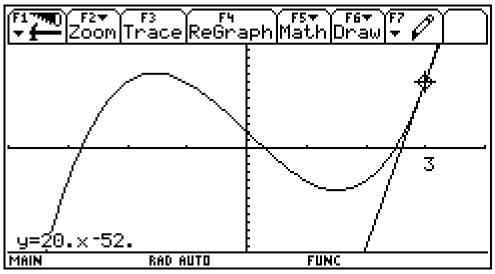
m(x,h):= $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

vector(m(3,10^(–n),n,1,5)=20.9100, 20.0901, 20.0090, 20.0009

Non occorre molta fantasia per congetturare che al tendere di h a 0 la pendenza di $f(x)$ in 3 tende a 20. In ogni caso tale congettura può essere dimostrata (ecco un'applicazione significativa del teorema di Ruffini): la retta tangente avrebbe equazione

$$y = 20(x-3)+f(3) = 20x-52;$$

in effetti la TI92 conferma il risultato:



Mettendo a sistema l'equazione di tale retta con $y=f(x)$ si ottiene l'equazione risultante

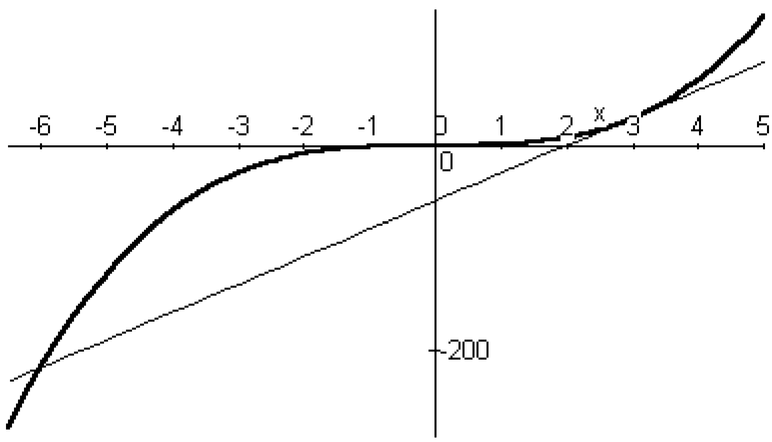
$$x^3-7x+2 = 20x-52$$
$$x^3-27x+54 = 0;$$

la congettura è esatta se il polinomio $x^3-27x+54$ ammette due zeri coincidenti per $x=3$, cioè se è divisibile per $(x-3)^2$. Con DERIVE:

remainder(x^3-27x+54,(x-3)^2) = 0

quotient(x^3-27x+54,(x-3)^2) = x+6

Si è **dimostrato** che 20 è la pendenza di $f(x)$ in 3, e si è trovato l'ulteriore punto di intersezione della retta tangente in $x=3$ con $f(x)$: è il punto di ascissa –6.

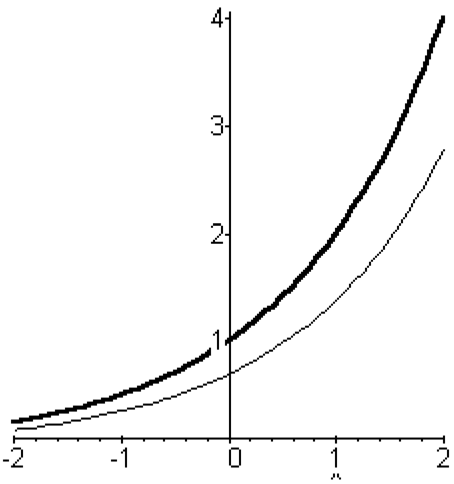


ESEMPIO 2. Si generalizza l'esperienza precedente: da $x=3$ si passa a x generico, e si definisce una approssimazione della "funzione pendenza" di $f(x)$:

m(x):= $\dfrac{f(x+0.001)}{0.001}$

Il grafico di tale funzione fornisce una parabola se $f(x)$ è una cubica, una retta se $f(x)$ è una parabola: quali congetture avanzare?

ESEMPIO 3. Una volta introdotta una nuova funzione (sin$x$, e^x, ln$x$) sarebbe buona norma occuparsi della derivata di tale funzione; non è necessario (anzi, è dannoso) aspettare i limiti e il calcolo infinitesimale canonico. Con DERIVE, attraverso congetture, prove ed errori, si può guidare lo studente lungo questo affascinante percorso. Per esempio, com'è la "funzione pendenza" di una funzione esponenziale? Prendiamo $f(x)=2^x$. Si tracciano i grafici di $f(x)$ e $m(x)$.

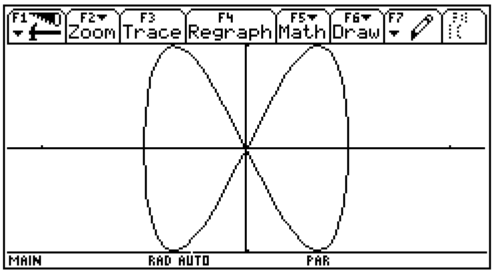


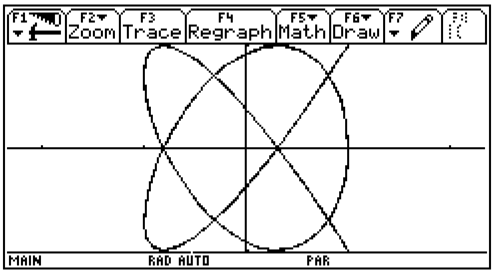
Che funzione potrebbe essere $m(x)$? Sembra anch'essa di tipo esponenziale, ma non passa per (0,1), passa per un punto del tipo (0,0.69). Forse è la traslata di 2^x, è 2^x–0.31; si prova, non funziona, interseca l'asse delle x. Forse allora è *dilatata* (di fattore 0.69) rispetto a 2^x? Sì, funziona, sembra lei. Proviamo con 3^x. Questa volta cambia il fattore di dilatazione, non è più 0.69, è 1.1; come mai? proviamo con 5^x, il fattore di dilatazione è circa 1.6: che numeri sono? Tracciamoli in un grafico: ma questa sembra la funzione logaritmica! Come mai per 2^x $m(x)$ è contratta e per 3^x $m(x)$ è dilatata? Esisterà un numero come base della funzione esponenziale per il quale $m(x)$ coincide con $f(x)$, cioè il fattore di dilatazione è 1? Sì, è il numero e.
In modo analogo: qual è la pendenza di y=ln(x)? Qui è tutto più semplice: calcolando $m(x)$ per vari valori di x, si ottiene con ottima approssimazione $m(x)=1/x$ (una funzione algebrica misura la pendenza di una funzione trascendente!).
Queste attività non sono pensabili senza calcolatore; quello che resta allo studente alla fine di questo percorso è non solo una conoscenza solida, ma un **metodo di lavoro**: in modo analogo si può operare con qualunque altra funzione. Inoltre l'approccio al concetto di limite, benché rozzo, risulta molto più efficace dell'approccio teorico.

Riassumendo: un insegnamento della matematica che sfrutti le nuove tecnologie è più efficace dell'insegnamento tradizionale. In un certo senso è anche più tranquillizzante per l'allievo, offre l'immagine di una matematica più serena: a patto di imparare un po' di sintassi (il che non guasta, in un curriculum di matematica), l'allievo può controllare i propri risultati. Inoltre (e questa è davvero una novità) il calcolatore è un giudice imparziale, diviene il terzo polo nella dinamica studente-insegnante: l'allievo ha uno strumento per controllare se quanto sta dicendo l'insegnante è vero. In qualche modo, l'insegnante perde parte del proprio potere, e questo è positivo, se egli non ha timore di dire "non lo so".
ESEMPIO. Come è fatta la curva di equazioni parametriche

$$[\cos(nt), \sin(mt)]$$

al variare di n, m in **N**? Non lo so, ci possiamo pensare insieme. Ecco due esempi, per le coppie (1,2), (4,5).





Cambiare i contenuti

Ma non c'è solo questo: non si tratta solo di insegnare in modo più efficace (e sarebbe già tantissimo). Si tratta di cambiare i contenuti che trasmettiamo, e anche la forma con i quali li trasmettiamo.

ESEMPIO 1. È indispensabile insegnare metodi raffinati per la ricerca della primitiva, per esempio l'integrazione per parti o l'integrazione delle razionali fratte? Il problema della ricerca della primitiva è ormai *banalizzato*: esiste un algoritmo (R. Risch, *The problem of integration in finite terms*, 1969) che in un numero finito di passi stabilisce se la primitiva di una funzione elementare è una funzione elementare (cioè esprimibile in termini finiti mediante funzioni algebriche, trigonometriche, esponenziali o logaritmiche), e in caso affermativo genera la primitiva stessa. Questo algoritmo è stato implementato all'interno dei programmi di manipolazione simbolica. Perché allora non limitarsi, in fase di approccio al problema, alla ricerca della primitiva per le funzioni più semplici, e ricorrere agli sviluppi in serie e alla integrazione numerica?

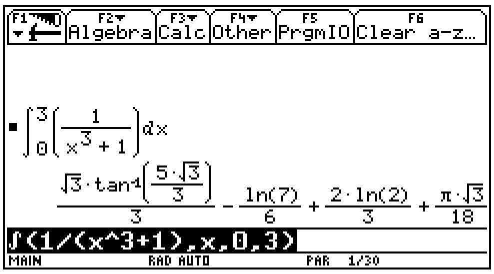
Supponiamo di voler calcolare

$$\int_0^3 \frac{1}{x^3+1}\,dx\,.$$

Con carta e penna il metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte ci fornisce (dopo una buona oretta di calcoli) il grazioso risultato

$$\frac{1}{3}\ln(4)-\frac{1}{6}\ln(7)+\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)+\frac{1}{18}\sqrt{3}\,\pi\,.$$

Con la TI92, in un secondo:



Il cosiddetto "risultato" non ci dà informazioni immediatamente spendibili: il suo <u>peso semantico</u> è certamente inferiore a quello dell'espressione iniziale $\int_0^3 \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

Forse è più significativo approssimare il risultato. Con DERIVE:

```
f(x):=1/(x^3+1)
area(a,b,n):=sum(f(a+k*(b-a)/n)*(b-a)/n,k,0,n-1)
area(0,3,10)    = 1.29876
area(0,3,100)  = 1.16891
area(0,3,1000)= 1.15589
```

Il risultato esatto alla quinta cifra decimale è 1.15444. Come si vede anche il rozzo metodo di integrazione numerica utilizzato per la funzione *area* (il metodo dei rettangoli) è relativamente efficiente, e si può comunque migliorare (come? quanto?).
Non è difficile ora procedere a "esperimenti": per esempio, quanto vale l'area sottesa dalla funzione

$$f(x)=1/x$$

tra 1 e t? Con DERIVE:

```
f(x):=1/x
s(x):=if(x<0.1,1,area(1,x,100)
```

Se si "plotta" s(x) si ottiene con ottima approssimazione la funzione logaritmica (una funzione trascendente misura l'area sottesa da una funzione algebrica!).
ESEMPIO 2. Per decenni, prima dell'avvento delle calcolatrici, si è fatta la trigonometria privilegiando gli angoli per i quali il seno e il coseno fossero esprimibili per radicali (quadratici); in definitiva si è fatta la trigonometria con gli unici angoli per i quali essa non serve: è sufficiente la geometria elementare. Gli studenti hanno quindi avuto a che fare con relazioni come

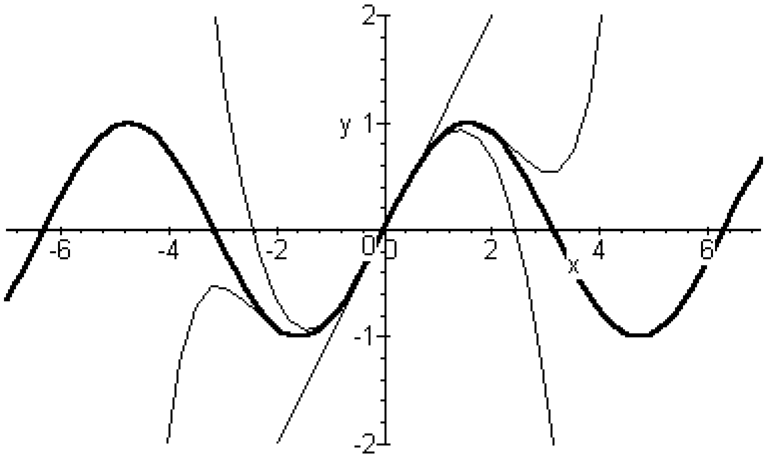
$$\sin(15°) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2},$$

e il messaggio trasmesso (chissà quanto coscientemente) è stato, più o meno:

$\sin(15°)$ è un'espressione misteriosa

$\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ è un'espressione più semplice, a cui occorre ricondurre la prima.

Non mi pare che le cose stiano così. Non vedo ragioni convincenti per preferire l'operatore $\sqrt{\ }$ all'operatore sin; è ben vero che le radici quadrate si costruiscono con riga e compasso, che la radice di un numero naturale è un numero algebrico e non un numero trascendente, ma questi mi sembrano paradigmi superati (da superare), e che comunque rimangono impliciti nell'attività didattica.
$\sin(15°)$ e $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ sono espressioni che possiamo (dobbiamo) approssimare, e la prima mi pare più adatta allo scopo.
ESEMPIO 3. Cosa fanno le calcolatrici scientifiche quando calcoliamo sin(π/12)? Una delle applicazioni più significative del calcolo infinitesimale è quella di approssimare qualunque funzione trascendente mediante polinomi (per esempio i polinomi di Taylor), cioè mediante somme e prodotti. È davvero un peccato non parlare a scuola in modo diffuso di algoritmi di approssimazione. Tracciare i grafici di sin(x) e delle funzioni polinomiali di Taylor di grado 1, 2, …, mostra come in un intorno dello zero sia possibile approssimare sin(x) con precisione via via crescente.



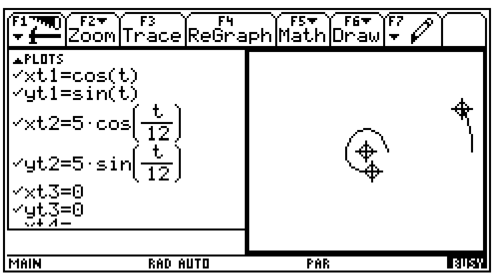
Rivalutare le equazioni parametriche. La TI92 offre, rispetto a programmi come DERIVE e MAPLE, il vantaggio di poter tracciare il grafico di equazioni parametriche in diverse modalità: in modalità "Line" il cursore (un piccolo cerchio) si muove lasciando dietro di sé la traccia del grafico; in modalità "Square" il cursore lascia la traccia della propria traiettoria mediante dei punti ad intervalli di tempo regolari; in modalità "Animate" si vede solo il cursore, come una pallina. In questo modo è possibile visualizzare con buona verosimiglianza temporale la simulazione di moti piani. Ecco alcuni esempi.
ESEMPIO 4. Due punti *A* e *B* si muovono di moto circolare uniforme intorno ad uno stesso centro *O*, con raggi (R_A, R_B) e velocità angolari (ω_A, ω_B) differenti. Qual è il loro moto relativo? Cioè qual è il moto di *B* visto da *A*? Supponiamo che al tempo t=0 *A*, *B*, *O* siano allineati. Le equazioni parametriche dei moti di *A* e *B* sono

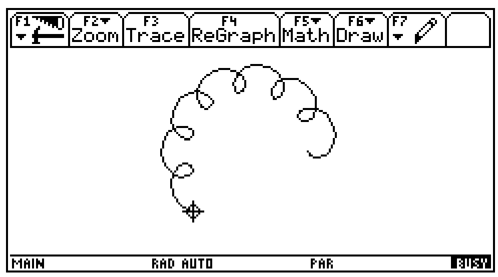
$$\begin{cases} x_A = R_A \cos(\omega_A t) \\ y_A = R_1 \sin(\omega_A t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = R_B \cos(\omega_B t) \\ y_B = R_B \sin(\omega_B t) \end{cases}$$

e il moto relativo di *B* rispetto ad *A* è descritto dal vettore $\underline{AB}$:

$$\begin{cases} x_{AB} = R_B \cos(\omega_B t) - R_A \cos(\omega_A t) \\ y_{AB} = R_B \sin(\omega_B t) - R_A \sin(\omega_A t) \end{cases}$$

Il moto relativo di *B* rispetto ad *A* è davvero complicato per essere studiato con carta e penna, ma in pochi secondi con un calcolatore possiamo tracciare la curva, per esempio con R_A=ω_A=1, R_B=5, ω_B=1/12 (in modalità "Line").



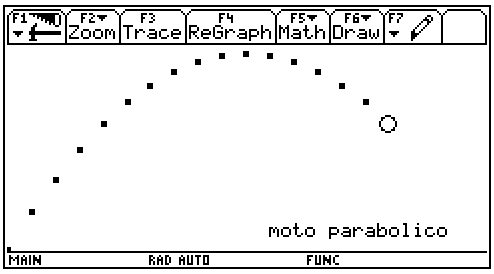


Se interpretiamo il problema come modello approssimativo dei moti planetari, la curva tracciata è il moto relativo di Giove rispetto alla Terra, proiettato sulla sfera celeste. Questa curva spiega i cosiddetti "moti retrogradi" dei pianeti: a intervalli regolari i pianeti sembrano invertire il verso del moto, per poi riprendere il moto diretto. Per spiegare i moti retrogradi la scienza alessandrina produsse un modello matematico (il modello tolemaico) di straordinaria precisione.

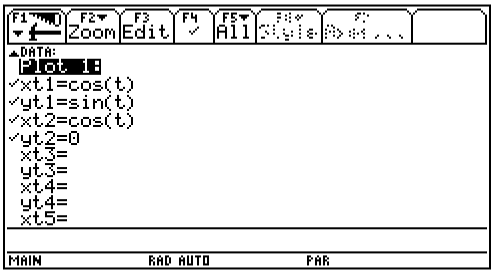
ESEMPIO 5. Il moto parabolico: un proiettile lanciato con velocità v_0 e angolo di elevazione α ha equazioni parametriche

$$[\ v_0 \cos(\alpha)\ t,\ v_0 \sin(\alpha)\ t - gt^2/2].$$

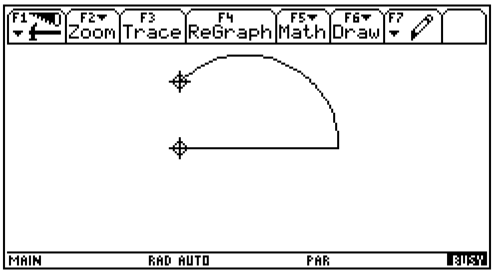
Con la TI92, in modalità "square":

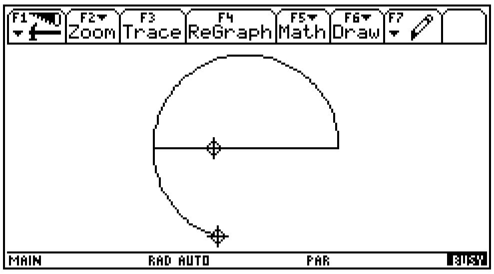


ESEMPIO 6. Il moto armonico. Si possono dare più equazioni e tracciare i grafici in modo simultaneo.



Il moto armonico appare così come proiezione del moto circolare uniforme su un diametro.





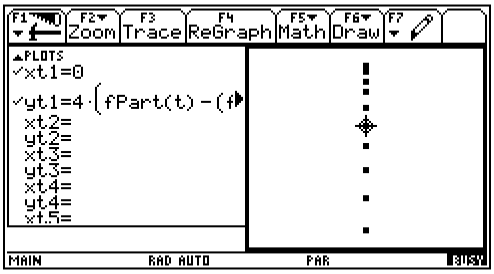
ESEMPIO 7. Una pallina perfettamente elastica cade in verticale e rimbalza più volte contro il pavimento risalendo ogni volta alla stessa altezza. Quali sono le sue equazioni parametriche? Possiamo fissare arbitrariamente il periodo in 1 s, con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t - t^2 \end{cases}$$

Per ottenere la periodicità si può sfruttare la funzione "fPart", che dà la parte decimale di un numero: fPart(x)=x–int(x); le equazioni parametriche diventano le seguenti:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4(\mathrm{fPart}(t) - (\mathrm{fPart}(t))^2) \end{cases}$$

In modalità "Animate" si ottiene una ottima simulazione del moto; il grafico seguente è in modalità "Square", a intervalli di tempo di 5 centesimi di secondo.



<u>L'aritmetica</u>. È quanto mai opportuno far rifiorire l'insegnamento dell'aritmetica, per diversi motivi; eccone alcuni.

1. È uno dei terreni privilegiati per la costruzione di algoritmi (e quindi è terreno fertile perché si radichi negli allievi il concetto di algoritmo).

2. Esistono un buon numero di problemi di teoria dei numeri ancora aperti, facilmente formulabili e "verificabili" sperimentalmente; essi mostrano una matematica in divenire, dinamica, non conclusa.

3. I risultati negativi di Gödel riguardano l'aritmetica. Dal punto di vista culturale è importante citare questi risultati, perché aiutano a comprendere che cosa sia oggi la matematica nel pensiero occidentale.

4. Non ultimo: l'aritmetica è spesso divertente, è ricca di problemi appassionanti e non banali.

ESEMPIO 1. Secondo me è importante analizzare la struttura algebrica degli insiemi finiti $\mathbf{Z}_n$. $\mathbf{Z}_n$ è un anello rispetto all'addizione e alla moltiplicazione, e se n è primo (e solo in tal caso) $\mathbf{Z}_n$ è un campo. Mentre è banale la ricerca dell'opposto di un numero (l'opposto di a è $n-a$), non è semplice stabilire chi sia l'inverso di un numero. Il teorema di Fermat afferma che se n è primo allora per ogni $a \in \mathbf{Z}_n - \{0\}$ risulta

$$a^{n-1} = 1,$$

da cui deduciamo che l'inverso di a è a^{n-2}:

$$a \cdot a^{n-2} = a^{n-1} = 1.$$

Con DERIVE definiamo la funzione $inv(a,n)$, che calcola l'inverso di a in $\mathbf{Z}_n$ e la funzione $zn(n)$, che tabula gli inversi di tutti gli elementi di $\mathbf{Z}_n$:

```
inv(a,n):=mod(a^(n-2),n)
inv(5,11)=9
zn(n):=vector([a,inv(a,n)],a,1,n-1)
zn(11)
        [[1,1],[2,6],[3,4],[4,3],[5,9],[6,2],[7,8],[8,7],[9,5],[10,10]]
```

ESEMPIO 2. Un problema ancora irrisolto dell'aritmetica è noto come *Gioco di Collatz*. Dato un numero naturale a_0, si costruisce la successione

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n/2 & \text{se } a_n \text{ è pari} \\ 3a_n + 1 & \text{se } a_n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Questa successione scende prima o poi a 1? (In tal caso si ripete indefinitamente il ciclo 1,4,2). Quanto è lunga la sequenza necessaria per scendere a 1?

Per esempio, con a_0=17 abbiamo la successione

17, 52, 26, 13, 10, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

di lunghezza 13. Per quel che se ne sa, qualunque sia a_0 la successione scende a 1 in un numero finito di passi. Il numero tra 1 e 100 che ha la sequenza più lunga è 97, la cui successione scende a 1 in 119 passi.

Con DERIVE si sfrutta la funzione ITERATES(f(x),x,x_0), che restituisce il vettore

$$[x_0, f(x_0), f(f(x_0)), ...]$$

in cui l'ultimo elemento è il primo che si ripete.

```
c(n):=if(mod(n,2)=0,n/2,3n+1)
```

```
seq(a):=iterates(c(n),n,a)
seq(11)=[11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4]
lung(a):=dimension(iterates(c(n),n,a))–1
lung(11)=15
max(vector(lung(a),a,1,100))=119
```

Algebra. Anche i nuovi programmi, a proposito del calcolo letterale, sottolineano "*l'inopportunità del ricorso ad espressioni inutilmente complesse*". Ora che possiamo far svolgere i calcoli ai programmi di manipolazione simbolica, è necessario spostare l'attenzione dell'allievo dall'**aspetto operativo** del calcolo letterale all'**aspetto strutturale**. La pratica scolastica spesso privilegia la quantità di esercizi particolari alla risoluzione strutturale di una intera classe di problemi. Per esempio, si può risolvere una quasiasi equazione algebrica? Cosa intendiamo esattamente per *risolvere*?
Perché insegnare tecniche raffinatissime per la risoluzione di particolari equazioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche?
Credo che le equazioni e le disequazioni *elementari* (come $\sin(x)=k$, $\ln(x)>k$, ecc.) siano più che sufficienti in una fase di approccio a queste nuove funzioni. Le equazioni e le disequazioni sono *tecniche*, non esauriscono (anzi in qualche modo nascondono) la ricchezza culturale e storica delle funzioni trascendenti.
Perché continuare ad ignorare equazioni come

$$x = \cos(x), \qquad e^x - x - 1 = 0?$$

In particolare l'ultima equazione è l'equazione risultante del sistema tra $y=e^x$ e la sua tangente in $x=0$: non ha più senso "contare" la molteplicità delle soluzioni, perché l'equazione non è algebrica. Tuttavia se esprimiamo e^x in serie di Taylor

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots-x-1=0$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=0$$

$$x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\ldots\right)=0$$

ritroviamo in una nuova forma un concetto che sembrava perduto.

È indispensabile, fin dal biennio, abituare gli allievi all'analisi delle proprietà strutturali delle operazioni (associativa, commutativa, distributiva) e ai concetti di elemento neutro e elemento inverso rispetto ad una operazione. Nei limiti del possibile, è utile fondare il calcolo letterale solo su questi pochi concetti, anziché presentare carrellate di proprietà e di esercizi di semplificazione. La manipolazione di espressioni algebriche non si impara per *accumulazione* di esercizi, bensì per *riduzione* ad operazioni e proprietà elementari.
Anzi, sarebbe bene smetterla di enfatizzare la *semplificazione* come pratica matematica. Allenare l'allievo ai concetti di gruppo, anello e campo: ecco un obiettivo forte. Gli anelli $\mathbf{Z}_n$ e i campi $\mathbf{Z}_p$ si prestano molto bene ad una analisi strutturale; per esempio, le proprietà

$$\frac{1}{a\cdot b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} \qquad \text{e} \qquad {}^-(a+b) = {}^-a + {}^-b$$

sono strutturalmente uguali; l'apparente differenza è data dalla diversa notazione per gli inversi e per gli opposti. Se fossimo coerenti scriveremmo

$$\frac{1}{a} \qquad \text{e} \qquad 0-b$$

oppure

$$/a \qquad \text{e} \qquad -b.$$

ESEMPIO. Nel mare di esercizi sulle operazioni con i polinomi può capitare di non sottolineare con sufficiente forza il teorema di Ruffini, che fa da ponte tra l'aspetto sintattico (l'anello dei polinomi in una variabile) e l'aspetto semantico (le funzioni polinomiali). Supponiamo di analizzare l'anello dei polinomi R[x]. L'esistenza di uno zero (reale) a di un polinomio $f(x)$ è equivalente alla sua fattorizzazione per $(x–a)$. Se diamo come definizione di retta tangente a $f(x)$ in x_0 la retta che in x_0 ha almeno due punti di intersezione coincidenti con $f(x)$, tale retta può essere facilmente determinata: il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = ax + b \end{cases}$$

ammette l'equazione risultante

$$f(x) - ax - b = 0$$

i cui zeri sono le ascisse dei punti di intersezione. Imponiamo allora che il resto della divisione tra i polinomi

$$f(x) - ax - b,\ (x - x_0)^2$$

sia nullo.

<u>La notazione matematica</u>. L'informatica e la nascita dei programmi di algebra simbolica ci ha spinto ad una riflessione sui simboli che utilizziamo, alcuni dei quali appaiono sorprendentemente vetusti. È noto che uno degli ostacoli all'apprendimento è costituito dalla difficoltà di associare un concetto al simbolo che lo sintetizza; in particolare è dannoso e fonte di disorientamento l'utilizzo di uno stesso simbolo in contesti semantici differenti. È sorprendente che in matematica questo errore pedagogico venga commesso tanto spesso.

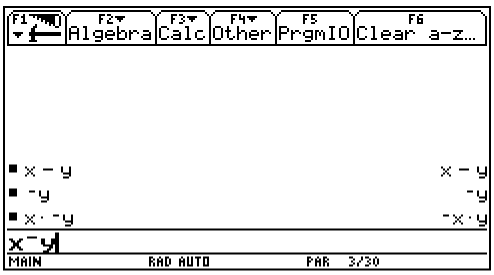
ESEMPIO 1. Dovremmo utilizzare due simboli diversi per il segno "meno", a seconda che si tratti di un simbolo di operazione unaria (l'opposto di) oppure binaria (la sottrazione, cioè la somma con l'opposto). Nell'implementazione delle calcolatrici è stato usato fino a pochi anni fa il tasto "±" come simbolo unario. I programmi di calcolo simbolico usano (almeno in output), due simboli diversi.
DERIVE lascia uno spazio per la sottrazione e non per l'opposto, cioè dà in output

$x - y$ e $-y$.

Con MAPLE l'opposto di x viene indicato con un "meno" più piccolo in alto a sinistra del termine a cui si riferisce:

${}^{-}x$.

Anche con la TI92 il simbolo unario è più piccolo e posto in alto a sinistra. La TI92 non ammette confusioni nemmeno in input:



Se si scrive $x–y$ con il simbolo unario, la TI92 lo interpreta come prodotto di x per ${}^{-}y$.
Dobbiamo recuperare questa distinzione nella pratica didattica: in questo modo si eviterebbero i ben noti equivoci ed errori sull'uso del segno "meno". Anzi non sarebbe nemmeno necessario, a rigor di logica, usare le parentesi: le espressioni

$a - (-b)$ $a \cdot ({}^{-}b)$

possono essere rese più efficacemente nel seguente modo:

$$a - {}^{-}b \qquad\qquad a \cdot {}^{-}b$$

Anche l'uso delle "sbarre" per semplificare, come nei seguenti esempi

$$\frac{\cancel{6}^3}{\cancel{8}^4}, \quad \frac{x^2}{\cancel{x}}, \quad \cancel{x} + y - \cancel{x}$$

è deleterio. Si finisce per confondere addizione e moltiplicazione, l'elemento neutro dell'una e l'elemento neutro dell'altra.

ESEMPIO 2. Per gli stessi motivi, i simboli di Leibniz

$$\frac{dy}{dx}, \quad \int f(x)dx$$

non andrebbero utilizzati, almeno in fase di approccio all'argomento. Il primo non è una frazione, nel secondo il *dx* appare pleonastico a tutti gli studenti. Alcuni testi li hanno sostituiti con i simboli

$$D(f(x)), \qquad P(f(x)),$$

(intesi come operatori su funzioni) che sono certamente di più semplice e immediata comprensione. Il linguaggio informatico ci suggerisce di utilizzare, per esempio per l'integrale indefinito e definito, non le scritture

$$\int \sin x \; dx \qquad\qquad \int_0^\pi \sin x \; dx$$

bensì le più semplici e dirette scritture

int(sin(x), x)   int(sin(x), x, 0, π).

Un altro aspetto della notazione matematica in uso è che esso sembra ancora orientato ad una *economicità* ormai immotivata. Non si capisce altrimenti perché si persista a scrivere $\sin^2 x$ che significa sin(sin(x)), e non $(\sin x)^2$.

Che cosa ci aspetta?

La mia impressione è che la TI92 cambierà molte cose. Non solo perché le dimensioni (e il costo) sono tali da far prevedere una rapida diffusione, come per altro è già accaduto (oltre che negli Stati Uniti) in Gran Bretagna, in Francia, in Spagna, persino in Portogallo; è realistico immaginare un laboratorio di informatica che sta in una valigetta, con rapporto macchine-studenti 1:1 (evitando così le inevitabili disparità che si creano quando su uno stesso PC lavorano 2 o più studenti).

Il vantaggio che questa macchina offre rispetto al tradizionale laboratorio di informatica è che tutti gli ambienti della TI92 sono interattivi, qualunque oggetto definito in un ambiente è immediatamente utilizzabile in un altro. È possibile in modo contestuale programmare, calcolare, tracciare grafici, inserire e manipolare dati, costruire luoghi geometrici.

In un certo senso questa macchina sgombra il campo dall'equivoco dell'insegnamento dell'*Informatica*: ormai è chiaro a tutti che l'informatica c'entra poco. Così come non si pretende che chi guida un automobile conosca il funzionamento dello spinterogeno, non dobbiamo pretendere che l'allievo abbia padronanza dei circuiti logici e dei segreti del linguaggio macchina.

Non si tratta più di "fare informatica": si tratta di "fare matematica", con strumenti adeguati ai nuovi paradigmi della società occidentale.

L'insegnamento secondario della matematica <u>deve</u> cambiare, nei metodi e nei contenuti, radicalmente e con urgenza. Altrimenti, potremmo ritrovarci disoccupati. Un buon ingegnere potrebbe in futuro insegnare tutto ciò che serve di matematica, al liceo come nei corsi di laurea a indirizzo scientifico. I matematici potrebbero diventare una specie in estinzione, finalmente una specie protetta.

In particolare: non saremo noi insegnanti a decidere sull'uso delle calcolatrici: saranno gli studenti, il cambiamento avverrà con o senza di noi.

Bibliografia

1. Quaderno di Lavoro N° 7 del Centro Morin, Paderno del Grappa
   - Kathleen Heid, *Come i sistemi di manipolazione simbolica potrebbero e dovrebbero influenzare i curricoli matematici*, Mathematics Teacher, vol. 82/6, settembre 1996
2. Quaderno di Lavoro n° 27 del Centro Morin, Paderno del Grappa
   - Candido Sitia, *L'insegnamento della matematica e la formazione umana alle soglie del 2000*, giugno 1995
   - Roger Cuppens, *I mezzi di calcolo moderno finiranno per rivoluzionare l'insegnamento della matematica?*, Conferenza all'Università di Toulouse
   - Bruno Buchberger, Università di Linz, *Occorre ancora che gli studenti imparino le regole di integrazione?* SIGSAM Bulletin, vol. 24/1, gennaio 1990
   - R. Schmidt e C. Wagenknecht, *Maturità 1994: proibito l'uso di mezzi di calcolo*, Praxis der Mathematik, 2/37, aprile 1995
3. G. C. Barozzi, S. Cappuccio, *Uso delle calcolatrici grafiche nell'insegnamento della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna 1996
4. S. Cappucccio, *Come insegneremo matematica nel 1999?*, La matematica e la sua didattica, n° 2, 1996
5. B. Kutzler, *DERIVE. Il futuro dell'insegnamento della matematica*, La matematica e la sua didattica, n° 4, 1995
6. B. Waits, *The power of visualization in Calculus*, TICAP Project, 1992
7. Citrini, Castagnola, Impedovo, *Matematica. Strutture, Funzioni*, Einaudi scuola, 1995.
8. Nucleo di Ricerca Didattica di Genova, *MaCoSa*, ed. Maggi.
9. F. Conti, *Calcolo*: *teoria e applicazioni*, ed. McGraw Hill