Il primo frattale: Arthur Cayley*

Michele Impedovo

Il problema

Il lavoro seguente è nato da una lettura sorprendente. Arthur Cayley, nel 1870, analizzando l'algoritmo di Newton per l'approssimazione delle radici di un'equazione algebrica in **C** (anziché in **R**) si pose un problema che a quei tempi non poteva risolvere: data un'equazione polinomiale $p(x) = 0$ di grado n, essa ammette n radici in **C**. L'algoritmo di Newton determina, a partire da un arbitrario z_0, una successione $z_1, z_2, \ldots$ che converge ad una soluzione: quale? La ricerca della risposta conduce ad una struttura apparentemente caotica, in cui è possibile riconoscere una *omotetia interna*: si tratta forse del primo frattale della storia della matematica, anche se non costruito ma soltanto intuito.

L'algoritmo di Newton

L'*algoritmo di Newton* approssima una radice reale c dell'equazione polinomiale $f(x)$=0: permette, a partire da un numero x_0, di trovare un x_1 che è più vicino a c di x_0. Iterando il procedimento si costruisce la successione

$$x_0, \qquad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

che converge a c.

Supponiamo ora di interpretare l'equazione $f(x)$=0 nel campo **C** dei numeri complessi, e supponiamo che $f(x)$=0 ammetta in **C** altre soluzioni oltre a quella reale c. Il numero x_0 è ora un numero complesso, e l'algoritmo di Newton permette di costruire una successione di numeri complessi: **a quale delle soluzioni complesse converge la successione**? Per fissare le idee, si immagini che $f(x)$ ammetta 3 soluzioni z_1, z_2, z_3 in **C**. È possibile dividere il piano complesso in tre regioni R_1, R_2, R_3 tali che se x_0 appartiene alla regione R_i allora converge alla soluzione z_i?

In altri termini, se assegniamo a ciascuna soluzione un **colore**, e coloriamo ogni punto del piano complesso con il colore della soluzione a cui converge l'algoritmo di Newton quando si parte da quel numero, come si colora il piano?

La risposta, come vedremo, è sorprendente: dall'ordine di una equazione saremo condotti al caos di un frattale, il primo della storia della matematica.

Il frattale di Cayley

Abbiamo visto che già in **R** il problema di stabilire a quale soluzione converga la successione dell'algoritmo di Newton in funzione del valore iniziale non è di semplice soluzione. Questo stesso problema, affrontato in **C**, è stato proposto da Cayley (che non aveva a disposizione un Pentium…) nel 1879. In un breve saggio dal titolo *"The Newton-Fourier imaginary problem"* scrive:

A given imaginary quantity $x+iy$ may be represented by a point the coordinates of which are (x,y): the roots of the equation are thus represented by given points A, B, C, …, and the values $x_0, x_1, x_2, \ldots$ by points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that P being taken at

* Riprodotto con permesso da
M. Impedovo. Matematica: insegnamento e computer algebra. Milano: Springer Verlag Italia, 1999

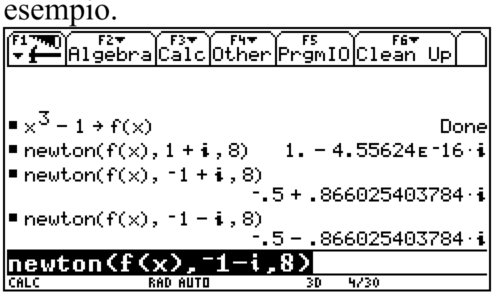
pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point A; anywhere within another region at the point B; and so for the several points representing the roots of the equation. The solution is easy and elegant in the case of a quadratic equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

(Un numero immaginario $x+iy$ può essere rappresentato da un punto di coordinate (x, y): le radici dell'equazione sono allora rappresentate da certi punti A, B, C, …, e i valori x_0, x_1, x_2, … dai punti P_0, P_1, P_2, … il primo dei quali è assunto a piacere, e gli altri si ottengono ciascuno dal precedente mediante la costruzione geometrica data. Il problema è determinare le regioni del piano tali che, preso P a piacere ovunque dentro una di quelle regioni, arriviamo alla fine al punto A; preso P in un'altra regione arriviamo al punto B; e così via per i diversi punti che rappresentano le radici dell'equazione. La soluzione è facile e elegante nel caso di una equazione di secondo grado, ma il caso successivo delle equazioni cubiche sembra presentare difficoltà considerevoli.)

Consideriamo come esempio ancora l'equazione $z^3=1$, che ammette in **C** le tre soluzioni

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Iniziamo da un numero complesso x_0, cioè da un punto P_0 del piano complesso, e costruiamo la successione di Newton: a quale soluzione converge? Vediamo qualche esempio.

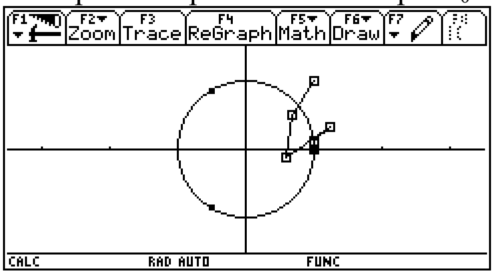


Il numero $1+i$ converge a z_1, il numero $-1+i$ converge a z_2, il numero $-1-i$ converge a z_3.
Il programma Cayley prende in ingresso un numero complesso e rappresenta graficamente sul piano complesso la successione di Newton (con 20 iterazioni).

```
cayley(z)
Prgm
Local  k,a,g(x)
setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE")
ClrIO
z→a:{real(a)} →re:{imag(a)} →im
(2*x^3+1)/(3*x^2) →g(x)
For  k,1,20
g(a) →a
augment(re,{real(a)}) →re
augment(im,{imag(a)}) →im
EndFor
{1,¯0.5,¯0.5}→lx
{0, √ (3)/2,–√ (3)/2}→ly
```

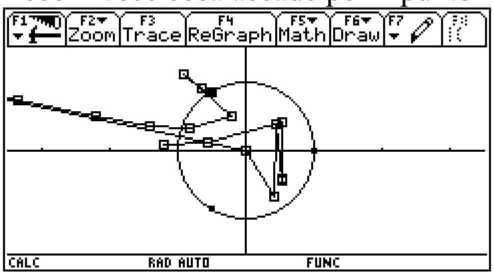
```
NewPlot  2,1,lx,ly,,,,4
NewPlot  1,2,re,im
Circle  0,0,1
ZoomSqr
setMode("Exact/Approx","AUTO")
EndPrgm
```

Ecco per esempio cosa accade per x_0=1+i.



Dopo qualche oscillazione (non molto simmetrica, per la verità) la successione converge a 1.

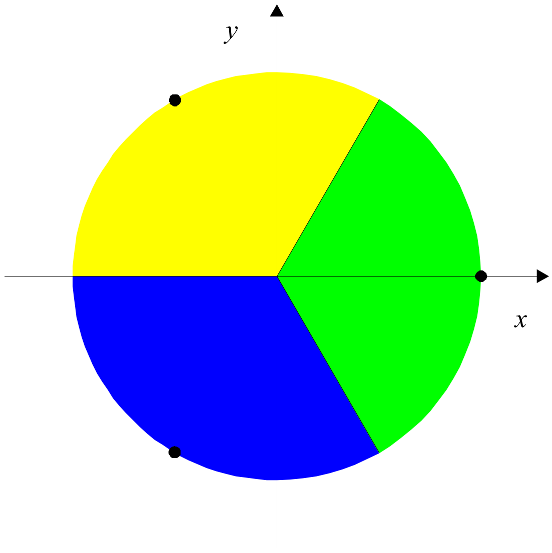
Ecco invece cosa accade per il punto iniziale $x_0 = -1.2+0.1i$.



La successione sembra caotica, occorrono 40 iterazioni affinché, dopo aver toccato numeri lontanissimi dall'origine come –7495+1601i, converga a z_2.

Quest'ultimo esempio fa capire quali fossero le difficoltà a cui accennava Cayley.

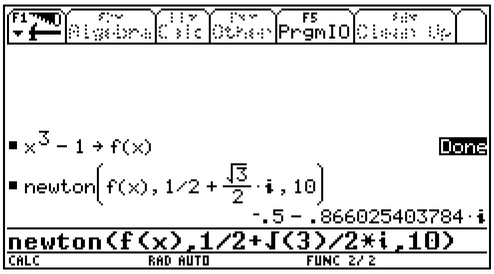
Per arricchire il problema dal punto di vista cromatico possiamo immaginare di assegnare al punto P_0 un colore diverso a seconda della soluzione a cui converge la successione che inizia con P_0: se la successione che ha come punto iniziale P_0 converge a z_1 coloriamo P_0 di verde (ammesso che abbia senso colorare un punto!), se converge a z_2 coloriamo P_0 di giallo, se converge a z_3 coloriamo P_0 di blu. Così possiamo immaginare l'intero piano colorato di verde, giallo e blu: che figura viene generata? Una congettura ragionevole potrebbe essere la seguente: la successione che inizia con P_0 converge alla soluzione più vicina a P_0. Il piano verrebbe così suddiviso in tre regioni regolari, ciascuna con il proprio colore, delimitate dalle semirette uscenti dall'origine che formano angoli di ampiezza $\pi/3$, π, $5\pi/3$ con l'asse x.



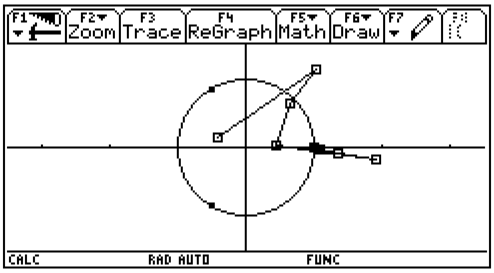
In realtà le cose non stanno affatto così. Si può già presentire l'esistenza di un comportamento caotico controllando che la nostra congettura è falsa: il punto

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

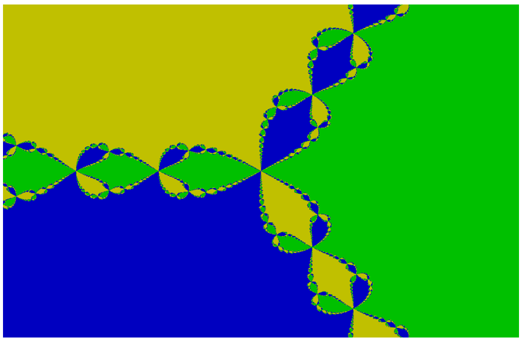
che si trova sull'asse di z_1 e z_2 produce una successione che converge al punto più lontano z_3.



Anche il punto $x_0 = -0.42+0.15i$ converge alla soluzione più lontana z_1.



La figura seguente (ottenuta con *Winfract*) illustra quale sia effettivamente la colorazione del piano per l'equazione $z^3-1=0$.



Lungo le semirette che escono dall'origine si notano delle configurazioni a forma di goccia che presentano la tipica *omotetia interna* delle figure frattali di cui parla Benoit Mandelbrot nel suo splendido *Gli oggetti frattali*. Ingrandendo una di queste gocce si osservano figure simili via via più piccole.