

QUAL È LA DISTANZA TRA ROMA E NEW YORK?

UN PO' DI GEOMETRIA ANALITICA SULLA SFERA

Michele Impedovo

Bollettino dei Docenti di Matematica del Canton Ticino (CH) n° 36, maggio 98

1. Il problema

Il lavoro che segue è il risultato di un problema nato su sollecitazione degli studenti, durante una discussione sulle rotte di navigazione aerea

È possibile individuare univocamente un punto sulla superficie terrestre mediante una coppia di numeri reali?

In tal caso, dati due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, qual è la loro *distanza*?

Quali analogie e quali differenze ci sono tra le geometrie analitiche del piano e della sfera?

Lo strumento fondamentale utilizzato per la risoluzione del problema è il *prodotto scalare* tra vettori in \mathbf{R}^3 . L'interpretazione dello spazio tridimensionale come spazio vettoriale euclideo permette di risolvere in modo elegante e unitario il problema posto. Viceversa la risoluzione di questo problema permette di applicare in un contesto significativo alcuni concetti fondamentali di algebra lineare.

I prerequisiti richiesti sono le operazioni tra vettori in \mathbf{R}^3 : somma di due vettori, multiplo reale di un vettore, prodotto scalare, prodotto vettoriale. I calcoli (assai laboriosi) si prestano ad essere svolti con un programma di manipolazione simbolica; noi abbiamo usato Maple.

2. Il piano cartesiano e la *sfera cartesiana*

Vogliamo stabilire sulla superficie di una sfera un sistema di riferimento. Sia data una sfera di centro C e raggio r , e sulla sua superficie due punti A, B . Come è noto, il percorso più breve (e quindi il *segmento*) che unisce A e B è l'arco (convesso) di cerchio massimo (quindi di centro C e raggio r) che passa per i due punti. Due cerchi massimi sono tra loro ortogonali se lo sono le loro tangenti nei punti di intersezione. Per stabilire un sistema di riferimento sulla sfera terrestre si adottano come *assi* due opportuni cerchi massimi tra loro ortogonali: l'**equatore** e il **meridiano di Greenwich**. Il loro punto di intersezione utilizzato come origine O del sistema di riferimento sferico è un punto al largo della costa occidentale dell'Africa, nel Golfo di Guinea. L'altro punto di intersezione (sul meridiano del *cambiamento di data*) è in pieno Oceano Pacifico.

Un punto sulla superficie sferica terrestre è solitamente individuato dalla sua *longitudine* (distanza angolare dal meridiano di Greenwich, qui considerata positiva a Est e negativa o Ovest) e dalla sua *latitudine* (distanza angolare dall'equatore, positiva a Nord e negativa a Sud). Ecco alcuni esempi nei vari *quadranti*:

	LONG	LAT
Roma	+12° 27'	+41° 55'
New York	-70° 15'	+40° 45'
Buenos Aires	-70° 40'	-33° 30'
Sydney	+151° 10'	-33° 55'

Un punto sull'equatore ha latitudine nulla, un punto sul meridiano di Greenwich ha longitudine nulla. Utilizziamo come unità di misura delle distanze il raggio terrestre (circa 6378 km = 1 RT).

Supponiamo così che la Terra sia una sfera liscia, senza rilievi (l'altezza di volo di un aereo di linea è circa 10 km, una distanza trascurabile rispetto al raggio terrestre).

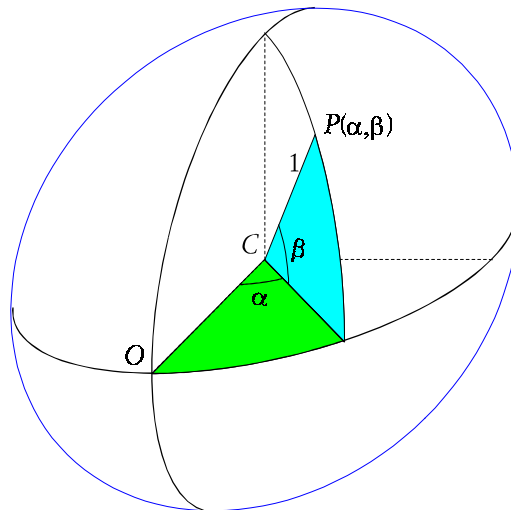
Con le convenzioni adottate possiamo ora stabilire un sistema di riferimento sulla superficie sferica.

Sia P un punto sulla sfera; esso è univocamente individuato dalla coppia di numeri reali (α, β) , dove α è la longitudine e β è la latitudine, con le seguenti limitazioni:

$$-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$

$$-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ.$$

Se escludiamo i due poli (che hanno latitudine rispettivamente $+90^\circ$ e -90° e longitudine qualsiasi) tale sistema di riferimento stabilisce una corrispondenza biunivoca con i punti della superficie sferica.



A differenza di quanto accade nel piano, sulla sfera non esistono rette parallele: tutte le *rette sferiche*, cioè i cerchi massimi, si intersecano in due punti diametralmente opposti. Ne consegue una differenza sostanziale tra piano e sfera: sul piano le coordinate (x,y) di un punto P rappresentano le distanze di P rispettivamente dall'asse y e dall'asse x . Sulla sfera invece solo la seconda coordinata (la latitudine) rappresenta la distanza dall'equatore; la prima coordinata (la longitudine) non è uguale alla distanza dal meridiano di Greenwich, tranne nel caso in cui P stia sull'equatore; la distanza di P dal meridiano di Greenwich diminuisce con l'aumentare della latitudine, fino ad annullarsi per i poli.

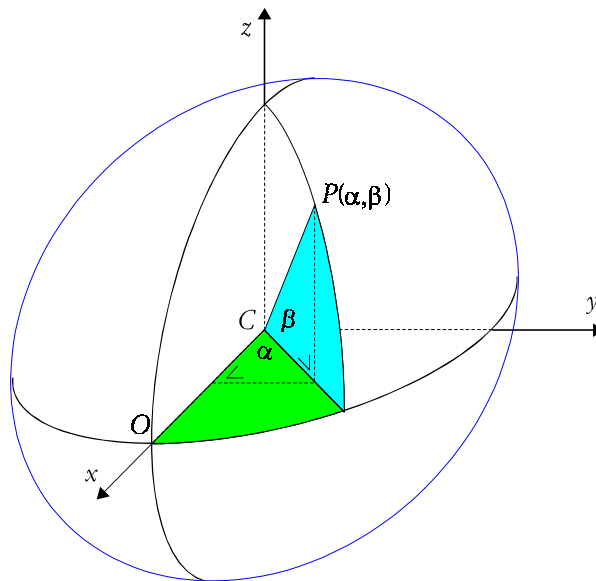
In altri termini: i *meridiani* (luoghi dei punti aventi data longitudine) sono cerchi massimi (quindi *rette sferiche*), i *paralleli* (luoghi dei punti aventi data latitudine) non sono cerchi massimi.

A differenza di quanto accade nel piano, la distanza tra due punti non è invariante per *traslazioni*, cioè per trasformazioni del tipo

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha + \gamma, \beta + \gamma);$$

tali trasformazioni non sono, sulla sfera cartesiana, delle isometrie.

La strategia risolutiva consiste nell'immergere la sfera in un sistema di riferimento ortogonale xyz con l'origine nel centro C della sfera, in modo che l'origine $O(0,0)$ del sistema di riferimento sferico abbia coordinate $(1,0,0)$ e l'asse z passi per i due poli. In tal modo è possibile associare ad ogni punto $P(\alpha, \beta)$ della sfera il vettore $\underline{CP} = [x, y, z]$ di \mathbf{R}^3 , e utilizzare senza scrupoli il prodotto scalare di vettori in \mathbf{R}^3 .



Sia dato un punto $P(\alpha, \beta)$ sulla superficie sferica. Come si vede dalla figura, le componenti in \mathbf{R}^3 del vettore \underline{CP} sono le seguenti:

$$\underline{CP} = [\cos\beta \cos\alpha, \cos\beta \sin\alpha, \sin\beta]$$

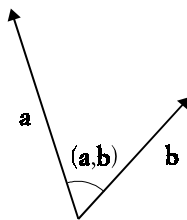
È semplice verificare che in ogni caso risulta $\|\underline{CP}\| = 1$:

$$\begin{aligned} \|\underline{CP}\|^2 &= (\cos\beta)^2(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 \\ &= (\cos\beta)^2((\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2) + (\sin\beta)^2 \\ &= (\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ricordiamo che dati due vettori $\mathbf{a} = [x_1, y_1, z_1]$, $\mathbf{b} = [x_2, y_2, z_2]$, il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è il numero reale così definito:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Inoltre se indichiamo con (\mathbf{a}, \mathbf{b}) l'angolo convesso compreso tra i due vettori,



risulta

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

dove

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

In uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è possibile quindi definire l'*angolo* di due vettori:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

Ora abbiamo tutti gli strumenti per determinare la distanza tra due punti. Siano $P(\alpha_1, \beta_1)$ e $Q(\alpha_2, \beta_2)$ due punti della superficie sferica. La loro distanza è la lunghezza dell'arco di cerchio massimo PQ , e coincide con la misura (in radianti) dell'angolo $\angle PCQ$. Con il prodotto scalare è tutto facile; poiché

$$\underline{CP} = [\cos\beta_1\cos\alpha_1, \cos\beta_1\sin\alpha_1, \sin\beta_1]$$

$$\underline{CQ} = [\cos\beta_2\cos\alpha_2, \cos\beta_2\sin\alpha_2, \sin\beta_2]$$

risulta

$$\begin{aligned} \cos(\underline{CP}, \underline{CQ}) &= \frac{\underline{CP} \cdot \underline{CQ}}{\|\underline{CP}\| \cdot \|\underline{CQ}\|} \\ &= \underline{CP} \cdot \underline{CQ} \\ &= [\cos\beta_1\cos\alpha_1, \cos\beta_1\sin\alpha_1, \sin\beta_1] \cdot [\cos\beta_2\cos\alpha_2, \cos\beta_2\sin\alpha_2, \sin\beta_2] \\ &= \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2 \end{aligned}$$

da cui

$$d(P, Q) = \arccos(\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\cos\beta_1\cos\beta_2 + \sin\beta_1\sin\beta_2)$$

La misura in radianti di $d(P, Q)$ rappresenta, in raggi terrestri, la distanza tra i due punti. Possiamo quindi dare risposta al problema iniziale:

$$d(\text{Roma, New York}) = 1.041 \text{ RT}$$

La distanza di 1.041 radianti corrisponde a circa 6640 km.

La distanza tra Roma e Sidney è 2.55 RT \approx 16200 km.

In Italia il capoluogo di provincia di massima latitudine è Bolzano ($11^\circ 21', 46'' 30'$) e quello di minima latitudine è Ragusa ($14^\circ 45', 36'' 56'$); la loro distanza è 0.173 radianti, pari a circa 1100 km: questo numero rappresenta la lunghezza *in linea d'aria*, o se si vuole la lunghezza della rotta aerea più breve.

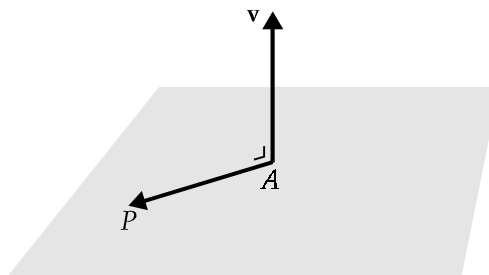
3. L'equazione di una retta

Il problema appena risolto ne apre subito molti altri. Ne proponiamo solo uno, a titolo di esempio: qual è l'equazione di una retta sulla superficie sferica?

Nel piano una retta è caratterizzata da un'equazione lineare in x, y . Vediamo che cosa accade sulla sfera.

Ricordiamo che nello spazio tridimensionale un punto A e un vettore \mathbf{v} individuano unicamente un piano: il piano passante per A e ortogonale a \mathbf{v} è il luogo dei punti P tali che

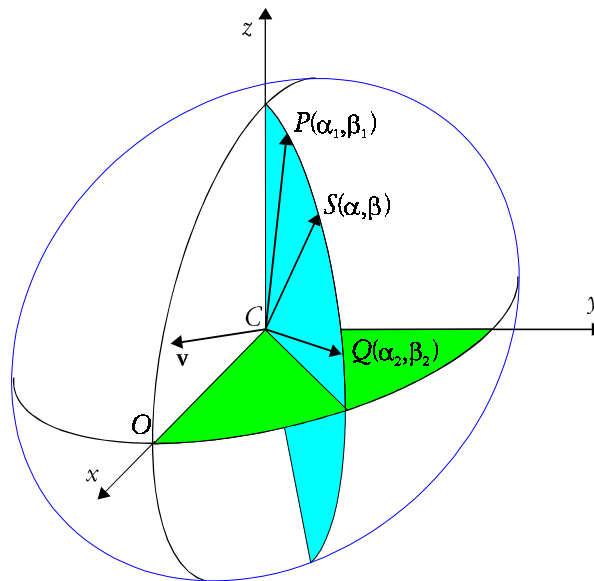
$$\underline{AP} \cdot \mathbf{v} = 0.$$



Ricordiamo inoltre che dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$, il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ definisce un vettore \mathbf{c} ortogonale ad \mathbf{a} e a \mathbf{b} (quindi ortogonale al piano generato da \mathbf{a} e \mathbf{b}), il cui modulo è dato da

$$\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Siano dati i punti $P(\alpha_1, \beta_1)$ e $Q(\alpha_2, \beta_2)$. La retta (sferica) PQ coincide con il cerchio massimo passante per P e Q . Un punto generico $S(\alpha, \beta)$ della superficie sferica appartiene a tale retta se e solo se giace sul piano CPQ . Se \mathbf{v} è un vettore normale del piano CPQ , allora un punto S giace sul piano CPQ se e solo se \underline{CS} è ortogonale a \mathbf{v} .



Utilizzando il prodotto vettoriale possiamo porre

$$\mathbf{v} = \underline{CP} \times \underline{CQ}.$$

In definitiva l'equazione della retta PQ è la seguente:

$$(\underline{CP} \times \underline{CQ}) \cdot \underline{CS} = 0$$

Ricordiamo che il *prodotto misto* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ di tre vettori è un numero reale, ed è uguale al determinante della matrice dei tre vettori; l'equazione della retta PQ è dunque

$\begin{bmatrix} \cos \beta_1 \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \sin \alpha_1 & \sin \beta_1 \\ \cos \beta_2 \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \sin \alpha_2 & \sin \beta_2 \\ \cos \beta \cos \alpha & \cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \end{bmatrix}$
--

cioè del tipo

$h_1 \cos(\beta) \cos(\alpha) + h_2 \cos(\beta) \sin(\alpha) + h_3 \sin(\beta) = 0$

dove h_1, h_2, h_3 sono delle costanti, funzioni di $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$.

Per esempio l'equazione della retta Roma-New York è

$$0.428 \cos(\beta) \cos(\alpha) - 0.462 \cos(\beta) \sin(\alpha) - 0.355 \sin(\beta) = 0.$$

Dato un punto (α, β) è possibile sapere se esso è allineato con Roma e New York: è sufficiente stabilire se le sue coordinate sferiche soddisfano l'equazione data.

4. Conclusioni

I calcoli che abbiamo svolto corrispondono in sostanza a strumenti di *trigonometria sferica*, e in particolare al *Teorema di Menelao*. Si tratta di calcoli assai laboriosi, che acquistano rilevanza soltanto se svolti mediante un programma di manipolazione simbolica. Con tale strumento è possibile porsi problemi che risultavano prima troppo complessi; in un certo senso la trigonometria sferica può essere *soppiantata*. Una volta stabilito l'algoritmo che risolve un problema (i nostri esempi: distanza tra due punti, equazione di una retta), è il calcolatore che svolge i calcoli.

Dal punto di vista didattico siamo di fronte ad una svolta: mutano i paradigmi dei contenuti e degli strumenti da trasmettere. Lo studente è chiamato non solo (non tanto) a *calcolare*, a *semplificare*, a *risolvere*, bensì a *modellizzare*, a *progettare*.