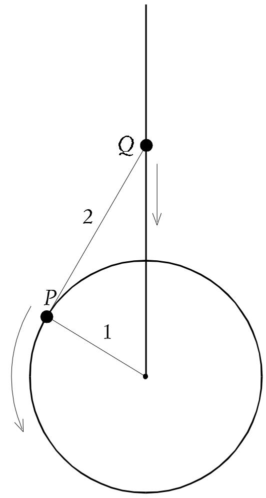
La prova scritta di matematica

Michele Impedovo

Lettera P.RI.ST.EM, n° 17, settembre 1995

Ancora una volta, alla maturità scientifica, è uscito lo scritto di matematica.
Nessun ministro della pubblica istruzione, vecchio o nuovo, ha osato sfidare questa infausta tradizione, che tanto male ha fatto alla matematica e alla preparazione scientifica di generazioni e generazioni di studenti. Si consolida così ulteriormente quel legame perverso di cui ha già detto Emilio Ambrisi su questa rivista (Lettera PRISTEM n°12, giugno 94, *La prova scritta di matematica*): da una parte gli insegnanti (e gli studenti) del triennio hanno come riferimento le prove scritte assegnate negli anni precedenti, e quindi tendono a sviluppare una programmazione didattica in sintonia con quelle; dall'altra coloro che preparano le prove d'esame si preoccupano di non introdurre elementi di eccessiva novità, perché questi produrrebbero un disorientamento in tutte le componenti scolastiche. Il risultato è che, mentre in altri ordini scolastici, anche in assenza di sperimentazioni in atto, si sono avviate innovazioni nei contenuti e nei metodi, al liceo scientifico tradizionale, che dovrebbe rappresentare la punta di diamante della preparazione scientifica pre-universitaria in Italia, nulla cambia.
Sarebbe allora ragionevole aspettarsi, nella prova scritta, temi d'esame che raccolgano almeno in parte i dibattiti che da un decennio sono stati avviati sul rinnovamento dell'insegnamento della matematica. Mi è sembrato di cogliere una piccolissima traccia di attenzione in questo senso nel quesito n°2 della prova scritta alla maturità 1993, in cui si proponeva l'analisi del moto della classica *biella*:



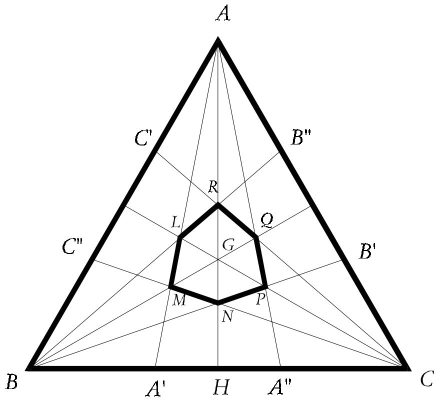
un punto P ruota su una circonferenza di raggio 1, un segmento di lunghezza 2 ha un estremo in P e l'altro estremo Q su una retta passante per il centro della circonferenza; studiare come varia la posizione di Q in funzione dell'angolo di rotazione di P. Il testo ministeriale è in realtà molto minuzioso; il problema doveva essere descritto in forma più generale, e si doveva lasciare allo studente il compito di organizzare un modello geometrico soddisfacente; comunque il quesito è interessante: nello svolgimento si può tener conto sia del dato fisico-geometrico (evidentemente Q si muove di moto periodico tra i punti di ordinata 1 e 3) sia del dato analitico, e integrare i due aspetti in una esposizione che tenga conto di quella esigenza di *comunicazione verbale* della matematica di cui parla Ambrisi; inoltre lo studente bravo può utilizzare liberamente le proprie conoscenze di fisica e di calcolo infinitesimale. Ecco un problema che si presta molto bene a *graduare* e quindi a

valutare la preparazione complessiva dello studente. Ecco un problema la cui formulazione può essere compresa da chiunque: pur senza lasciarsi andare alle utopie di chi auspica che la prova scritta di matematica possa essere in qualche modo giudicata anche dal commissario di italiano (è normale invece che il commissario di matematica esprima giudizi sulla prova di italiano), quel problema è un vero problema, che può incuriosire, e anche far sorgere nuove domande (per esempio, in che punto è massima la velocità di *Q*? In che punto è massima l'accelerazione? È un moto armonico?)
Invece la prova scritta del 1995 è stato un brusco passo indietro.
Non tanto e non solo perché il primo quesito è oggettivamente difficile e laborioso dal punto di vista dei calcoli richiesti; il problema posto è artificioso, per nulla adatto ad una *comunicazione verbale* che colleghi l'intuizione geometrica al ricorso ai calcoli. Non chiede scoperte, chiede di verificare un risultato già trovato da altri; un risultato che può essere determinato soltanto tuffandosi nei calcoli.
I temi di maturità scientifica rappresentano in qualche modo l'evoluzione concettuale e culturale dell'insegnamento della matematica in Italia: perché proporre un problema così povero dal punto di vista culturale? Riporto per intero il testo ministeriale.
1. *Considerato il triangolo equilatero ABC, chiamare:*
- *C', C" i punti che dividono il lato AB in tre parti congruenti (AC'<AC");*
- *A', A" i punti che dividono il lato BC in tre parti congruenti (BA'<BA");*
- *B', B" i punti che dividono il lato CA in tre parti congruenti (CB'<CB");*

Indicare quindi con:
- *L il punto di intersezione dei segmenti AA' e BB";*
- *M il punto di intersezione dei segmenti AA' e CC";*
- *N il punto di intersezione dei segmenti BB' e CC";*
- *P il punto di intersezione dei segmenti BB' e AA";*
- *Q il punto di intersezione dei segmenti CC' e AA";*
- *R il punto di intersezione dei segmenti CC' e BB";*

a) Dimostrare, con il metodo che si preferisce, che l'area dell'esagono LMNPQR è 1/10 di quella del triangolo ABC.
b) Ammesso che l'area di tale esagono sia
$$\frac{9}{10}h^2\sqrt{3},$$
dove h è una lunghezza assegnata, calcolare il volume del solido generato dall'esagono quando ruota di mezzo giro intorno alla retta NR.
c) Supponendo nota la formula
$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx,$$
che fornisce il volume di un solido di rotazione, dimostrare le formule dei volumi di un cono e di un tronco di cono circolari retti.

La figura è la seguente; sono tracciati anche gli assi di simmetria del triangolo equilatero, ciascuno dei quali passa per due vertici opposti dell'esagono. L'esagono è quindi diviso in 6 triangoli congruenti.



Per dimostrare quanto richiesto è sufficiente dimostrare che l'area del triangolo *GMN* è 1/10 dell'area del triangolo *BHG*.
Consideriamo un sistema di riferimento non ortogonale, di centro *G* e avente per assi le rette *x*=*GB* e *y*=*GH*. L'affinità che lascia fisso *G*, che muta *M* in *B*, e *N* in *H* ha equazioni

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{GM}}x \\ y' = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{GN}}y \end{cases}$$

Ogni affinità conserva il rapporto delle aree, e tale rapporto è il prodotto dei fattori di dilatazione; si tratta in definitiva di dimostrare che

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{GM}} \cdot \frac{\overline{GH}}{\overline{GN}} = 10.$$

Non è difficile a questo punto dimostrare (per esempio fissando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in *B* e calcolando le coordinate dei vertici dell'esagono) che $\overline{GB} = 4 \cdot \overline{GM}$, e $\overline{GH} = \frac{5}{2}\overline{GN}$, e quindi la tesi. I calcoli sono in ogni caso laboriosi.

Per quanto riguarda il punto *b*): è incomprensibile il ricorso al parametro *h*, e a quell'oscura espressione; la formulazione del quesito non è solo inutilmente oscura, è dannosa. Lo studente non capisce quale sia il legame funzionale tra l'area dell'esagono e il parametro *h*, ma si rassegna e china la testa: "Non so perché, ma vogliono che esprima il volume in funzione di questo *h*; li accontento, trovo *V* in funzione del lato del triangolo equilatero, e poi sostituisco opportunamente". Ma la matematica non è questa! L'utilizzo del parametro in matematica è uno strumento di notevole rilevanza concettuale (soprattutto quando il problema viene elevato ad un livello superiore di generalizzazione): perché sprecarlo così?
Il volume richiesto è quello ottenuto mediante una rotazione completa del quadrilatero *RLMN* intorno alla retta *RN*. Tale quadrilatero è formato da tre triangoli congruenti, ciascuno di area

$$T = \frac{\sqrt{3}}{240}.$$

È possibile utilizzare il secondo teorema di Guldino: il volume di un solido generato dalla rotazione completa di una figura piana *F* intorno ad una retta complanare che non interseca *F* è uguale al prodotto dell'area di *F* per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di *F*. È sufficiente ricordare che l'ascissa (l'ordinata) del baricentro di un triangolo è uguale alla media aritmetica delle ascisse (ordinate) dei vertici.

Ma anche così i calcoli sono lunghi e relativamente faticosi.

Anche il secondo quesito non è un problema: è semplicemente un esercizio di studio di funzione. Il testo è il seguente.

2. *Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H, le facce ABCD e EFGH sono opposte e i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che*

$$\overline{BP} = x.$$

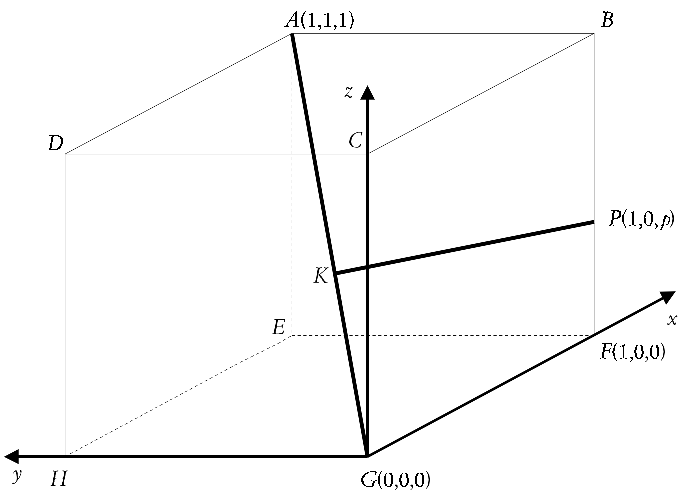
a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione:

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2 - x + 1\right)}.$$

b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver trovato, tra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti.

c) Considerato infine il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x, dalla regione piana delimitata da tale grafico, dagli assi di riferimento e dalla retta di equazione x=h (con h>0), calcolare per quale valore di h questo volume è $\frac{16}{9}\pi$.

Fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale come in figura.



Il quesito ministeriale avrebbe dovuto essere più semplice: determinare la distanza di *P* dalla retta *AG* in funzione della posizione di *P* sullo spigolo *BF*. Invece chiede solo di *verificare* una formula. Anche qui non c'è scoperta, per lo studente: è tutto già risolto, basta verificare ciò che altri hanno già fatto, e adeguarsi supinamente al contesto. C'è una curiosa analogia tra quesiti di matematica come questo, e talune tracce dei temi di italiano, in cui si propone al candidato una tesi retorica e preconfezionata, a cui si chiede in sostanza di aderire acriticamente.

Nel merito: anche quest'anno occorre calcolare una distanza nello spazio. Il quesito n°2 della maturità 94 chiedeva di calcolare la distanza di un punto da un piano, e come ha ben fatto notare V. Villani (vedi *Archimede*, anno 47, n° 1), su diversi quotidiani nazionali le soluzioni del giorno dopo presentavano errori imperdonabili. Questo può significare che non solo gli studenti, ma anche noi insegnanti abbiamo qualche difficoltà a risolvere problemi di geometria nello spazio.

Ne approfitto allora per segnalare l'esigenza di definire un curriculum per la geometria nel triennio che tenga conto di interpretare lo spazio (e anche il piano, in definitiva) come lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) dotato di prodotto scalare. In questo contesto, i problemi di distanza si semplificano notevolmente. Con riferimento alla figura, il generico vettore ***GK***, con K che varia sulla retta GA, ha componenti $[t,t,t]$, il vettore ***GP*** ha componenti $[1,0,p]$, quindi ***KP***=***GP***–***GK*** ha componenti $[1-t,-t,p-t]$. Risulta

$$\boldsymbol{GK} \perp \boldsymbol{KP}$$

se e solo se il prodotto scalare dei due vettori è nullo:

$$[1-t,-t,p-t] \times [t,t,t] = 0$$
$$t(1-t-t+p-t) = 0$$

e tralasciando la soluzione t=0, che dà il vettore nullo, otteniamo

$$t = \frac{1+p}{3},$$

da cui si ottiene la funzione richiesta.
Un altro modo di ottenere lo stesso risultato sfrutta semplici nozioni di calcolo infinitesimale, ben possedute dagli studenti di maturità; tale metodo mette in luce quanto vasto sia il campo di applicazione del calcolo infinitesimale, che non deve essere mortificato al solo scopo di studiare funzioni preconfezionate. Se indichiamo con d la distanza di $P(1,0,p)$ dal generico punto $K(t,t,t)$ della retta GA, risulta

$$\overline{GK}^2 = d^2 = (t-1)^2+t^2+(t-p)^2;$$

la distanza di P dalla retta GA si ottiene per il valore di t che rende minimo d (e quindi d^2); derivando rispetto a t e uguagliando a 0 si ottiene

$$2(t-1)+2t+2(t-p) = 0,$$

da cui, come ci aspettavamo,

$$t = \frac{1+p}{3},$$

che è certamente un minimo per d^2.

Il terzo quesito, che è stato per molti studenti un'ancora di salvezza, è il più tradizionale, convenzionale e abusato esercizio di studio di funzione, con canonico calcolo di area finale. Il testo è il seguente.
3. *In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, è assegnata la curva K di equazione:*

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{4\operatorname{sen} x}, \qquad \textit{con } -\pi < x < \pi.$$

a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi.
b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da K e dalla retta di equazione y=1.
N.B. Per il calcolo di una primitiva di 1/sen$x$ *si suggerisce di porre* $\tan(x/2)=t$.

Qual è, nelle intenzioni del formulatore, il ruolo del numero 4 nella funzione? Perché non proporre più semplicemente

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ ?$$

Quest'ultima funzione non ha flessi, e quindi (immagino) non sembra adatta a valutare le capacità del candidato di determinare gli zeri della derivata seconda. L'equivoco che qui si nasconde è il solito: il candidato è preparato se sa derivare due volte e risolvere le equazioni

corrispondenti. Secondo me questo è invece il tipico quesito inadatto a graduare (quindi a valutare la preparazione generale di uno studente): la risoluzione è relativamente meccanica, e perpetua l'idea di una matematica per ricette; anche il suggerimento finale, su come integrare 1/sen$x$, va in questa direzione: al candidato non resta altro da fare che applicare ricette pronte. Cosa vogliamo valutare, oltre al dato tecnico? Quale *maturità* è in grado di mostrare lo studente?
Aggiungo il fatto che questo tipo di quesito, tanto caro al ministero (e anche a molti docenti universitari), è oggi rapidamente risolubile con un programma come DERIVE; poiché il ministero raccomanda ufficialmente, al termine del testo: "*È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile*", qualche studente astuto avrebbe potuto controllare la funzione con la sua calcolatrice grafica, sollevando contro la commissione un contenzioso intorno al grazioso interrogativo: la calcolatrice grafica è programmabile? E lasciamo perdere le facili ironie sul fatto che il consentire una certa calcolatrice non è logicamente equivalente al vietare le altre.

Per concludere: in attesa che un ministro della pubblica istruzione abbia il coraggio di interrompere l'infelice tradizione della prova scritta di matematica alla maturità scientifica, confidiamo almeno nel fatto che i quesiti propongano problemi, non esercizi, problemi chiaramente comprensibili, che lascino al candidato ampia scelta di organizzare il proprio modello, le proprie variabili e i propri parametri, di scegliere il grado di generalità che giudica più opportuno, e anche, perché no, la prosa più adatta ad esporre la soluzione.