MATHESIS Sez. di Verbania
CERFIM Sez. di Locarno
23 APRILE 1999

I° Convegno Internazionale
Matematica e.....aspetti interdisciplinari

"Matematica e...fisica"
Prof. Michele IMPEDOVO
Liceo Scientifico G. Ferraris di Varese

Premessa
L'insegnamento della matematica è in crisi di identità. Qualcuno parla addirittura di fallimento nazionale. Un modo di rivitalizzare la matematica consiste nel restituire agli oggetti matematici una forte valenza semantica; ora che la Computer Algebra è utilizzabile su calcolatrici di piccole dimensioni, è possibile sia rafforzare le abilità sintattiche degli allievi, sia riempire di significato procedimenti e metodi matematici.
Quale campo, meglio della Fisica, si presta a quest'opera di arricchimento e di rinnovamento?
Il lavoro che segue è il resoconto di un tentativo in questa direzione: la sperimentazione LABCLASS (laboratorio in classe) promossa e finanziata dal Ministero della Pubblica Istruzione alla fine del 1997 permette a 20 licei scientifici in Italia (tra i quali il Liceo Scientifico di Varese) di far utilizzare ad ogni studente una calcolatrice simbolica e grafica TI-92.
Con questo strumento, con il sensore di posizione CBR (Calculator Based Ranger) e con le possibilità offerte dall'interfaccia grafico CBL (Calculator Based Laboratory) che gestisce sonde e sensori per l'acquisizione dati on-line, abbiamo svolto diversi lavori di esplorazione e formulazione di congetture, e di acquisizione ed elaborazione di dati da esperimenti di fisica.

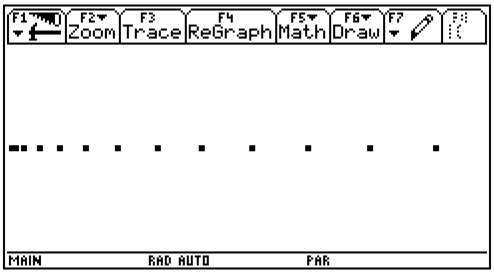

TI-92

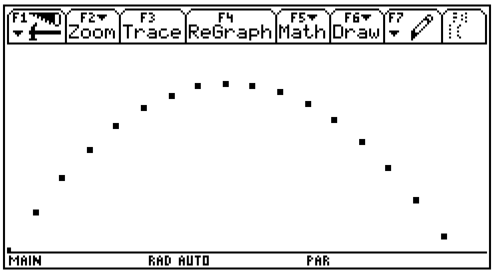

CBL

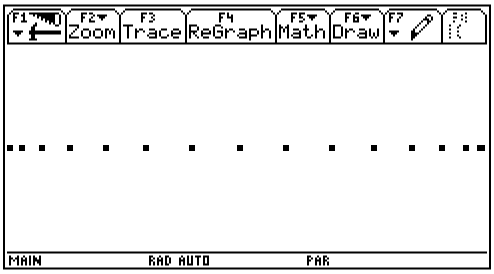

CBR

Il moto armonico
La TI-92 è particolarmente ricca dal punto di vista delle possibilità grafiche. In particolare è possibile tracciare grafici mediante equazioni parametriche, e quindi è possibile simulare

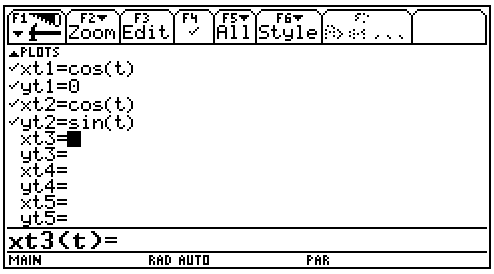
moti di punti materiali. Si può ottenere la simulazione della foto stroboscopica di un moto, scegliendo opportunamente gli intervalli di tempo. Ecco nell'ordine un moto rettilineo uniformemente accelerato, un moto parabolico, e un moto armonico.

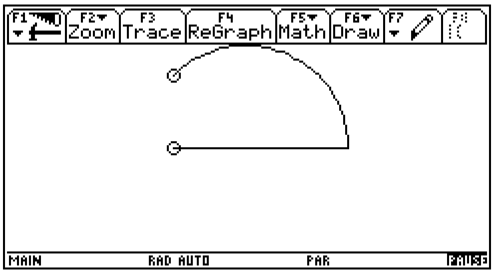


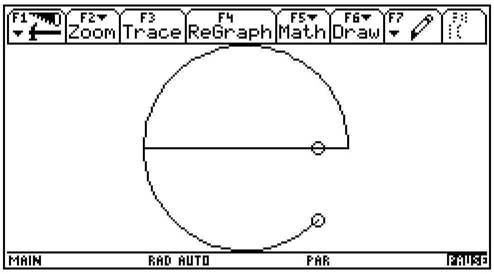




È possibile anche visualizzare più moti contemporaneamente. Molto efficace è la rappresentazione del moto armonico come proiezione sull'asse x di un moto circolare uniforme.



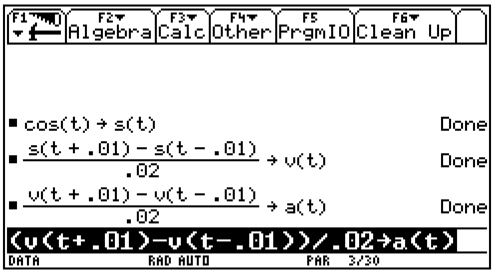




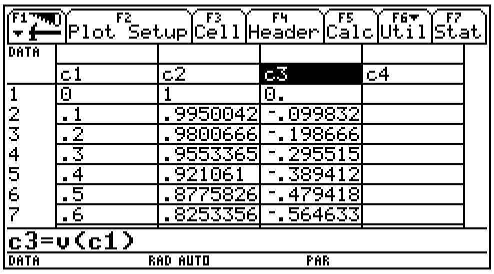
In questo modo è possibile fornire una potente illustrazione visiva delle relazioni che legano una funzione circolare al suo argomento.

Ma c'è di più: il fatto di poter impostare funzioni definite dall'utente ci solleva dalle difficoltà di calcolo (sia simbolico che numerico), e ci permette di sviluppare congetture.
Un esempio è il seguente: sia dato il moto armonico di un punto materiale di equazione $s(t) = \cos(t)$.
Un modo per approssimare la velocità istantanea è quello di calcolare la velocità media su intervalli di tempo "piccoli". Adottiamo il seguente criterio: per approssimare la velocità in un istante t (misurato in secondi), determiniamo la posizione del punto 1 centesimo di secondo prima e 1 centesimo di secondo dopo, e calcoliamo la velocità media in questo intervallo di 0.02 s.
Dal punto di vista matematico si tratta di calcolare il rapporto incrementale simmetrico intorno a t con incremento 0.01 s.

La funzione che otteniamo viene memorizzata in $v(t)$.
In modo analogo definiamo la funzione $a(t)$ come approssimazione dell'accelerazione istantanea.

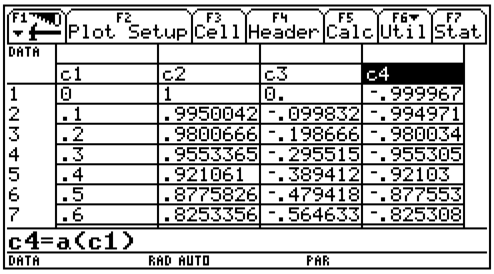


Ora proviamo a tabulare i valori di $v(t)$ ad ogni decimo di secondo. Apriamo una tabella in cui nella prima colonna c1 inseriamo la lista {0, 0.1, 0.2, …6.2} degli istanti considerati. Nella seconda colonna inseriamo la posizione, digitando semplicemente s(c1); nella terza colonna la velocità, digitando v(c2), e nella quarta colonna l'accelerazione, con a(c1).



DATA	c1	c2	c3	c4
1	0	1	0.	
2	.1	.9950042	-.099832	
3	.2	.9800666	-.198666	
4	.3	.9553365	-.295515	
5	.4	.921061	-.389412	
6	.5	.8775826	-.479418	
7	.6	.8253356	-.564633	

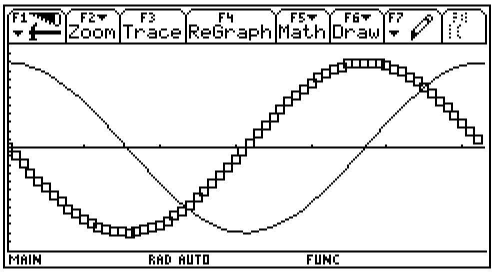
c3=v(c1)



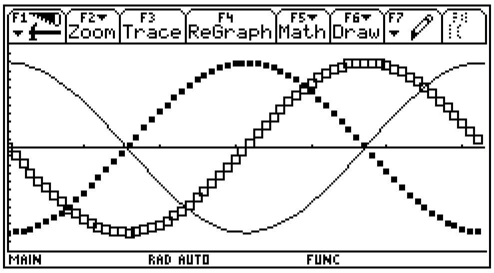
DATA	c1	c2	c3	c4
1	0	1	0.	-.999967
2	.1	.9950042	-.099832	-.994971
3	.2	.9800666	-.198666	-.980034
4	.3	.9553365	-.295515	-.955305
5	.4	.921061	-.389412	-.92103
6	.5	.8775826	-.479418	-.877553
7	.6	.8253356	-.564633	-.825308

c4=a(c1)

È possibile ora tracciare il grafico della posizione e il grafico per punti della velocità (colonna c3) in funzione del tempo, confrontando i due grafici.

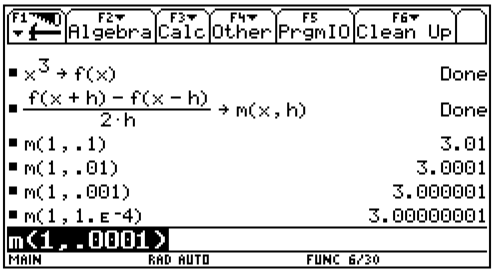


Analogamente per posizione, velocità e accelerazione.

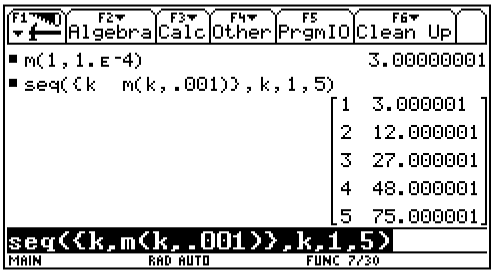


Non è difficile congetturare che sia la velocità sia l'accelerazione di un moto armonico variano con leggi anch'esse sinusoidali. Inoltre si osserva che l'accelerazione è proporzionale alla posizione, e diretta in verso opposto.
Un lavoro di questo tipo stimola il sorgere di congetture, fornisce allo studente un metodo generale di indagine (il rapporto incrementale finito come approssimazione della derivata) e introduce in modo sperimentale il concetto di limite.
Infatti è naturale chiedersi che cosa accade per incrementi sempre più piccoli. Nel caso di funzioni reali si ottengono approssimazioni sempre migliori della pendenza della funzione nel punto. Vediamo per esempio che cosa accade per la funzione $f\colon x \to x^3$. Questa volta

definiamo il rapporto incrementale come funzione sia del punto x_0 sia dell'incremento h, e valutiamo che cosa accade per esempio in x_0=1 per h=0.1, 0.01, 0.001, …



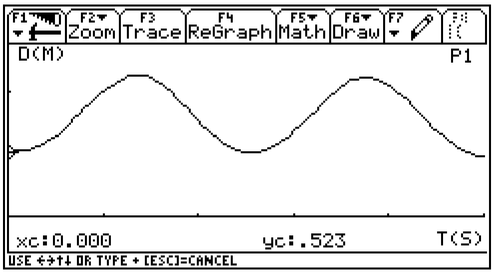
Come si vede le approssimazioni fanno sorgere facilmente la congettura che per h tendente a 0 la pendenza di $f(x)$ in 1 tende a 3.
E poiché lo studente è naturalmente portato in questi casi all'esplorazione, viene voglia di chiedersi che cosa accade nei punti di ascissa 1, 2, 3, ….



Ancora: quale relazione lega le ascisse {1,2,3,4,5} alle pendenze {3,12,27,48,75}? Ecco la possibilità di innescare un concetto più generale: quello di derivata di una funzione, come analogo della velocità istantanea per un moto unidimensionale.

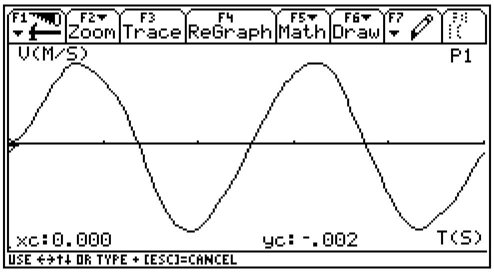
Fisica on-line

Il **CBR** (Calculator Based Ranger) è un sonar elettronico collegabile alla TI-92, e capace di campionare con una frequenza vicino ai 100 Hz: manda un segnale verso il corpo in moto e ne riceve l'eco, misurando in tal modo la distanza del corpo con intervalli di tempo che possono essere impostati tra 1 s e 1/100 s. Il CBR rileva le distanze e le invia alla TI-92; un programma si occupa di trasformare i dati in un grafico spazio-tempo.
Ecco per esempio il grafico di un oscillatore orizzontale (è uno studente che si muove avanti e indietro tra 0.5 m e 1.3 m di distanza dal CBR) in un intervallo di 5 s (il campionamento è avvenuto a circa 20 Hz).

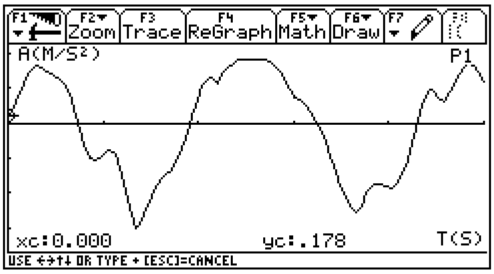


Il programma, sulla base dei dati, calcola la velocità "istantanea" del moto all'istante t_n sfruttando la posizione agli istanti t_{n-1} e t_{n+1}:

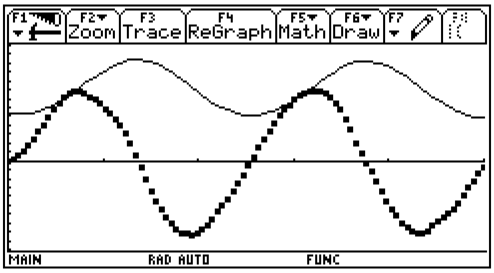
$$v(t_n) = \frac{s(t_{n+1}) - s(t_{n-1})}{t_{n+1} - t_{n-1}} .$$



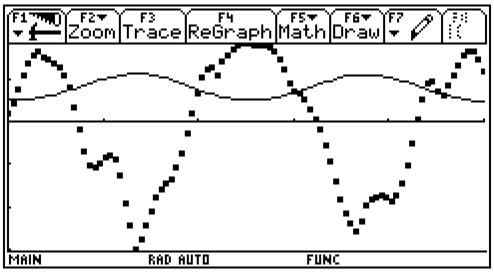
Anche la velocità appare sinusoidale. L'accelerazione dello studente invece



non è davvero una sinusoide!
Uscendo dal programma è possibile recuperare le liste di dati (tempo, posizione, velocità e accelerazione) e costruire grafici per il confronto diretto; ecco per esempio il grafico di posizione (linea continua) e velocità (punteggiata) in funzione del tempo.

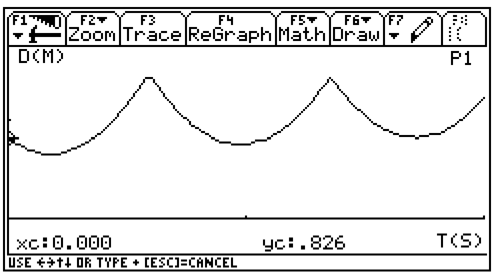


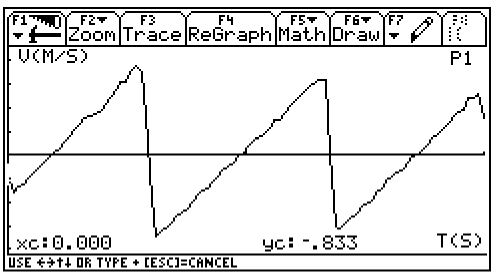
Il grafico di posizione e accelerazione è il seguente.



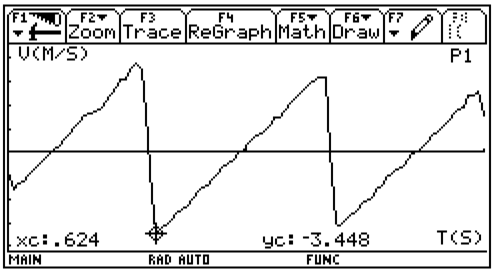
In questo modo l'allievo produce il moto da analizzare con il proprio corpo: le relazioni grafiche e concettuali tra tempo, posizione, velocità, accelerazione sono acquisite con grande evidenza semantica.

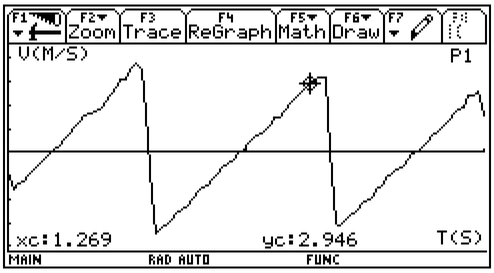
I successivi rimbalzi di una pallina sul pavimento sono rilevati dal seguente grafico (intervallo di tempo: 2 s, frequenza 50 Hz). Il CBR è tenuto in mano, ad altezza costante di circa 1.8 m e diretto verso il basso. Ecco in sequenza i grafici di posizione e velocità.





È evidente l'impulso rapissimo del rimbalzo: la velocità passa da positiva a negativa, e cresce linearmente (si avvicina e poi si allontana dal sonar) tra un rimbalzo e l'altro. È possibile ora approssimare l'accelerazione di gravità dalla variazione di velocità tra un rimbalzo e il successivo: con la funzione TRACE seguiamo la curva della velocità tra un rimbalzo e il successivo, e registriamo tempo (xc) e velocità (yc).

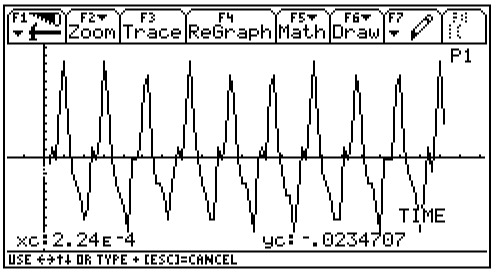


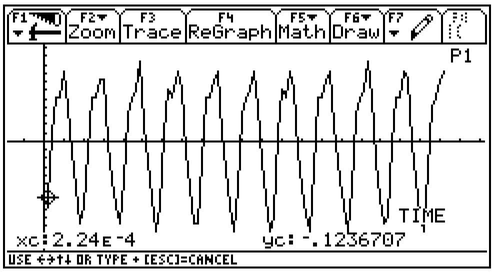


Risulta

$$g \approx \frac{2.946 + 3.448}{1.269 - 0.624} \approx 9.91 .$$

Il **CBL** è un interfaccia elettronico al quale è possibile collegare un'ampia varietà di sensori (temperatura, forza, tensione, corrente, intensità luminosa, intensità di campo magnetico, microfono, …) ed acquisire dati con frequenza di campionamento fino a 10 kHz.
Questa estrema rapidità di campionamento consente di effettuare misure impossibili da raccogliere in un normale laboratorio di fisica.
Il primo esempio è un impiego del microfono. Poiché un'onda sonora come il LA centrale possiede una frequenza di circa 440 Hz (un'oscillazione completa in circa 0.002 s) , per rilevarla occorre prendere almeno 10-20 valori di pressione per una oscillazione, quindi occorre una frequenza di campionamento tra 4000 e 8000 Hz. I due grafici seguenti rappresentano i suoni corrispondenti ad un Sol e un La della scala centrale, prodotti da un flauto traverso, che produce un'onda abbastanza semplice.





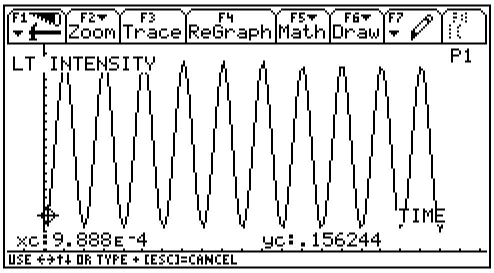
Sempre con la funzione TRACE si rileva l'intervallo di tempo tra un picco e il successivo, e si ricava:

- per il Sol un periodo di 0.0024 s, pari ad una frequenza di circa 411 Hz
- per il La un periodo di 0.0022 s, pari ad una frequenza di circa 454 Hz.

Da questi dati possiamo approssimare la costante k di frequenza tra una nota e la nota immediatamente successiva (intervallo di frequenza pari ad un semitono): poiché

$$fr(\text{La}) = k^2 \, fr(\text{Sol})$$

risulta $k \approx 1.052$, che è una buona approssimazione del valore teorico $k = \sqrt[12]{2} \approx 1.059$.
L'ultimo esperimento che vorremmo presentare riguarda ancora una sinusoide, ma del tutto inaspettata. Usiamo il sensore di intensità luminosa collegato al CBL; teniamo il sensore a distanza costante (circa 30 cm) da una lampadina da 40 W accesa. Anziché rilevare una funzione costante, ecco la sorpresa!



Se misuriamo la frequenza di quest'onda otteniamo quasi esattamente 100 Hz: a far variare l'intensità luminosa (non percepibile dal nostro occhio) è la corrente alternata a 50 Hz della rete. Un'oscillazione completa della tensione produce due oscillazioni complete dell'energia erogata (l'intensità luminosa non "sente" il verso della corrente).

Le attività proposte si sono rivelate di grande efficacia didattica e di forte impatto scientifico: oltre a studiare sul libro è possibile "fare" matematica e "fare" fisica in modo molto coinvolgente per i ragazzi, e molto produttivo per l'insegnante.