ADT
Associazione per la Didattica con le Tecnologie
2° Congresso Nazionale, ottobre 2000
Matematica e Scienze Sperimentali nella scuola riformata:
che cosa cambia con le nuove tecnologie

LA MATEMATICA NELLA SCUOLA DI TUTTI:

PERCORSI DIDATTICI E IPOTESI DI RINNOVAMENTO

Prof. Michele Impedovo

La matematica è una parte della fisica:
è quella parte della fisica
in cui gli esperimenti costano poco.
Vladimir Arnold

Alcuni assiomi, per iniziare

La scuola del futuro sarà la scuola di tutti: i problemi (logistici, didattici e culturali) della scolarità di massa riguardano già le strutture universitarie.
In questa chiave di lettura la scuola secondaria non può più permettersi di viaggiare sui binari sicuri della tradizione. La nostra scuola è tuttora permeata di forte idealismo: i suoi compiti precipui sembrano essere tuttora la formazione della "futura classe dirigente" e la selezione degli studenti. È una scuola essenzialmente rivolta ai migliori. L'alunno che fa da modello all'attuale struttura didattica è il futuro studente (o addirittura ricercatore) del corso di laurea in matematica (in lettere, filosofia, in fisica, …); lo studente deve essere portato rapidamente "sulle spalle dei giganti" per guardare più lontano. Questa interpretazione della trasmissione del sapere è inconsapevolmente autoritaria, considera le discipline e le conoscenze come oggetti sacri e statici, non ha bisogno di dotarsi di una epistemologia né tanto meno di discuterla con gli studenti: la cultura (la cultura occidentale, si intende) si autogiustifica ed è autoreferente, nonostante non sia servita nemmeno ad evitare massacri ed olocausti nell'ultimo (*breve*) secolo.
Nella scuola di tutti la continua ridefinizione di metodi, contenuti, finalità del sapere è invece essenziale. Non abbiamo più il compito di portare pochi studenti sulle spalle dei giganti: non dobbiamo più formare il futuro ricercatore, bensì il futuro cittadino.
Gli strumenti di analisi e i paradigmi del passato non ci possono servire per gestire questa dirompente novità.
La scuola non ha più (se non in minima parte) il compito di selezionare e deve essere più generosa, molto più generosa che in passato: deve dare molto di più e chiedere molto di meno. La stessa valutazione (che è tuttora quasi esclusivamente intesa come valutazione delle prestazioni degli studenti) deve cambiare struttura e rivolgersi principalmente all'efficacia del sistema formativo.
Occorre molto coraggio per cambiare metodi, regole e contenuti di tradizione ormai secolare, in matematica soprattutto. Occorre molto coraggio per accettare che i nostri studenti sapranno in futuro cose diverse da quelle che noi abbiamo studiato e imparato. Occorre molto coraggio per spezzare consuetudini didattiche che hanno ormai il sapore di veri e propri tabù. Soprattutto in matematica.
Occorre molto coraggio per cambiare, ma è indispensabile. Anche per arricchire e rivitalizzare l'immagine professionale ormai noiosa, polverosa e dimessa dell'insegnante.

Alcune domande

Nessuno si senta indignato quando si mettono in discussione interi capitoli e strutture apparentemente sacre del sapere matematico: è un esercizio critico comunque utile. Può servire ad accorgersi con stupore e liberazione che il re è nudo, oppure al contrario a consolidare le nostre convinzioni e ad arricchire il nostro insegnamento.

I ragazzi che escono dalle scuole medie non hanno solide esperienze numeriche; molti di loro non sanno che 3/4 è 0.75, né che $\sqrt{2}$ è circa 1.4, né sanno calcolare a spanne il 20% di 1500. In compenso hanno spesso già imparato le litanie sui monomi "che non si possono sommare" e sul "portar di qua e portar di là": i non-matematici che insegnano alle medie, per colpa esclusivamente nostra, credono che questa sia matematica. Perché insegnare l'algebra a ragazzi che hanno esperienze numeriche così deboli?

Dobbiamo ancora insegnare la geometria euclidea facendo ricorso all'armamentario assiomatico-deduttivo e senza far ricorso al metodo delle coordinate? I triangoli sono ancora i protagonisti assoluti? E i criteri di congruenza dei triangoli hanno ancora un valore formativo? Se proprio si vuole conservarne la memoria non è meglio enunciarli per esempio così: date le misure di due lati e dell'angolo compreso un triangolo è univocamente determinato a meno di isometrie (e insegnare a calcolare gli altri lati ed angoli)? E i criteri di similitudine dei triangoli? Come fare poi a dire che tutte le parabole sono simili e non tutte le ellissi sono simili? Come fare a dire che la combinazione lineare di sinusoidi di ugual periodo è ancora una sinusoide? Che cos'è davvero un angolo?

Che senso ha dare la definizione (quasi sempre sbagliata) di monomio, di monomi simili, di parte letterale e parte numerica quando poi non si precisa il campo numerico nel quale si opera? $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x$ è un monomio? Che cosa vuol dire (intendo dal punto di vista strettamente matematico) che "due monomi si possono sommare solo se sono simili"? Come mai ax e bx si sommano e danno $(a+b)x$? Perché non si parte dai polinomi, che sono i veri protagonisti del calcolo letterale?

Il valore assoluto di un numero è davvero "il numero stesso a cui si <u>sopprime</u> il segno" (citazione da uno dei testi più adottati del regno)? Sarà a causa di tali definizioni che molti studenti universitari sono convinti che il modulo di $-a$ sia a?

E i "principi di equivalenza", che ruolo hanno in un sapere matematico strutturato e solido? Dogmi? Atti di fede? Un principio di equivalenza in matematica è come un principio della termodinamica in fisica?

Che cos'è (intendo come oggetto matematico) una "identità"? E una "formula"?

Perché bisogna "discutere" un'equazione? Non è meglio discutere se un modello matematico è appropriato? Perché confondere le giovani menti dicendo che l'uguaglianza

$$\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

"non è sempre vera" (quindi è falsa) quando è evidente che

$$(x+1)(x-1)=x^2-1$$

è vero? Perché non si distingue tra polinomi e funzioni polinomiali?

Dato che **R**, il campo dei numeri reali, non è algebricamente chiuso, è ancora sensato impiegare molto tempo a insegnare raffinate tecniche per risolvere particolari equazioni e disequazioni (intere, fratte, irrazionali, trigonometriche, esponenziali, logaritmiche, …)? A parte le equazioni e i sistemi <u>lineari</u> in un campo, che sono dotati di una forte struttura concettuale e operativa, non è meglio dire che esiste un'unica equazione: $f(x)=0$ e un'unica disequazione: $f(x)>0$, e "leggere" le soluzioni sul grafico di $f(x)$?

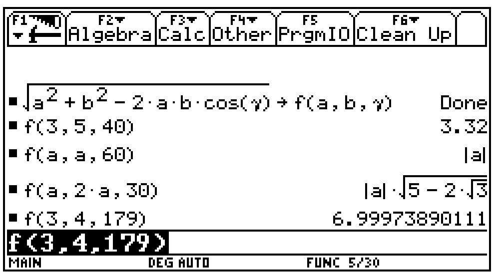
Perché insistere con l'ottocentesco "problema geometrico"? Non è che dopo due millenni e rotti la percezione dello spazio è mutata? Ora che vediamo ogni giorno il nostro piccolo pianeta ripreso dai satelliti non sarà giunta l'ora di occuparci di percorsi minimi sulla sfera, anche a costo di mandare in pensione gli ortocentri? Non sarà giunto il momento di parlare equazioni parametriche, di curve

nel piano e superfici nello spazio, non sarà ora di parlare di *computer grafica*? Come si fa a disegnare un poliedro?
È utile imporre *formule* e *regole*? Lo studente deve conoscere la "formula" risolutiva delle equazioni di secondo grado? E la formula "ridotta"? Per operare con le frazioni è proprio necessario "*ridurle ai minimi termini*"? Anche se si deve sommare 1/2 e 2/6? È proprio necessario trovare il *mcm* dei denominatori? Nelle operazioni con le frazioni algebriche c'è qualcosa di nuovo rispetto alle operazioni tra frazioni? Che cosa vuol dire esattamente "semplificare"?
È ancora possibile ignorare le approssimazioni, gli ordini di grandezza? È meglio scrivere $2\sqrt{2}$ oppure $\sqrt{8}$? È utile sapere che sin(60°) = $\sqrt{3}/2$?
È ancora possibile ignorare il software didattico? Perché studiare funzioni che possiamo tracciare subito con una calcolatrice, risolvere disequazioni di cui possiamo leggere le soluzioni sul grafico?
E il *dx*? Che oggetto matematico è? È un numero, una funzione, un'intuizione, che cosa? Perché si continuano ad usare simboli sbagliati come $\frac{dy}{dx}$ o inopportuni come $\int f(x)dx$?

La matematica sembra essere l'unica disciplina in cui prima di dire qualunque cosa bisogna interrogarsi sui fondamenti, sui concetti primitivi, sugli assiomi, sulle definizioni: nell'insegnamento non è sempre stato così. Nella ricerca è sempre successo il contrario. Il rischio di questa cattiva interpretazione della matematica (che fa presa soprattutto sui sensi di colpa dei non-matematici, a cui è affidato il fondamentale compito della formazione primaria) è che si insegni una sorta di noiosa e fastidiosa "meta-matematica": per mesi e anni si costruiscono impalcature preliminari essenzialmente sintattiche (a volte zoppicanti o addirittura sbagliate) ma gli studenti non ne vedranno mai il valore semantico.
Ecco quindi il bagaglio degli strumenti di tortura responsabili dell'insuccesso della matematica: formule, regole, esercizi di consolidamento, prescrizioni pedanti e insensate, autoritarismo sintattico e vuoto semantico. Certa matematica che si insegna assomiglia alle riunioni della mia vecchia sezione del CAI (Club Alpino Italiano) dedicate al "Ripasso delle tecniche di arrampicata"; ma in montagna, quando ci andiamo?
Mi piace invece pensare alla matematica come un lago nel quale ci si può tuffare, in qualunque momento e in qualunque punto, perché, come dice Arnold, "gli esperimenti costano poco"

Con la calcolatrice senza libro di testo

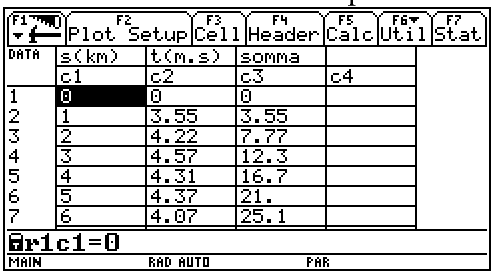
Da quest'anno (anche formalmente) è possibile non adottare il libro di testo e sostituirlo con "materiale didattico"; è ciò che ho fatto. Ciascuno studente di terza liceo scientifico ha la propria TI-89. Che cosa è cambiato?
Innanzitutto l'interesse per la matematica da parte degli studenti. E di conseguenza il profitto: alunni che "andavano male" al biennio hanno avuto ottime valutazioni.
È cresciuta e si è imposta un'attenzione costante per gli algoritmi: se un certo risultato si può ottenere mediante un programma, lo si implementa e la calcolatrice si arricchisce di un nuovo strumento che generalizza la soluzione di un'intera classe di problemi. Per esempio, dati due lati e l'angolo compreso di un triangolo, il terzo lato è funzione di quelli.

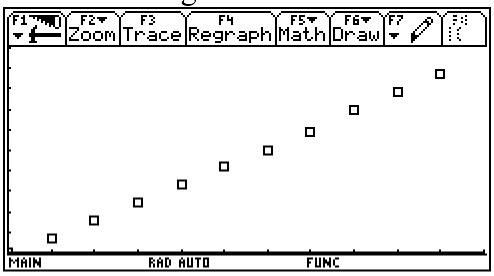


Il tempo dedicato agli algoritmi si è quindi ampliato in modo naturale.
Le approssimazioni sono diventate essenziali. Il seno e il coseno di un angolo quasi mai sono stati espressi in forma simbolica. Si perde la conoscenza degli "angoli notevoli".
Le "formule" sono sparite dal linguaggio quotidiano, che invece si arricchisce di nuovi nomi, i nomi delle funzioni e dei programmi costruiti dagli studenti. Ecco che nascono nuovi oggetti linguistici che corrispondono ad oggetti matematici. Gli studenti usano con convinzione parole come "polfun" o "ang2vet" e le scrivono sui compiti in classe.
Nasce una nuova sintassi, quella della calcolatrice: è la sintassi dell'informatica (che è sintassi per davvero, non è la sintassi zoppicante dei nostri libri di testo), che insegna a gestire espressioni, in forma simbolica e in forma approssimata, funzioni, liste, vettori; insegna a scegliere e manipolare le strutture-dati più opportune. Insegna ad esprimersi in un nuovo linguaggio: il linguaggio di programmazione.
Si instaura una forte e naturale dipendenza dall'esperimento: si formulano e si controllano ipotesi, si manipolano numeri e tabelle, si tracciano e si esplorano i grafici. Un esempio: dico "nella funzione

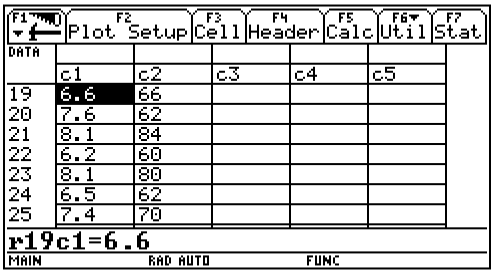
$$x \to ax^2+bx+c$$

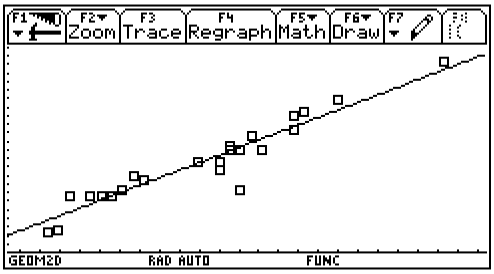
non c'è (a differenza di a e c) un immediato significato geometrico del parametro b; ci dà la posizione dell'asse, ma solo se letto insieme ad a". Dopo qualche giorno uno studente mi viene a dire: "ho trovato il significato geometrico di b: è la pendenza della funzione nel punto in cui interseca l'asse y". Giusto!
Si sviluppa una naturale attenzione ai dati reali e cresce il desiderio di interpretarli.
Uno studente che corre mi porta i dati parziali dell'ultima gara sui 10 km.



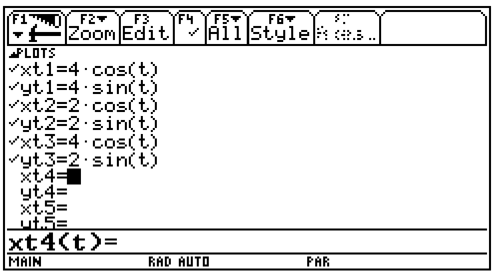


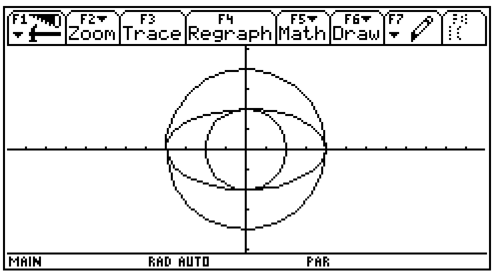
Si confrontano le medie in pagella degli studenti che hanno appena sostenuto l'Esame di Stato con il voto finale d'esame: tabella e grafico (da 5 a 10 la media, da 50 a 100 il voto). Quest'anno la commissione ha pressoché confermato le valutazioni del consiglio di classe: è facile parlare di regressione lineare.



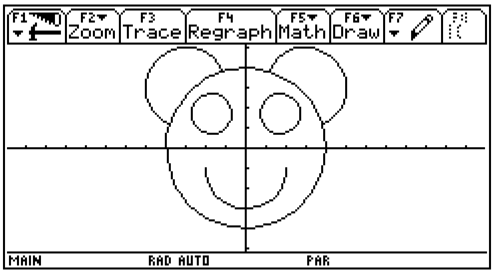


L'apprendimento della matematica passa per strade non ortodosse e persino per una sorta di competizione con l'insegnante: studiamo le equazioni parametriche della circonferenza e dell'ellisse.

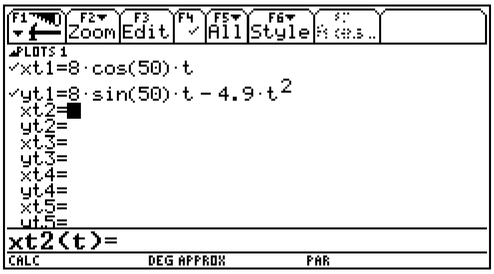


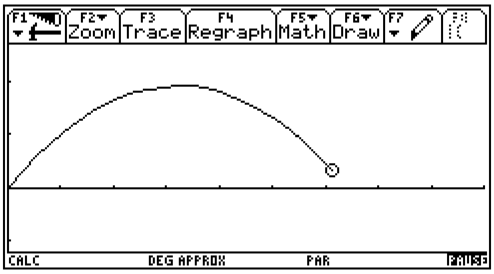


Uno studente arriva con la sua calcolatrice: “Lei è capace di disegnare questo orsetto?”

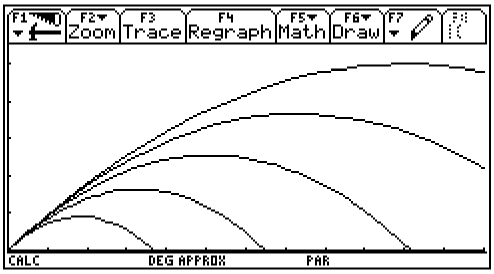


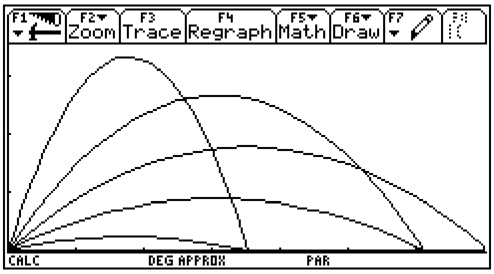
La scelta di introdurre nel piano e nello spazio direzioni privilegiate (gli assi) lungo le quali tradurre la posizione di un punto in numeri, lungo le quali scomporre e ricomporre le proprietà geometriche porta inevitabilmente all’approccio con uno dei concetti fondamentali del sapere scientifico: il vettore. Dato un punto P, i rapporti di proiezione del vettore <u>*OP*</u> sull’asse x e sull’asse y sono per definizione il coseno e il seno della coordinata angolare di <u>*OP*</u>; queste funzioni sono introdotte subito. Il modello più semplice di spazio euclideo è naturalmente lo spazio fisico, quello della nostra percezione. Un modo di “vedere” lo spazio è allora quello di farci muovere dei punti e osservarne le traiettorie. Mediante le equazioni parametriche si può simulare un moto parabolico: il moto si scompone lungo le direzioni orizzontale e verticale secondo il coseno e il seno dell’angolo di tiro.





Si può analizzare il moto al variare della velocità iniziale oppure dell’angolo di tiro.



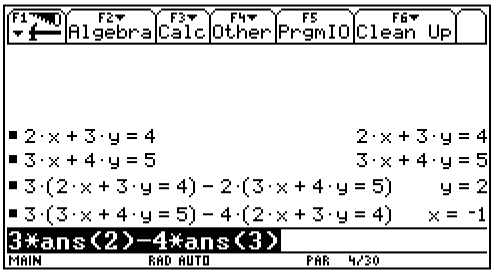


Gli esercizi “di consolidamento” diventano rari. Il consolidamento passa proprio per il gran numero di tentativi ed errori che la calcolatrice consente di fare senza danni.
La struttura sequenziale del cammino didattico prefissato all’inizio dell’anno diventa instabile: problemi nuovi si impongono all’attenzione a mano a mano che si procede, dalle domande degli studenti nascono percorsi non preventivati.
Durante l’anno, a turno, ogni studente esegue la relazione scritta della lezione precedente e ogni lezione inizia con questa relazione; le relazioni vengono allegate al “Quadernone” (è una vecchia idea di Giovanni Prodi) che a poco a poco cresce e raccoglie tutto il lavoro svolto, i problemi proposti, i tentativi di soluzione, gli esercizi, i testi dei compiti in classe, i programmi e le funzioni implementate. Alla fine dell’anno il Quadernone è un grosso volume in cui c’è tutto quello che si è fatto e che in qualche modo sostituisce il libro di testo. Prima del compito in classe si fanno fotocopie delle ultime pagine.
Ormai quasi tutti gli studenti hanno il computer a casa, oppure possono facilmente usare quello di un amico o di un compagno di classe; a partire da quest’anno ci siamo dati l’impegno di non scrivere più il Quadernone a mano, ma di scrivere in Word utilizzando l’Equation Editor e

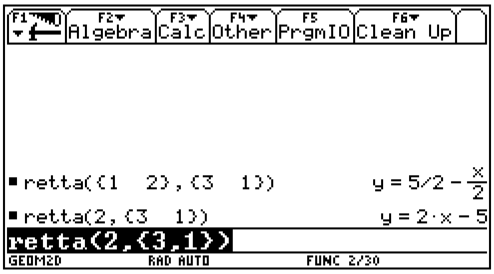
importando le schermate della TI-89 con il Graph-Link. Il risultato è particolarmente gradevole e gli studenti ne vanno fieri.

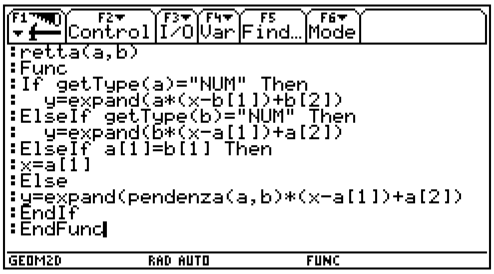
Calcolo simbolico e algoritmi

La matematica è cambiata profondamente in questi ultimi anni, anche a causa della *computer algebra* che consente di realizzare un antico sogno: il calcolo simbolico automatico. L'utilizzo di strumenti di calcolo simbolico consente di ridurre in modo drastico la pedanteria di certe tecniche di calcolo e al tempo stesso di <u>strutturare</u> il calcolo: l'aspetto semantico è favorito (come è giusto che sia), l'aspetto sintattico (questa volta è sintassi per davvero) è finalmente trasparente. Per esempio, un'equazione lineare in due incognite è un oggetto matematico: due equazioni si possono sommare, una equazione si può moltiplicare per un numero reale; un sistema lineare si risolve mediante la combinazione lineare delle equazioni.

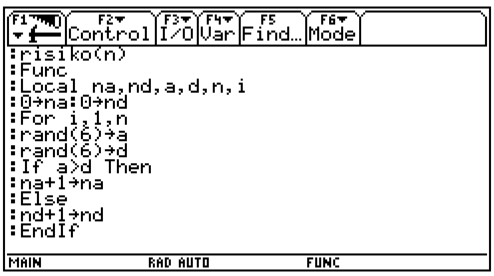


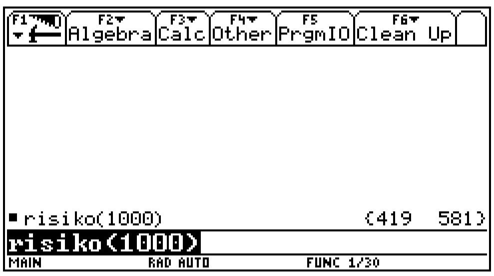
Argomenti tradizionalmente ignorati (la statistica) a causa della complessità di calcolo (con carta e penna) si impongono ora in modo naturale, perché l'aspetto semantico prevale, e le routine di calcolo sono *progettate* anziché *svolte*. Si impone allora un nuovo modo di analizzare le funzioni più importanti (funzioni lineari, funzioni potenza, funzioni esponenziali, funzioni periodiche): il *fitting*, cioè il determinare la "miglior" funzione che approssima un insieme di dati.
Come già detto, un nuovo protagonista si impone: l'algoritmo. Innanzitutto la calcolatrice viene utilizzata per automatizzare il calcolo (anche in questo caso l'aspetto progettuale è prevalente su quello di routine) con funzioni definite dall'utente. Ecco per esempio una semplice funzione che fornisce l'equazione di una retta per due punti, oppure di una retta dati un punto e la pendenza.





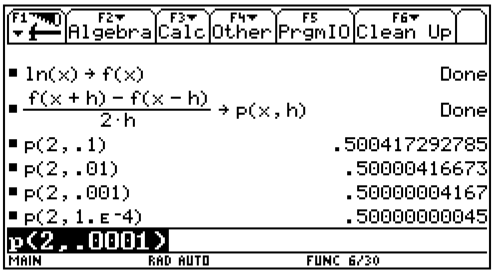
In secondo luogo l'algoritmo può simulare un vero e proprio esperimento matematico (*gli esperimenti costano poco!*). Per esempio il programma seguente simula il gioco del Risiko quando l'attaccante e il difensore tirano un dado a testa: vince chi realizza il numero maggiore e in caso di parità vince il difensore. La funzione risiko(n) simula *n* battaglie 1 dado contro 1 e fornisce in uscita il numero di successi dell'attaccante e del difensore.



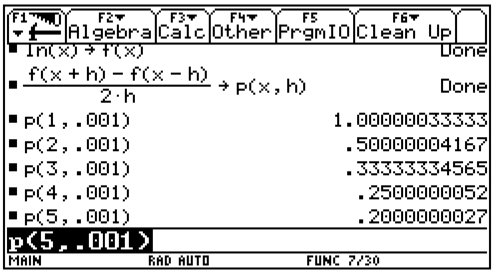


La probabilità teorica di successo è $15/36 \approx 42\%$ per l'attaccante e $21/36 \approx 58\%$ per il difensore: ecco "l'irragionevole successo della matematica" all'opera. Si dice che la geometria sia il primo capitolo della fisica; la probabilità allora è il secondo capitolo.

In terzo luogo l'algoritmo è uno strumento didattico, che l'insegnante può piegare alle proprie esigenze. Uno dei limiti dell'insegnamento tradizionale (quello che deve portare rapidamente l'allievo sulle spalle dei giganti) è la *generalizzazione precoce*: si saltano fasi importanti di visualizzazione e di esperienza dei concetti. Per esempio l'approssimazione della pendenza di una funzione in un punto (mediante il rapporto incrementale simmetrico) è molto semplice ma molto efficace per introdurre ai concetti del calcolo infinitesimale. Si può approssimare la derivata di $\ln(x)$ in x_0=2 diminuendo via via l'incremento.

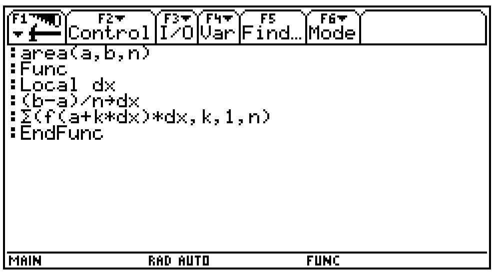


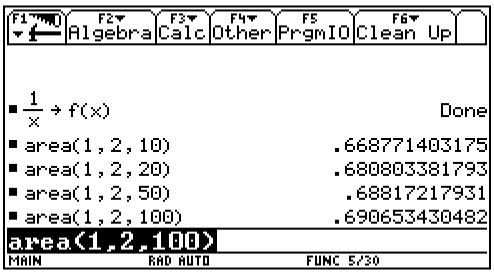
Oppure si può esplorare il comportamento della pendenza di $\ln(x)$ al variare di x_0.



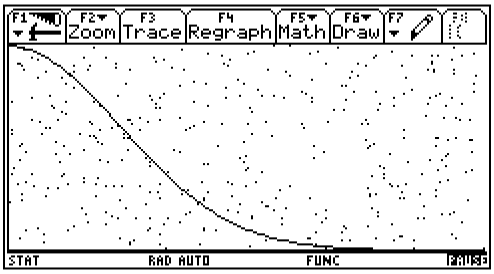
Osservare come varia l'approssimazione è molto più importante che imparare che "la derivata di $\ln(x)$ è $1/x$".

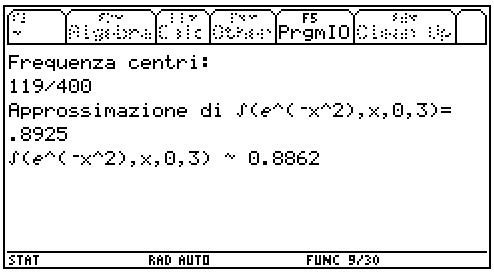
Nello stesso spirito di arricchimento dell'esperienza con gli oggetti matematici (con lo scopo di avvicinare alla definizione) si può approssimare l'integrale di una funzione $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$. A quale numero tende l'approssimazione di $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ al crescere del numero di suddivisioni?





Oppure ancora: la programmazione può rendere "spettacolare" un concetto o un procedimento; ecco per esempio il metodo Montecarlo applicato a $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$.





Una proposta di curriculum

Ritengo che qualsiasi proposta di rinnovamento dei programmi non possa prescindere da una discussione sui contenuti. Condivido l'opinione di chi spera che la riforma della scuola secondaria preveda un'organizzazione modulare dei corsi, in modo che si possa trasmettere "contenuti minimi" a tutti e che si prevedano corsi di approfondimento per chi è interessato a scelte universitarie di tipo scientifico. Una cosa è certa: gli attuali programmi "sperimentali" sono troppo vasti, hanno aggiunto molto e non hanno tolto nulla, anche per quanto riguarda le tecniche di calcolo. Occorre avere molto coraggio per tagliare, ma è indispensabile.
Un'altra cosa è certa: la prova scritta di matematica al liceo scientifico ha finito per impoverire la valenza culturale della disciplina e ha di fatto favorito un insegnamento rivolto alle tecniche di calcolo. La prova scritta di matematica, finora basata prevalentemente sullo studio di funzioni e sul problema geometrico, va ripensata radicalmente; il primo cambiamento deve essere la caduta del divieto di utilizzare calcolatrici programmabili all'esame. Piuttosto occorre pensare a nuove tipologie di problemi e nuove forme di valutazione.
La seguente proposta di temi da trattare nel ciclo secondario tiene conto della possibilità di utilizzare una calcolatrice grafica e simbolica a scuola, a casa e all'esame.

Numeri

- Numeri naturali
- Addizione e moltiplicazione
- Elementi neutri: 0 e 1
- Elemento opposto e elemento inverso; operazione inversa
- L'algoritmo della divisione: le operazioni **div** e **mod**
- Numeri primi, teorema fondamentale dell'aritmetica
- Numeri interi
- Le strutture numeriche $\mathbf{Z}_n$ e $\mathbf{Z}_p$
- Le successioni ricorsive
- Il simbolo di sommatoria Σ. La serie geometrica
- Numeri decimali finiti e infiniti (la serie geometrica di ragione 1/10)
- Lunghezza del periodo
- Numeri decimali periodici e non periodici
- Numeri reali e approssimazioni

Probabilità

- La probabilità come rapporto
- Probabilità 0 e 1
- Le prove ripetute: probabilità e frequenza relativa
- Prodotto di probabilità: i grafi ad albero
- La distribuzione binomiale

Statistica

- Indici di sintesi e di variabilità
- Regressione, correlazione

Polinomi

- La scrittura posizionale e polinomiale dei numeri decimali
- Coefficienti e grado di un polinomio
- Addizione e moltiplicazione
- Algoritmo della divisione
- Teorema di Ruffini
- Equazioni e sistemi lineari
- Equazioni quadratiche
- Equazioni polinomiali
- Interpolazione polinomiale

Geometria euclidea del piano e dello spazio

- Vettori: addizione, multiplo reale
- Vettori paralleli
- Il prodotto scalare e il teorema di Pitagora
- Vettori perpendicolari
- Componenti cartesiane: coseno e seno di un angolo
- Coordinate polari
- Angolo tra due vettori
- Equazione cartesiana della retta nel piano in $\mathbf{R}^2$
- Pendenza e inclinazione
- Equazioni parametriche della retta e del piano in $\mathbf{R}^3$
- Equazione cartesiana del piano in $\mathbf{R}^3$
- Intersezioni
- Distanze e angoli
- Circonferenza e sfera
- Coordinate cilindriche, coordinate sferiche
- Distanze sulla sfera

Curve nel piano e superfici nello spazio

- Equazioni parametriche della circonferenza e dell'ellisse in $\mathbf{R}^2$
- Approssimazione di π
- Equazioni parametriche della sfera e del cilindro in $\mathbf{R}^3$
- Moto rettilineo uniforme
- Moto circolare uniforme
- Moto parabolico
- Moto armonico

Funzioni

- La funzione lineare $x \to ax+b$
- Pendenza
- La regressione lineare: il coefficiente di correlazione
- La funzione potenza $x \to ax^b$
- Le funzioni polinomiali $x \to a_n x^n + \ldots + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

- Le funzioni esponenziali $x \to ab^x$
- Le funzioni periodiche $x \to a\sin(bx+c)$
- Zeri e segno di una funzione
- Crescere e decrescere di una funzione
- Traslazioni (cambiamento dell'origine) e dilatazioni degli assi (cambiamento delle unità di misura)
- Il metodo dei minimi quadrati
- Approssimazione polinomiale
- La curva normale $Ae^{-B(x-C)^2}$

Calculus

- Successioni e serie
- Approssimazione di π e di e
- Derivazione numerica e funzione derivata
- Polinomi di Taylor
- Integrazione numerica e teorema fondamentale
- Il metodo Montecarlo

Algoritmi (esempi)

- Libreria di funzioni per la geometria analitica
- Risoluzione di equazioni
  - Metodo di bisezione
  - Metodo di Newton
- Derivazione numerica
- Integrazione numerica
- Simulazioni per il calcolo di probabilità

L'avvento del software didattico e delle calcolatrici simboliche hanno prodotto una sostanziale novità: possiamo ora agevolmente organizzare "esperienze fisiche" di oggetti matematici come polinomi, matrici, funzioni, liste, algoritmi. Possiamo buttare via la zavorra di regole e formule (compresa, ad esempio, la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado) e concentrarci sui processi che conducono ad esse; la pedagogia ci insegna che nel calcolo bruto e nell'applicazione di formule il ragionamento matematico è coinvolto in minima parte: capire la matematica significa soprattutto capire le domande che essa pone.