Qual è la "miglior" funzione?

Dallo studio di funzioni alla ricerca della "miglior" funzione che approssima i dati

Michele Impedovo

Lettera Matematica P.RI.ST.EM, n° 30, dicembre 1998

Perché mai tante menti si rifiutano di capire la matematica? Non c'è qualcosa di paradossale in tutto questo? Ma come, ecco una scienza, la matematica, che fa appello solo ai principi fondamentali della logica (al principio di non contraddizione, ad esempio), a ciò che costituisce, per dir così, l'ossatura del nostro intelletto, a ciò di cui non potremmo spogliarci senza smettere di pensare, e ci sono persone che la trovano oscura! e sono addirittura la maggioranza! (…) Ecco un problema, di non facile soluzione, che deve imporsi all'attenzione di chiunque voglia dedicarsi all'insegnamento.

Henri Poincaré

Uno dei cavalli di battaglia dell'insegnamento secondario, puntualmente confermato nei problemi (si fa per dire) di maturità scientifica, è il cosiddetto *studio di funzione*, con il suo seguito di canonici massimi o minimi e improbabili aree sottese. A onor del vero le cose non vanno meglio all'università: tra fantasmi come *o piccoli* e *O grandi*, e simboli fuorvianti e didatticamente inefficaci come dy/dx e $\int f(x)\,dx$, si perpetua un insegnamento del calcolo infinitesimale che rappresenta uno dei modelli più radicati di quella **scienza normale** di cui parla Thomas Kuhn nel suo " La struttura delle rivoluzioni scientifiche".
È ben vero che il concetto di funzione è fondamentale, anzi al liceo scientifico potrebbe essere uno degli assi portanti dell'intero curriculum. Tuttavia esistono da tempo strumenti automatici di calcolo che consentono non solo di tracciare ed esplorare con ottima approssimazione grafici di funzioni, ma anche e soprattutto di confermare tali approssimazioni mediante calcolo simbolico.
L'interesse verso il grafico di funzioni potrebbe dunque decrescere rapidamente. Sta invece lentamente crescendo l'interesse verso un nuovo modo di porsi di fronte alle funzioni, che in un certo senso è capovolto: anziché descrivere una funzione data, l'obiettivo è quello di **stabilire** la "miglior" funzione da adottare per descrivere un certo evento. Naturalmente l'aggettivo "migliore" va qui inteso non in senso estetico o morale, ma in senso matematico: si cerca una funzione che ottimizzi certi parametri.

La ricerca della miglior funzione da adattare a n punti è un esempio di matematica fatta con un certo spirito critico. Voglio qui presentare qualche esempio di attività di questo tipo, con la speranza di provocare una discussione. Lo strumento utilizzato in classe per queste attività è la TI-92: nell'ambito della sperimentazione Labclass del MPI (Dir. Classica) abbiamo la possibilità di far lavorare ogni allievo con la propria calcolatrice.

La retta di regressione lineare

Il problema che poniamo è quello di stabilire in modo ragionevole, sulla base delle informazioni disponibili, un buon modello (una retta, una curva esponenziale, una funzione potenza, …) per i dati disponibili.
Il primo approccio ad una approssimazione (almeno locale) di una crescita o di una decrescita è quello **lineare**: si tratta di determinare la miglior funzione lineare

$$x \to ax+b$$

che approssima n punti. Questo è a mio avviso un tema che dovrebbe stabilmente far parte del curriculum della scuola secondaria. Non uso a caso il termine *funzione lineare* anziché *equazione della retta* (e non uso a caso il simbolo $x \to ax+b$ anziché $y=ax+b$): perché non ridimensionare la tradizionale *geometria analitica*, con il suo bagaglio di rette e coniche, a favore del concetto di **funzione**?

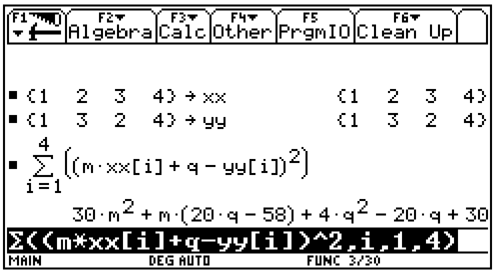
Il metodo solitamente adottato (e implementato dai diversi *Computer Algebra System*) per definire la *miglior* retta è quello dei *minimi quadrati*.
La miglior funzione lineare, o *retta di regressione*, o *retta dei minimi quadrati*, che approssima n punti (x_i,y_i) è quella per la quale è <u>minima</u> la somma S dei quadrati degli *scarti*

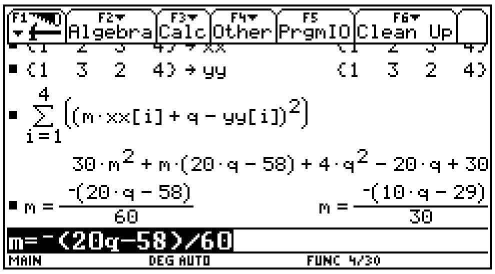
$$|ax_i+b-y_i|$$

dei punti dalla retta stessa:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \ .$$

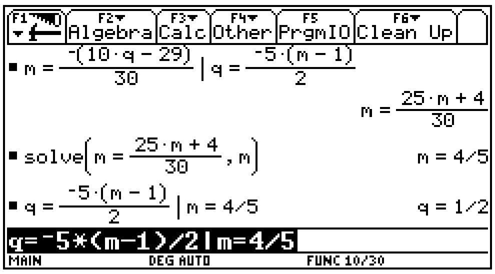
Per minimizzare S non occorrono le derivate: se si pensa S come polinomio in a (e b come parametro), il grafico è una parabola con la concavità verso l'alto; il valore di a che rende minimo S è l'ascissa del vertice. Analogo discorso per b.
È bene svolgere con gli studenti almeno una volta questo calcolo con carta e penna, o meglio ancora con la TI-92: vediamo un esempio semplice, con i punti (1,1), (2,3), (3,2), (4,4).
S è un polinomio $S(a,b)$ di secondo grado in a e b. Sviluppando e ordinando rispetto ad a si ottiene una relazione lineare tra a e b. In modo analogo si può fare per b.

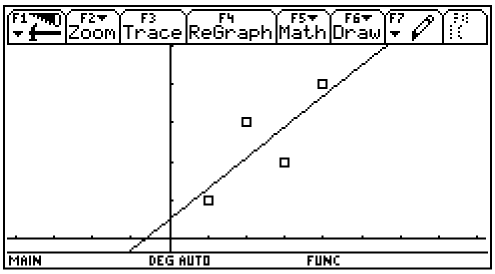




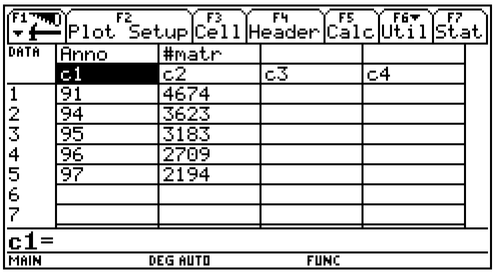
Risolvendo le due equazioni si ottiene la soluzione m = 4/5, q = 1/2. La funzione lineare cercata è dunque:

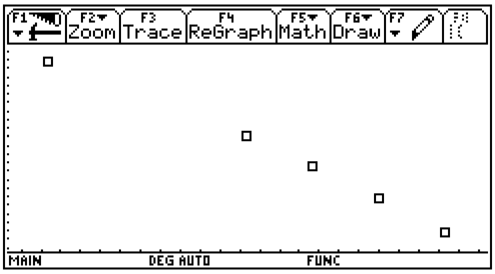
$$x \to \frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \ .$$



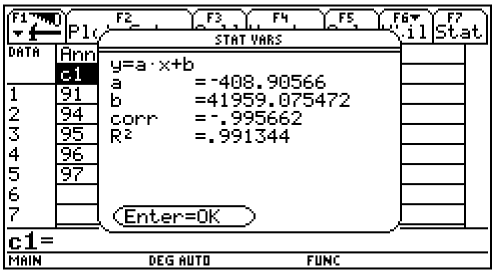


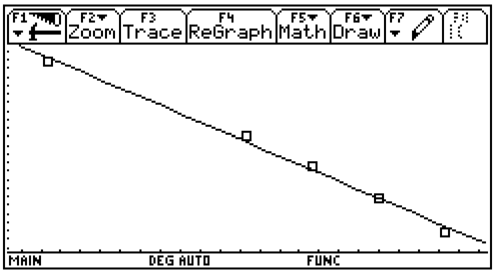
Naturalmente quando il numero di punti è elevato non ha più senso utilizzare carta e penna.
La TI-92 mette a disposizione nell'ambiente Data/Matrix Editor la possibilità sia di tracciare un grafico a dispersione dei dati, sia di calcolare la curva di regressione che si vuole adottare, scegliendola tra diverse possibili funzioni di regressione (lineare, quadratica, cubica, esponenziale, potenza, logaritmica, …).
Vediamo un esempio che ci interessa: il numero di iscritti al primo anno dei Corsi di Laurea in Matematica in Italia.





L’andamento sembra approssimare una decrescita lineare. Quanti iscritti possiamo ragionevolmente aspettarci nel 98? Scegliamo LinReg dal menù Stat.

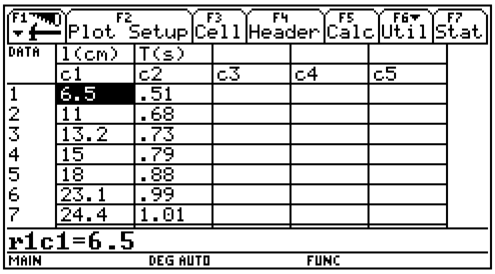


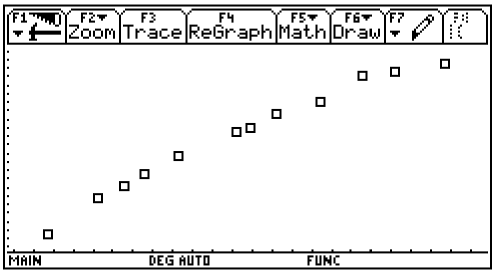


La retta di regressione lineare ha pendenza –409, e ciò significa che il modello lineare di questa decrescita prevede una perdita di 409 studenti all’anno.

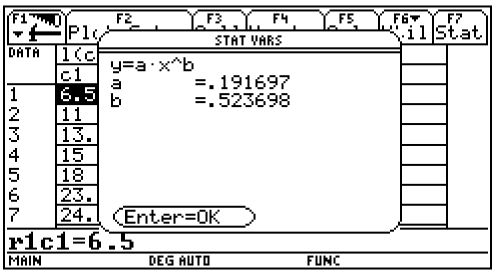
La funzione potenza

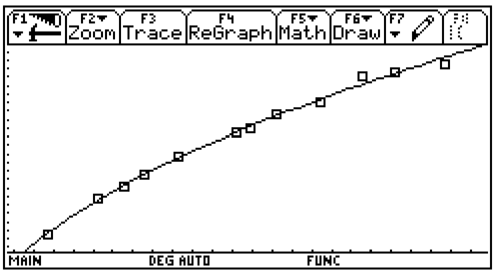
La TI-92 può essere utilizzata efficacemente anche in laboratorio di Fisica, dove è spesso utile avere rapidamente un grafico a dispersione dei dati, e un'analisi quantitativa della regressione migliore. Ecco per esempio un esperimento sulla relazione tra lunghezza e periodo di un pendolo.



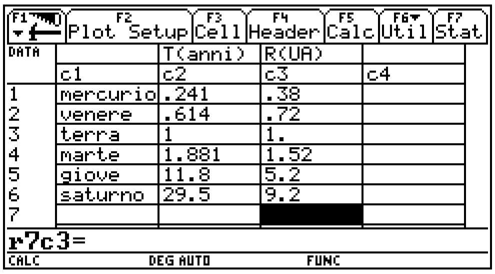


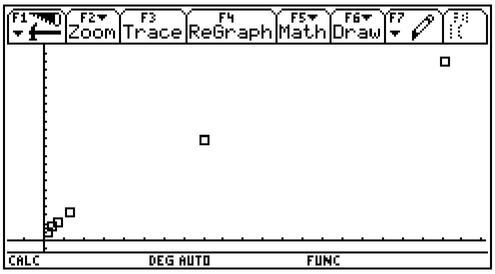
Chiediamo alla calcolatrice come modello di regressione una *funzione potenza*, cioè una funzione della forma $x \to ax^b$.



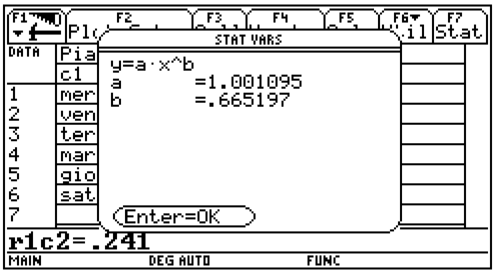


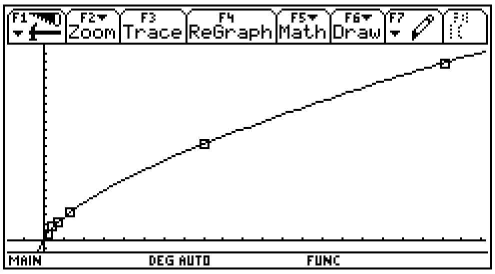
Un'altra funzione potenza interessante (anche dal punto di vista storico) è quella che, nella terza legge di Keplero, collega la *distanza media R* dei diversi pianeti del sistema solare dal Sole (qui misurata in *unità astronomiche*, la distanza media Terra-Sole) e il *periodo di rivoluzione T* degli stessi pianeti intorno al Sole (qui misurato in *anni* terrestri).





È arduo cercare una relazione tra R e T nella tabella, in cui si coglie soltanto il fatto che R è crescente rispetto a T, e che non si tratta certo di una crescita lineare.
La relazione $R \propto T^{2/3}$, solitamente data per buona, è qui perlomeno un risultato "sperimentale".





Qual è la *miglior* funzione potenza? Più precisamente, quali sono i valori di a e b nella equazione

$$y = ax^b$$

che minimizzano la somma $S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^{\,b} - y_i)^2$?

Il metodo dei minimi quadrati conduce a un sistema di equazioni esponenziali assai faticoso da risolvere: un metodo semplice ed elegante per approssimare i coefficienti a e b nella equazione

$$y = ax^b$$

consiste nel *linearizzare* tale equazione, passando ai logaritmi. Infatti se

$$y = a\,x^b$$

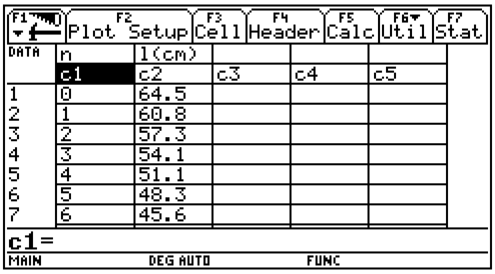
allora

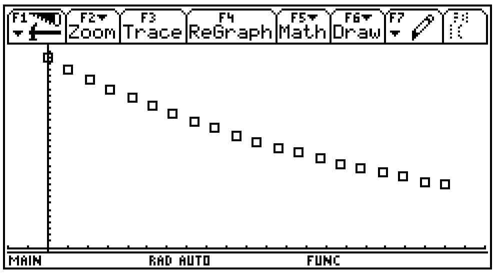
$$\ln(y) = \ln(a) + b\ln(x),$$

cioè una relazione non lineare tra x e y si traduce in una relazione lineare tra $\ln(y)$ e $\ln(x)$; la pendenza della retta è l'esponente b della funzione potenza, e il termine noto è il logaritmo del fattore a. Ecco un'applicazione interessante e significativa della funzione logaritmica.

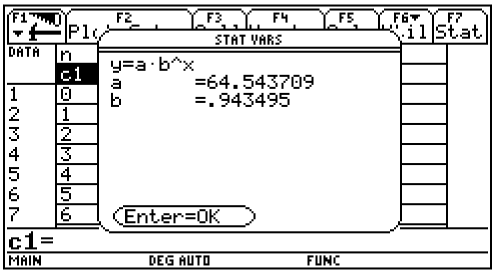
Una decrescita esponenziale

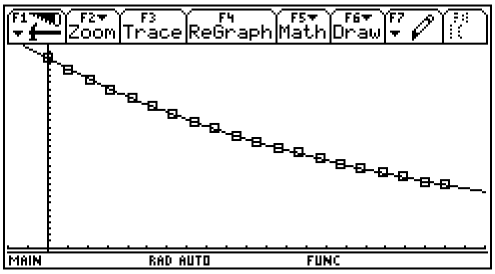
Avete mai osservato che nelle chitarre la larghezza dei capotasti non è costante, ma decresce avvicinandosi dal manico alla cassa?
Ho incaricato gli studenti che possedevano a casa una chitarra di prendere accuratamente le misure (in centimetri) della lunghezza della corda ai diversi capotasti.
Ecco un esempio: nella prima colonna c'è il numero progressivo n del capotasto (in genere le chitarre ne hanno 19); nella seconda colonna c'è la lunghezza della corda, a partire dal ponticello, bloccata all'n-esimo capotasto. Con n=0 abbiamo indicato la corda libera.
La decrescita non è lineare, come si può osservare.





Proviamo ad adattare un modello esponenziale, del tipo $x \to a\, b^x$





L'interpretazione del numero b è interessante: chi conosce quel poco di matematica su cui si basa la costruzione della scala musicale temperata sa che il fattore di frequenza tra due note successive (distanza=1 semitono), poiché l'ampiezza di un'ottava è di 12 semitoni e la frequenza raddoppia ad ogni ottava, vale $\sqrt[12]{2}$. Dato che le frequenze delle note emesse da uno strumento a corda sono inversamente proporzionali alla lunghezza delle corde, ci aspettiamo che la base della funzione esponenziale che abbiamo prima determinato sia l'inverso di $\sqrt[12]{2}$. In effetti $\frac{1}{\sqrt[12]{2}} = 0.94387\ldots.$

Il polinomio interpolante

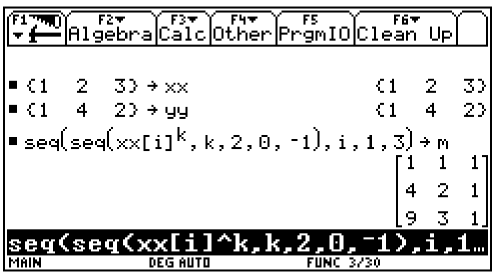
I problemi affrontati fanno sorgere un'esigenza più generale: dati n punti (x_i,y_i) determinare i coefficienti della <u>funzione polinomiale</u> di grado $n-1$ il cui grafico passa per gli n punti. Vediamo come abbiamo risolto il problema per la funzione quadratica: il metodo è facilmente generalizzabile a n punti. Dati tre punti non allineati (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), e con ascisse tutte distinte, si tratta di risolvere il sistema

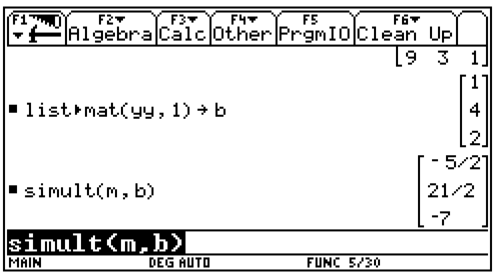
$$\begin{cases} a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 = y_3 \end{cases}$$

La TI 92 possiede il potente comando

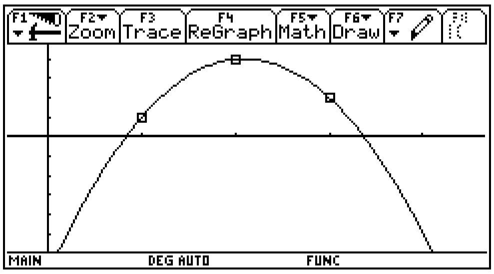
simult(mat,vet)

che risolve il sistema lineare di n equazioni in n incognite in cui mat è la matrice $n\times n$ dei coefficienti, e vet è il vettore colonna $n\times 1$ dei termini noti. Ecco per esempio la risoluzione con i punti (1,1), (2,4), (3,2).

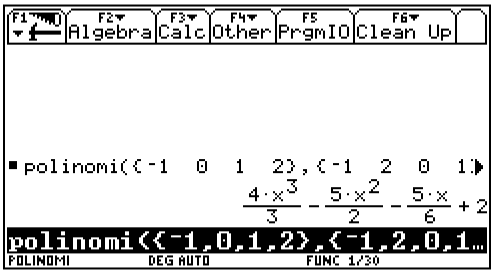




Il polinomio cercato è dunque $-\frac{5}{2}x^2+\frac{21}{2}x-7$.



Generalizziamo: si costruisce un programma che prende in ingresso due liste: la lista xx delle ascisse e la lista yy delle corrispondenti ordinate (ciascuna di *n* elementi), e dia in uscita il relativo polinomio di grado *n*–1; il seguente programma "polinomi" generalizza il procedimento analizzato nel precedente caso particolare.



La caratteristica nuova e interessante nell'utilizzo della computer algebra è proprio questa: a poco a poco cresce l'insieme degli strumenti, immagazzinati una volta per tutte, con i quali possiamo via via affrontare problemi nuovi senza lasciarci scoraggiare dalla complessità di calcolo.