Funzioni algebriche:

pendenza e Teorema di Ruffini

Michele Impedovo

Il concetto di retta tangente dell'Analisi (la tangenza è *locale*) è del tutto differente dall'idea intuitiva che gli studenti acquisiscono con la definizione di retta tangente ad una circonferenza (e poi ad una parabola), cioè come retta che *ha un solo punto di intersezione* con la curva.
La definizione *algebrica* di retta tangente ad una curva algebrica $y=f(x)$ in un punto di ascissa x_0 è più sofisticata: è la retta passante per $(x_0,f(x_0))$ che ha in x_0 almeno due punti di intersezione coincidenti con la curva.
Si vuole qui illustrare un percorso che procede su due binari paralleli e complementari: un'attività sperimentale fondata sulla congettura, che sfrutta l'approssimazione, e un'attività di conferma teorica che sfrutta il Teorema di Ruffini.

Approssimazione della pendenza

Consideriamo inizialmente una funzione polinomiale $f(x)$

$$x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

La pendenza della retta tangente a $f(x)$ in un punto x_0 può essere <u>approssimata</u> mediante il calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

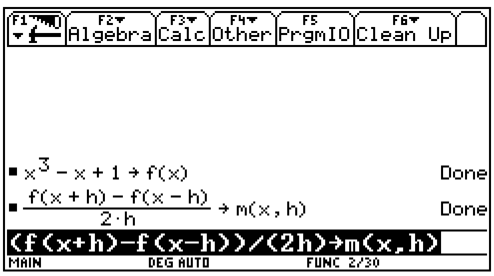
prendendo h "abbastanza piccolo". È tuttavia più efficiente utilizzare il rapporto incrementale *simmetrico*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

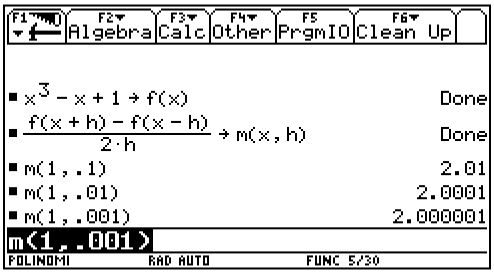
che per funzioni lisce converge molto rapidamente.
Consideriamo ad esempio la funzione

$$x \to x^3-x+1.$$

Definiamo mediante la funzione $m(x,h)$ il rapporto incrementale nel punto di ascissa x con incremento h.



Vediamo cosa succede in $x_0=1$ per $h=0.1$, 0.01, 0.001.

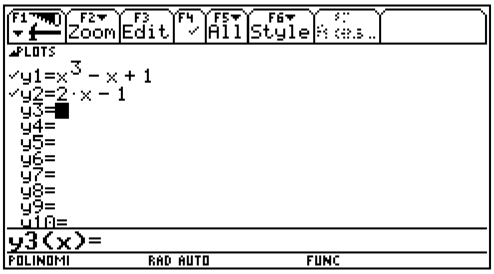


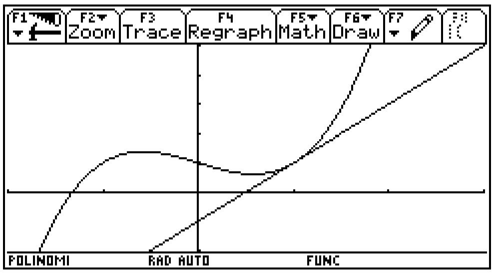
Il tendere di m a 2 è evidente. Si osservi che la rapidità di convergenza: con $h = 10^{-3}$ si ha un errore $\varepsilon = 10^{-6.}$

È importante "vedere" la bontà dell'approssimazione. Se 2 è la pendenza cercata, allora la retta tangente ha equazione

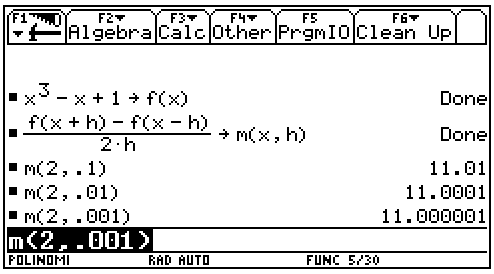
$$y = 2(x-1)+f(1)$$
$$y = 2x - 1.$$

Vediamo se otteniamo conforto dal grafico.

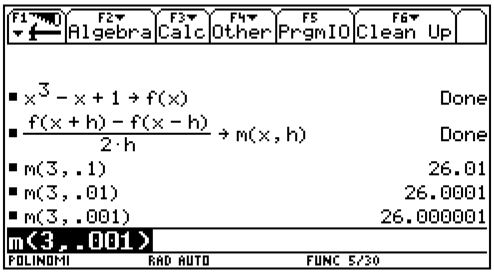




Vediamo ora che cosa accade nel punto di ascissa x_0=2.



Nel punto di ascissa 3.



Questo metodo di approssimazione è molto potente e generale , può essere applicato a funzioni qualsiasi, e favorisce il nascere spontaneo di congetture: abbiamo qui una corrispondenza del tipo

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 11$

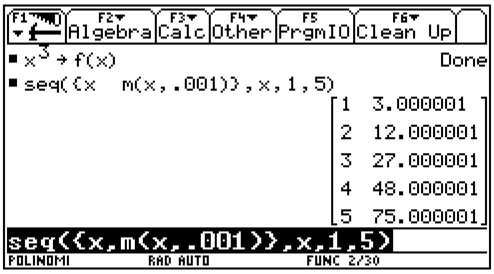
$3 \rightarrow 26.$

Molti studenti sono portati a chiedersi che tipo di corrispondenza sia, e a prevedere che cosa accadrà per x_0=4: si tratta di una fase didattica importante, perché fa sorgere l'idea dell'esistenza di una nuova funzione (la *derivata*) che descrive la pendenza della funzione iniziale. Inoltre il procedimento di approssimazione stimola curiosità e desiderio di generalizzazione, molle fondamentali dell'apprendimento, soprattutto in matematica.

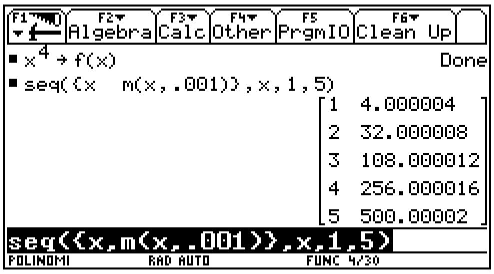
Una prima fase di generalizzazione può essere la seguente: approssimare la pendenza $m(x)$ delle curve di equazione

$$y = x^3, x^4, \ldots, x^n$$

nel generico punto di ascissa x.
Approssimiamo la pendenza di $f(x)=x^3$ nei punti di ascissa 1, 2, 3, 4, 5.



Si ottiene la successione 3, 12, 27, 48, 75. Di che successione si tratta?
Un modo per "leggere" una funzione è quello di analizzarne gli incrementi. La successione 3, 12, 27, 48, 75 ha incrementi dati dalla successione 9, 15, 21, 27, che a sua volta ha incrementi costanti pari a 6. Come sappiamo (vedi la scheda "Polinomi e incrementi") solo le funzioni quadratiche hanno la caratteristica di avere costanti gli *incrementi di ordine due*.
Gli alunni arrivano in breve tempo a congetturare che si tratti della corrispondenza $x \to 3x^2$.
Vediamo la funzione $f(x) = x^4$.



Anche qui non è difficile congetturare

$$m(x) = 4x^3.$$

Si giunge in breve tempo alla generalizzazione:

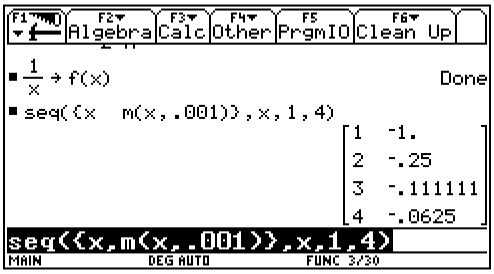
$$f(x) = x^n \qquad \to \qquad m(x) = n\, x^{n-1}.$$

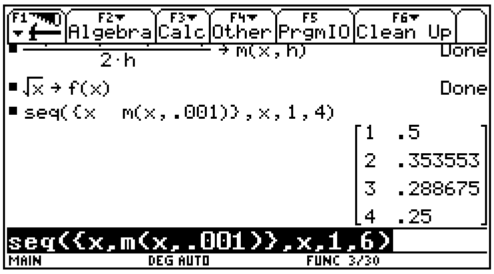
Da qui alla congettura più generale sulla derivata di un polinomio qualsiasi il passo è se non breve, abbastanza naturale:

$$f(x) = k \Rightarrow m(x) = 0$$
$$f(x) = kx^n \Rightarrow m(x) = knx^{n-1}$$
$$f(x) = x^n + x^p \Rightarrow m(x) = nx^{n-1} + px^{p-1}.$$

Possiamo per esempio sottoporre a verifica l'esempio iniziale.

Usiamo ancora il metodo di approssimazione per le funzioni $1/x$ e $\sqrt{x}$.





Per $1/x$ la congettura sulla forma generale di $m(x)$ non è difficile:

$$m(x) = x \to -\frac{1}{x^2}$$

Per $\sqrt{x}$ le congetture non sono facili. È forse il momento di accettare il suggerimento di qualche allievo (il solito *spregiudicato*) che propone la generalizzazione

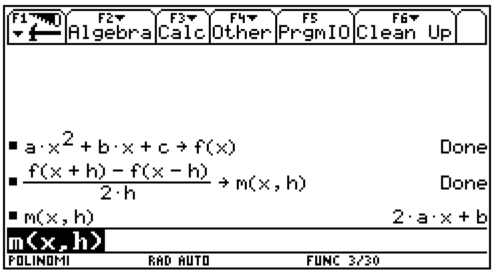
$$m(x) = n\, x^{n-1}.$$

anche per esponenti n negativi o razionali.

Volutamente non abbiamo trattato sin qui le funzioni quadratiche. Per esse infatti accade una cosa solo apparentemente curiosa: il rapporto incrementale simmetrico

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

non è un'approssimazione, ma è il valore esatto della pendenza in x_0. Le funzioni quadratiche infatti (e solo le funzioni quadratiche) godono della seguente proprietà: la retta tangente nel punto di ascissa x_0 è parallela ad una qualsiasi corda che unisca due punti di ascisse simmetriche rispetto a x_0.



Come si vede, il rapporto incrementale simmetrico applicato ad una generica funzione quadratica è indipendente da h, e fornisce direttamente la derivata della funzione. L'interpretazione fisica è evidente:in un moto uniformemente accelerato la velocità media in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è uguale alla velocità istantanea nell'istante $\frac{t_1+t_2}{2}$.

Il teorema di Ruffini

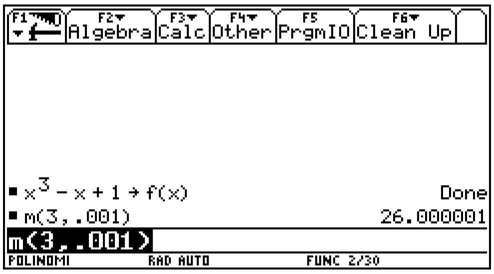
Il fatto importante è che per curve algebriche <u>ogni congettura può essere dimostrata o reputata</u>, utilizzando il celebre teorema:

Dato un polinomio $p(x)$ e un numero a risulta $p(a)=0$ se e solo se $p(x)$ è divisibile per $(x–a)$.

Per esempio, determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$y = x^3–x+1$$

nel punto di ascissa $x_0=3$.



La congettura è che la pendenza della retta tangente sia 26. Se così fosse, l'equazione della retta tangente sarebbe

$$y = 26(x–3)+f(3)$$
$$y =26x–53.$$

Allora il sistema

$$\begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ y = 26x - 53 \end{cases},$$

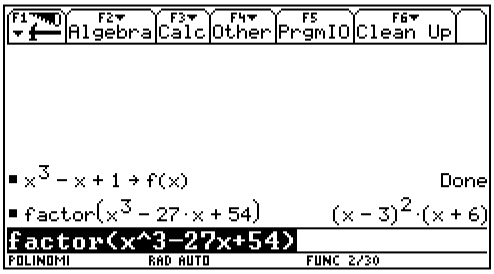
che conduce all'equazione risultante

$$x^3 - x + 1 = 26x - 53$$
$$x^3 - 27x + 54 = 0$$

dovrebbe ammettere due soluzioni coincidenti in $x=3$, cioè (per Ruffini) il polinomio

$$x^3 - 27x + 54$$

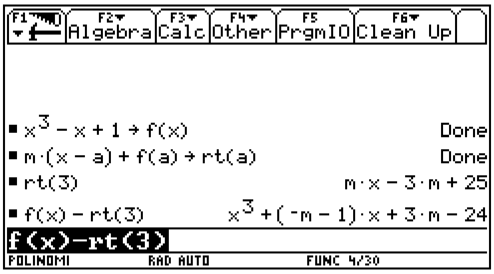
dovrebbe essere divisibile per $(x–3)^2$.
Verifichiamo con la TI-92.



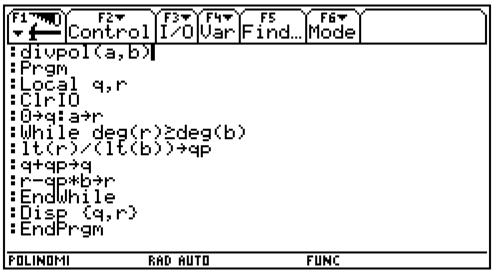
La congettura è verificata, e otteniamo anche, gratis, l'ulteriore punto di intersezione tra curva e retta: il punto di ascissa –6.

Tale procedimento di verifica di una congettura può anche essere utilizzato direttamente <u>per trovare</u> m, imponendo che l'equazione risultante dal sistema abbia due zeri coincidenti in x_0.
Con la TI-92 definiamo la funzione $f(x)$ e con $rt(a)$ definiamo la funzione lineare di pendenza m passante per $(a,f(a))$. L'equazione risultante del sistema è

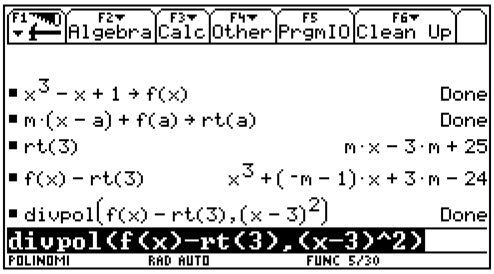
$$f(x) - rt(3) = 0.$$

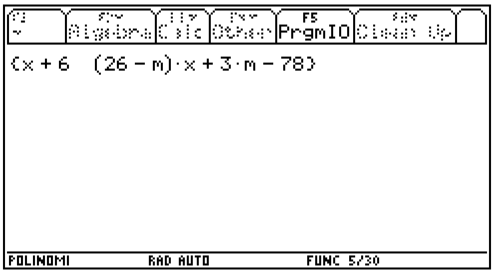


Utilizziamo ora il programma *divpol*, che prende in ingresso due polinomi in x e fornisce in uscita il polinomio quoziente e il polinomio resto.



La funzione *deg* fornisce il grado di un polinomio; la funzione *lt* fornisce il termine di grado massimo.



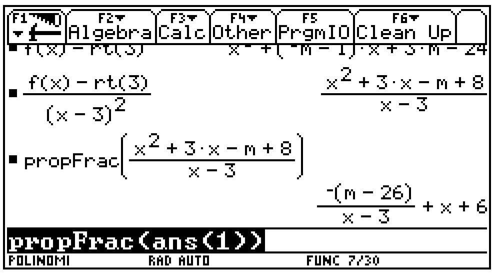


Il polinomio quoziente è x+6, e il polinomio resto è

$$(26-m)x + (3m-78).$$

Se vogliamo due zeri coincidenti in x=3 dobbiamo imporre che il resto sia il polinomio nullo, e questo accade se e solo se m=26.

Allo stesso risultato potevamo pervenire utilizzando il comando predefinito *propFrac*.



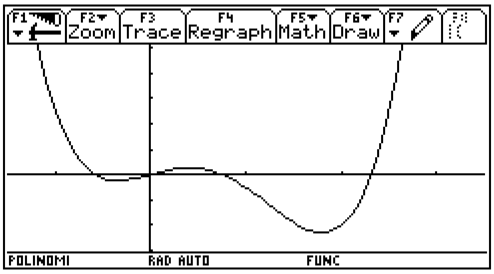
Il resto è il numeratore della frazione; a denominatore, come si vede, non compare $(x-3)^2$ ma $(x-3)$: questo significa che qualunque retta della forma

$$y = m\,(x-3)+25$$

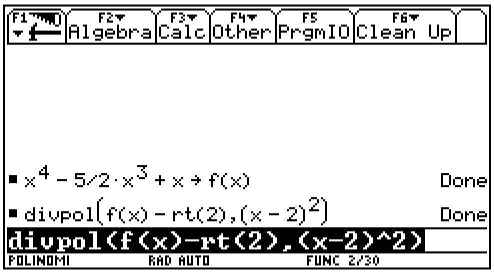
ha una intersezione in 3 con $f(x)$ (ovviamente). Se vogliamo una seconda intersezione imponiamo che sia nullo il resto, cioè $m-26=0$.

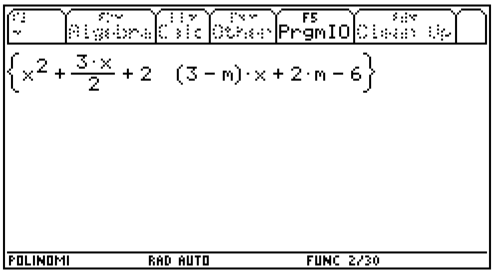
Una conclusione è la seguente: non sono necessarie le derivate per determinare la pendenza di una funzione polinomiale $f(x)$ in un punto di ascissa a: è sufficiente imporre che il resto tra i polinomi $f(x)–(m(x–a)+f(a))$ e $(x–a)^2$, che dipende dal parametro m, sia il polinomio nullo; poiché il resto ha grado minore di 2, indipendentemente dal grado di $f(x)$, la soluzione è sempre alla portata di qualsiasi studente di biennio.
Per esempio: determinare la pendenza di

$$f(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + x$$



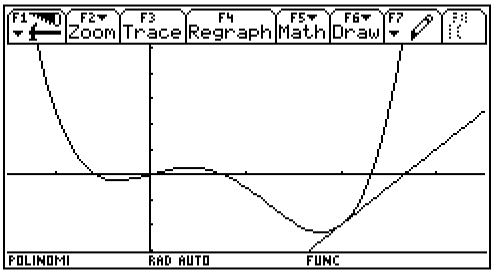
nel punto di ascissa x_0=2.





Il polinomio resto è nullo se e solo se $m = 3$, e quindi la retta tangente è

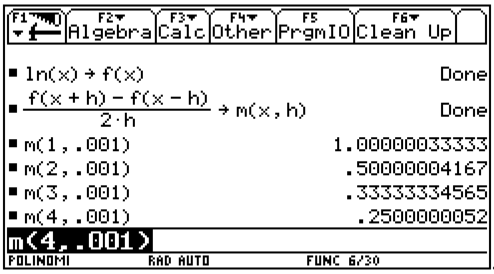
$$y = 3(x–2)+f(2)$$
$$y = 3x–8$$



Il metodo delle approssimazioni mediante il rapporto incrementale è del tutto generale, e può essere applicato a qualunque funzione. Il fatto è che per funzioni trascendenti il teorema di Ruffini non è più applicabile: nel sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + q \end{cases}$$

non ha più senso contare la molteplicità delle radici (che può essere recuperata invece se si sviluppa $f(x)$ in serie di potenze). Inizia qui un percorso che inevitabilmente fa ricorso all'infinito. Tuttavia il metodo di approssimazione ha consolidato nello studente una certa fiducia e preparato il terreno al concetto di limite. Il metodo di approssimazione può essere ancora usato per formulare congetture.
Per esempio, ecco che cosa accade per $f(x)$=ln(x).



.

Come si vede non è difficile giungere alla congettura che la derivata di ln(x) sia 1/x.