Polinomi e incrementi

Michele Impedovo

Partiamo da un problema ben noto, che può essere proposto come lavoro di gruppo agli studenti. Quanto vale la somma dei primi *n* numeri naturali? Esistono molti modi per dimostrare la relazione

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

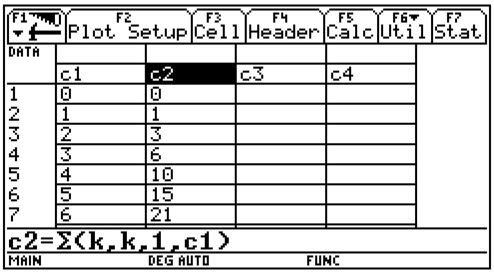
Qui siamo interessati all'aspetto funzionale del problema. Abbiamo una grandezza *S* che varia in funzione del numero *n*. Come varia? È crescente, naturalmente. Come cresce? Vogliamo determinarlo sperimentalmente. Usiamo la TI-92.

Possiamo iniziare a compilare una tabella: nella prima colonna (c1) immettiamo il comando

seq(n,n,0,6)

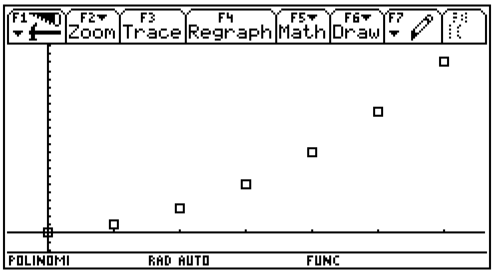
e nella seconda colonna (c2) il comando

∑(k,k,1,c1)



	c1	c2	c3	c4
1	0	0		
2	1	1		
3	2	3		
4	3	6		
5	4	10		
6	5	15		
7	6	21		

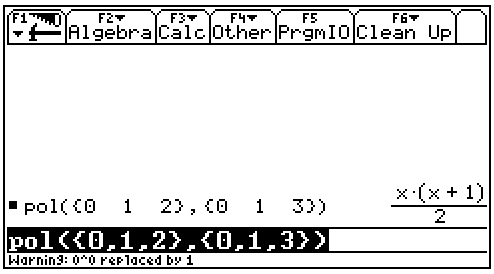
Ecco il grafico.

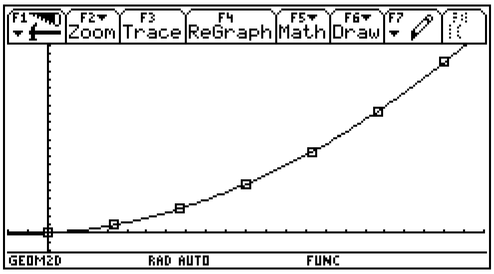


Come si vede sia dalla tabella (gli incrementi di c2 non sono costanti) sia dal grafico (i punti non sono allineati), non si tratta di una crescita lineare.

Potrebbe essere una funzione quadratica, una parabola?

Proviamo a calcolare l'equazione della parabola che passa per i primi tre punti della tabella (utilizziamo il programma *pol*, vedi la scheda "Interpolazione polinomiale"), e tracciamone il grafico.





Il grafico è convincente. Possiamo formulare la congettura

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

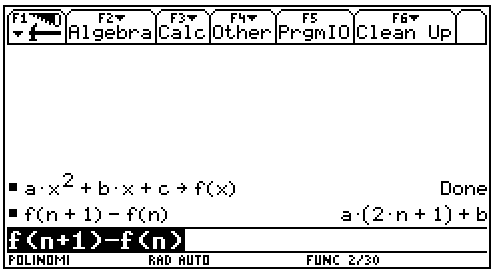
che si dimostra rapidamente con il metodo utilizzato dal giovanissimo Gauss nel celebre aneddoto.
Se osserviamo la tabella notiamo che gli incrementi Δy della variabile dipendente (corrispondenti ad incrementi unitari della variabile indipendente) non sono costanti, ma formano la successione

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

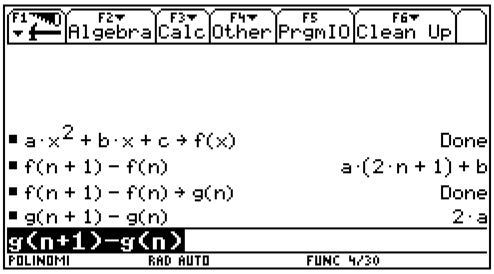
Se calcoliamo gli incrementi di quest'ultima successione (chiamiamoli *incrementi di ordine due*), questi sono costanti, e uguali a 1. In altri termini: non è costante la successione dei Δy, bensì la successione dei $\Delta(\Delta y)$.
CONGETTURA: si tratta di una caratteristica comune alle funzioni quadratiche? È vero per qualunque funzione della forma

$$x \to ax^2+bx+c$$

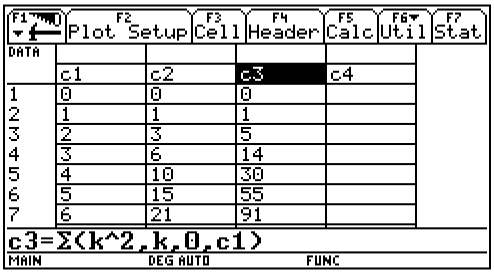
che $\Delta(\Delta y)$ è costante? Vediamo.



Come si vede gli incrementi Δy della funzione $f(x)=ax^2+bx+c$ relativi a incrementi unitari della x costituiscono in generale una *progressione aritmetica*, di *base* $a+b$ e *ragione* $2a$: la congettura è verificata. Se definiamo la nuova funzione $g(n):=f(n+1)-f(n)$, verifichiamo la successione $g(n)$ è costante ed uguale a $2a$.



Andiamo oltre: quanto vale la somma dei **quadrati** dei primi n numeri naturali?
Immettiamo in c3 il comando
∑(k^2,k,1,c1).



	c1	c2	c3	c4
1	0	0	0	
2	1	1	1	
3	2	3	5	
4	3	6	14	
5	4	10	30	
6	5	15	55	
7	6	21	91	

Si tratta di una funzione che cresce più rapidamente di una funzione quadratica. Vediamo la successione degli incrementi di ordine 1, 2, 3.

Δy = 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

$\Delta(\Delta y)$ = 3, 5, 7, 9, 11, …

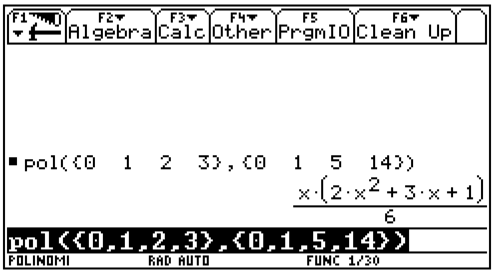
$\Delta(\Delta(\Delta y))$ = 2, 2, 2, 2, …

Gli incrementi di ordine 3 sono costanti.

CONGETTURA: una funzione che abbia costanti gli incrementi di ordine 3 è una funzione polinomiale di 3° grado:

$$x \to ax^3+bx^2+cx+d.$$

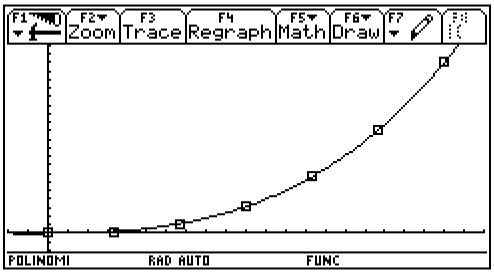
Utilizziamo ancora il programma *pol* con i primi 4 punti.



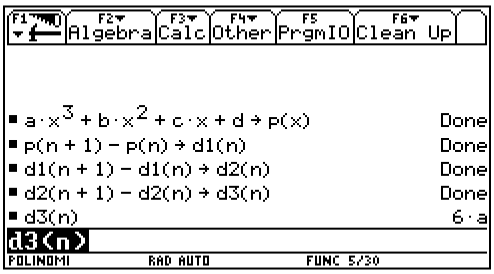
Il polinomio di terzo grado la cui funzione soddisfa i primi quattro punti è

$$p(x) = \frac{1}{6}x\left(2x^2+3x+1\right)$$

In effetti il grafico di $y=p(x)$ sembra che funzioni a dovere.



Possiamo ora dimostrare la congettura.



Gli incrementi di ordine 3 di una funzione polinomiale di terzo grado sono costanti, e pari a 6 volte il coefficiente direttivo.
In effetti si può dimostrare (per induzione) la seguente generalizzazione: tutte e sole le funzioni che hanno costante la successione degli incrementi di ordine n sono le funzioni polinomiali di grado n

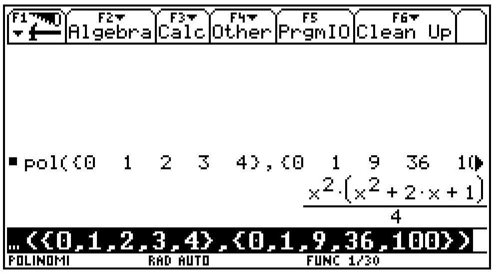
$$x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e la costante è pari a

$$n!\, a_n.$$

Utilizziamo il risultato ottenuto: la somma dei **cubi** dei primi n numeri naturali è data da un polinomio di quarto grado, che possiamo determinare mediante le prime 5 coppie $\left(n, \sum_{k=1}^{n} k^3\right)$:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 9), (3, 36), (4, 100).$$



La somma dei cubi dei primi n numeri naturali è dunque

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 .$$