Probabilità e bridge

Michele Impedovo

Riassunto
Nel gioco del bridge è di fondamentale importanza prevedere come sono distribuite le carte di un certo seme tra i due avversari. Questo articolo propone una soluzione completa del problema, sfruttando classici risultati che riguardano l'estrazione senza reintroduzione e perciò la distribuzione ipergeometrica di una opportuna variabile aleatoria.

Abstract
This paper, from a probabilistic point of view, deals with a very important problem in the bridge game: to foresee how many cards of a given suit each rival has. The solution of the problem is due to classic results about the hypergeometric distribution.

Michele Impedovo
Liceo Scientifico G. Ferraris Varese
impedovo@tin.it

Il bridge è un bellissimo gioco di carte e, al pari degli scacchi, meriterebbe di essere insegnato nelle scuole; peraltro esiste un protocollo di intesa tra il ministero dell'istruzione e la FIGB (Federazione Italiana Gioco Bridge) che ha promosso con un certo successo il progetto BAS (Bridge A Scuola).
I dettagli sul sito http://www.federbridge.it/FIGB/Scuola/indice.htm.

Per chi non conosce il bridge: si gioca in quattro, la coppia Nord-Sud (NS) contro la coppia Est-Ovest (EO), con il mazzo da 52 carte (13 carte per ciascun seme: picche ♠, cuori ♥, quadri ♦, fiori ♣). Ciascun giocatore riceve 13 carte. Il gioco si articola in due fasi:

- la fase della dichiarazione, in cui una delle due coppie, attraverso dichiarazioni convenzionali, "vince il contratto" cioè stabilisce quale sarà il seme della briscola (a bridge si chiama *atout*) e quante prese (su 13) dovrà aggiudicarsi;
- la fase del gioco: come a briscola si giocano 13 mani. Se la coppia che ha vinto la dichiarazione riesce ad aggiudicarsi almeno il numero di mani dichiarate vince, altrimenti "va sotto" e vince l'altra coppia.

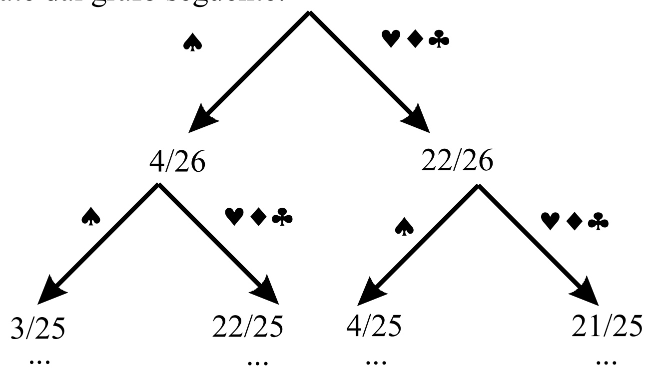
Un tipico (e spesso decisivo) problema del bridge è quello di prevedere come sono distribuite tra i due avversari le carte di un certo seme che mancano sulla linea. Per esempio la linea NS possiede 9 carte di picche. È molto importante sapere come possono essere distribuite le rimanenti 4 carte di picche sulla linea EO dei miei avversari; ci sono tre possibilità:

- Le quattro carte di picche sono tutte in mano ad un solo avversario (non importa quale): distribuzione 4-0.
- Un avversario (non importa quale) possiede tre carte di picche e l'altro una sola carta di picche: distribuzione 3-1.
- Ciascun avversario possiede 2 carte di picche: distribuzione 2-2.

Qual è la probabilità di ciascuna di queste distribuzioni? Questo, per un numero qualsiasi di carte mancanti, è il problema che vogliamo risolvere.

Supponiamo di aver distribuito le carte, 13 a testa, e di sapere (dalla dichiarazione, o da una giocata del proprio compagno, o dell'avversario) che alla nostra linea NS mancano n carte di picche, per esempio n=4. Tra le 26 carte della linea EO ci sono dunque le 4 carte di cui vogliamo conoscere la distribuzione.

Costruiamo il seguente modello: abbiamo un mazzo con 26 carte (le carte degli avversari, le nostre non ci interessano), di cui 4 sono di picche e 22 sono degli altri semi. Si estraggono ora 13 carte (le carte di E, per esempio). Tra queste 13 quante sono le carte di picche?
Possono essere 0, 1, 2, 3, 4 (e O avrà rispettivamente le rimanenti 4, 3, 2, 1, 0).
Si tratta di un problema di estrazione senza reintroduzione; le prime due estrazioni sono rappresentate dal grafo seguente:



Se il numero di estrazioni non fosse così elevato potremmo costruire il grafo degli eventi, ma con 13 estrazioni è proibitivo arrivare in fondo; ci occorre un'altra strada.

Osserviamo innanzitutto che il numero di eventi possibili (le possibili suddivisioni di 26 carte tra E e O) è dato dal numero di sottoinsiemi di 13 elementi scelti in un insieme di 26, e quindi

$$\binom{26}{13} = 10.400.600.$$

Ragioniamo sempre sull'esempio n=4: nel mazzo ci sono 4 carte di picche e 22 carte degli altri semi. Molti oggetti matematici si capiscono quando se ne trova una rappresentazione equivalente, un "come se" (forse la vita stessa è un "come se"). Per semplificare e colorare mentalmente il nostro problema osserviamo che "è come se" dovessimo estrarre senza reintroduzione 13 palline da un sacchetto nel quale ci sono 4 palline nere e 22 palline bianche.
In quanti modi possibili, estraendo 13 palline da tale sacchetto si possono avere

- 4 palline nere e 9 bianche?
- 3 palline nere e 10 bianche?

- 2 palline nere e 11 bianche?
- 1 pallina nera e 12 bianche?
- 13 palline bianche?

Concentriamoci sul caso 3 palline nere e 10 bianche: ci stiamo chiedendo in quanti modi è possibile estrarre 3 palline nere su 4 e 10 palline bianche su 22: tale numero è uguale al prodotto tra

- il numero di modi con cui si possono pescare 3 palline nere su 4, cioè $\binom{4}{3}$,
- il numero di modi con cui si possono pescare 10 palline bianche su 22, cioè $\binom{22}{10}$.

Quindi estraendo 13 palline da un sacchetto che ne contiene 26, di cui 4 nere e 22 bianche, la probabilità di averne 3 nere e 10 bianche è

$$\frac{\binom{22}{10}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{26}{13}} = 143/575.$$

Questa è la probabilità che E abbia 3 carte di picche e (di conseguenza) O ne abbia 1. Per simmetria la probabilità di avere 1 carta di picche in E e 3 carte di picche in O è la stessa. Poiché a noi interessa solo la distribuzione, la probabilità della distribuzione 3-1 è 286/575.

Analogamente la probabilità che E abbia 4 carte di picche (e O ne abbia 0) è

$$\frac{\binom{22}{9}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{26}{13}} = 11/230,$$

quindi la probabilità della distribuzione 4-0 è 11/115.

Infine la probabilità che E e O abbiano due carte di picche ciascuno è

$$\frac{\binom{22}{11}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{26}{13}} = 234/575.$$

Osserviamo (con una certa soddisfazione) che

$$\frac{286}{575} + \frac{11}{115} + \frac{234}{575} = 1.$$

Il risultato è curioso e non del tutto intuitivo: quando mancano sulla linea 4 carte di un seme, la distribuzione più probabile è la 3-1, non la 2-2. Dai calcoli svolti si capisce perché: la distribuzione 3-1 si presenta in due modi distinti (3-1 e 1-3) mentre la 2-2 in un solo modo.

Il ragionamento che abbiamo svolto è classico e risolve il seguente problema generale: in un sacchetto ci sono B palline bianche e N palline nere. Si estraggono senza reintroduzione H palline; qual è la probabilità di averne estratte B_0 bianche (e quindi $N_0 = H–B_0$ nere)? Tale probabilità è

$$\frac{\binom{B}{B_0}\binom{N}{N_0}}{\binom{B+N}{B_0+N_0}}$$

Se introduciamo la variabile aleatoria
X = numero di palline bianche estratte
la distribuzione di probabilità di X è la *distribuzione ipergeometrica*:

$$p(\mathrm{X} = k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{N}{H-k}}{\binom{B+N}{H}}$$

Una classica applicazione di tale metodo riguarda il gioco del poker: qual è la probabilità di avere un poker d'Assi servito? Se giochiamo con un mazzo da 32 carte (dal 7 all'Asso) allora "è come se" in un sacchetto avessimo 32 palline, 4 nere (i quattro Assi) e 28 bianche. Se ne estraiamo 5 (le carte di una mano) la probabilità di avere poker d'Assi è

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = 1/7192 \approx 0.014\%,$$

Il metodo si generalizza: in un sacchetto ci sono a_1 palline di colore 1, a_2 palline di colore 2, …, a_n palline di colore n. Si estraggono senza reintroduzione H palline; qual è la probabilità di averne k_1 di colore 1, k_2 di colore 2, …, k_n di colore n (con $k_1+k_2+\ldots+k_n=H$)? Tale probabilità è

$$\frac{\binom{a_1}{k_1}\binom{a_2}{k_2}\ldots\binom{a_n}{k_n}}{\binom{a_1+a_2+\ldots+a_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}}$$

Per esempio, la probabilità di avere un full di Assi e Re (3 Assi e due Re) è

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{24}{0}}{\binom{32}{5}} = 3/25172.$$

Torniamo al bridge e generalizziamo. Nel nostro sacchetto ci sono n palline nere e $26-n$ palline bianche. Se ne estraggono 13; qual è la probabilità di estrarre k palline nere su n (e $13-k$ palline bianche su $26-n$)? La risposta è

$$\frac{\binom{26-n}{13-k}\binom{n}{k}}{\binom{26}{13}}$$

Tenendo conto che tale rapporto va raddoppiato tranne nel caso in cui $k=n/2$, possiamo compilare la seguente tabella.

Carte mancanti nella linea	Distribuzione	Probabilità	%
2	2-0	12/25	48,0
	1-1	13/25	52,0
3	3-0	11/50	22,0
	2-1	39/50	78,0
4	4-0	11/115	9,6
	3-1	286/575	49,7
	2-2	234/575	40,7
5	5-0	9/230	3,9
	4-1	13/46	28,3
	3-2	78/115	67,8
6	6-0	12/805	1,5
	5-1	117/805	14,5
	4-2	78/161	48,4
	3-3	286/805	35,6
7	7-0	3/575	0,5
	6-1	39/575	6,8
	5-2	351/1150	30,5
	4-3	143/230	62,2
8	8-0	18/10925	0,2
	7-1	312/10925	2,9
	6-2	1872/10925	17,1
	5-3	5148/10925	47,1
	4-4	143/437	32,7

Infine: perché non usare ora il metodo Montecarlo per una simulazione? Simuliamo l'estrazione di 13 palline da un sacchetto che contiene n palline nere e $26-n$ palline bianche. Il seguente programma (scritto in MAPLE) distrib(n,np) prende in ingresso il numero n di carte mancanti e il numero np di prove. In uscita abbiamo le frequenze relative delle distribuzioni n-0, $n-1$-1, ….

```
distrib:=proc(n,np);
mazzo:=[seq(0,i=1..26-n),seq(1,i=1..n)];
```

** Viene creato il mazzo, che contiene *n* carte di picche (1) e 26–*n* carte degli altri semi (0)

```
dE:=[seq(0,i=0..n)];
```

** dE è la lista-contatore delle frequenze

```
for j to np do
```

** np è il numero di prove

```
for i to 100 do
c1:=random(52):c2:=random(52):
temp:=mazzo[c1]:mazzo[c1]:=mazzo[c2]:mazzo[c2]:=temp:
od:
```

** Viene "mescolato" il mazzo mediante 100 scambi

```
E:=[]:O:=[]:
for i from 1 to 25 by 2 do
E:=[op(E),mazzo[i]]:od:
```

** Vengono estratte le carte di E

```
s:=add(i,i=E):dE[s+1]:=dE[s+1]+1;od;
```

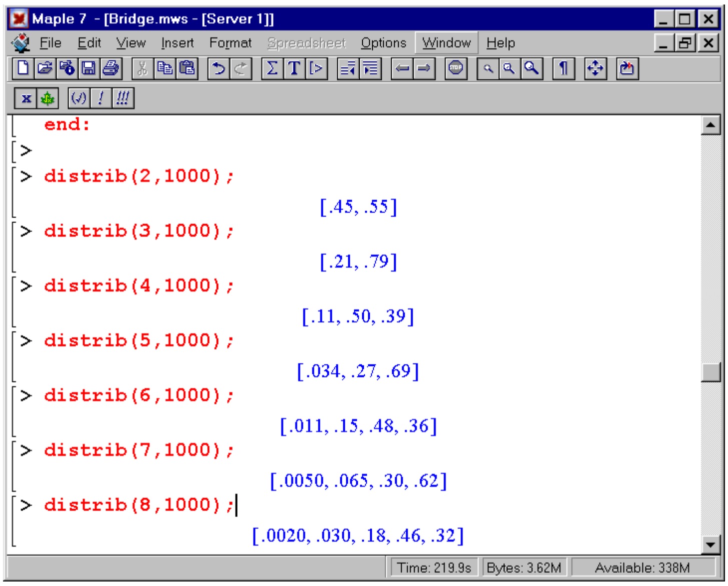
** Si contano le carte di picche

```
for i from 1 to (n+1)/2 do dE[i]:=dE[i]+dE[n+2-i] od;
dE:=[evalf(op(1..ceil((k+1)/2),dE)/np,2)];
```

** Si costruisce la lista delle frequenze relative delle diverse distribuzioni

```
end:
```

Ho eseguito il programma con 1000 prove per ciascun valore di *n*, ottenendo i seguenti risultati.



Se confrontiamo i risultati teorici con quelli sperimentali possiamo dichiararci soddisfatti.

Carte mancanti	Distribuzione	Prob.	Freq.
2	2-0	48,0	45,0
	1-1	52,0	55,0
3	3-0	22,0	21,0
	2-1	78,0	79,0
4	4-0	9,6	11,0
	3-1	49,7	50,0
	2-2	40,7	39,0
5	5-0	3,9	3,4
	4-1	28,3	27,0
	3-2	67,8	69,0
6	6-0	1,5	1,1
	5-1	14,5	15,0
	4-2	48,4	48,0
	3-3	35,6	36,0
7	7-0	0,5	0,5

	6-1	6,8	6,5
	5-2	30,5	30,0
	4-3	62,2	62,0
8	8-0	0,2	0,2
	7-1	2,9	3,0
	6-2	17,1	18,0
	5-3	47,1	46,0
	4-4	32,7	32,0

Michele Impedovo