

Aritmetica

Michele Impedovo

La lunghezza del periodo

Consideriamo la frazione a/b ridotta ai minimi termini, o meglio la divisione decimale tra due numeri naturali a e b (b diverso da 0) primi tra loro, cioè tali che $\text{MCD}(a, b)=1$.

La divisione decimale tra a e b dà luogo ad un numero decimale finito se (e solo se) i fattori primi di b sono soltanto 2 o 5 (cioè i fattori della base 10). Altrimenti il numero decimale è periodico. Vogliamo occuparci della lunghezza del periodo.

Si dimostra che la lunghezza del periodo della divisione a/b (se a e b sono primi tra loro) dipende solo dal denominatore.

La funzione che associa ad un numero naturale $n > 1$ la lunghezza g del periodo nella divisione per n viene chiamata *gaussiano* di n .

Presentiamo un semplice programma con la TI-92 che calcola il gaussiano di un numero naturale (diverso da 0).

```
F1 Control F2 I/O F3 Var F4 Find... F5 Mode F6
:gauss(n)
:Func
:Local r,g
:While mod(n,2)=0:n/2→n:EndWhile
:While mod(n,5)=0:n/5→n:EndWhile
:1→r:0→g
:While r>1 or g=0
:mod(10*r,n)→r
:g+1→g
:EndWhile
:If n=1 Then:0:Else:g:EndIf
:EndFunc
ARITHM RAD AUTO FUNC
```

I primi due cicli “while” dividono n per gli eventuali fattori 2 e 5.

Il primo resto è posto arbitrariamente uguale a 1 (è come se venisse eseguita la divisione $1/n$), e poi ad ogni resto trovato si aumenta di 1 il contatore g . Se il numero contiene solo fattori 2 o 5 allora il periodo ha lunghezza 0, dato che la divisione dà luogo ad un numero decimale finito.

Un classico teorema (che è una conseguenza del *piccolo teorema di Fermat*) afferma che il gaussiano n è un divisore di $\varphi(n)$, dove la funzione φ è la *funzione phi di Eulero*: $\varphi(n)$ è il numero dei numeri naturali minori di n primi con n . Ovviamente se n è primo allora $\varphi(n)=n-1$.

Vediamo qualche prova del programma.

```
F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
■ gauss(7) 6
■ gauss(10) 0
■ gauss(150) 1
■ gauss(31) 15
■ gauss(37) 3
■ gauss(101) 4
■ gauss(49) 42
gauss(49)
ARITHM RAD AUTO FUNC 7/30
```

La lunghezza dell'antiperiodo

La lunghezza dell'antiperiodo nella divisione decimale di a e b dipende, una volta ridotta ai minimi termini la frazione a/b , dalla potenza di 2 e di 5 contenuta nel denominatore b . Per la precisione, se b contiene come fattore la potenza 2^h e la potenza 5^k (eventualmente $h=0, k=0$) allora la lunghezza dell'antiperiodo nella divisione di a per b è uguale al massimo tra h e k .

Il programma che calcola l'antiperiodo viene chiamato *antiper* e descritto nella schermata seguente.

```

F1 Control F2 I/O F3 Var F4 Find... F5 Mode F6
:antiper(a,b)
:Func
:Local d2,d5
:0→d2:0→d5
:While mod(b,2)=0
:b/2→b:d2+1→d2
:EndWhile
:While mod(b,5)=0
:b/5→b:d5+1→d5
:EndWhile
:max(d2,d5)
:EndFunc
ARITH RAD AUTO FUNC

```

Calcolo della divisione

Utilizzando le funzioni *gauss* e *antiper* non è difficile costruire il programma *dividi(a,b)* che calcola effettivamente la divisione tra due numeri naturali *a* e *b*, mostrando la parte intera, l'antiperiodo e (tra parentesi) il periodo.

```

F1 Control F2 I/O F3 Var F4 Find... F5 Mode F6
:dividi(a,b)
:Func
:Local g,s,r,k,ap,m
:gcd(a,b)→m
:a/m→a
:b/m→b
:antiper(a,b)→ap
:gauss(b)→g
:string(floor(a/b))&". "→s
:mod(a,b)→r

```

```

F1 Control F2 I/O F3 Var F4 Find... F5 Mode F6
:mod(a,b)→r
:For k,1,ap
:s&string(floor(10*r/b))→s
:mod(10*r,b)→r
:EndFor
:s&" "→s
:For k,1,g
:s&string(floor(10*r/b))→s
:mod(10*r,b)→r
:EndFor
:s&" ) "
:EndFunc
ARITH RAD AUTO FUNC

```

Il programma è utile anche per apprendere la gestione delle stringhe. Il risultato infatti è una stringa costruita in diversi passaggi: calcolo della parte intera, aggiunta del simbolo "." per il punto decimale, calcolo delle cifre dell'antiperiodo, aggiunta del simbolo "(" per evidenziare l'inizio del periodo, calcolo delle cifre del periodo, e infine aggiunta del simbolo ")".

Ecco qualche test del programma.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
■ dividi(3, 7) "0.(428571)"
■ dividi(6, 14) "0.(428571)"
■ dividi(30, 70) "0.(428571)"
■ dividi(69, 70) "0.9(857142)"
■ dividi(13, 130) "0.1("
■ dividi(3547, 404) "8.77(9702)"
■ dividi(10017, 808) "12.397(2772)"
dividi(10017,808)
ARITH RAD AUTO FUNC 7/30

```