Una libreria di funzioni per la geometria analitica

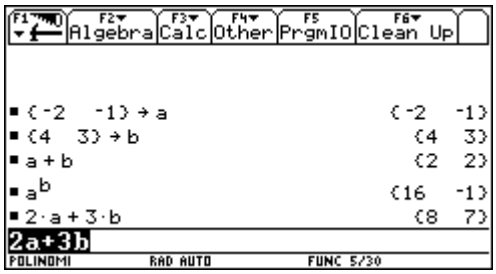
Michele Impedovo

La geometria analitica del piano costituisce uno dei più importanti e consolidati argomenti di matematica.
Un lavoro interessante parallelo alla trattazione dei temi centrali (punti, rette, parallelismo e perpendicolarità, distanze, luoghi, coniche) può essere quello di costruire, insieme agli allievi, una **libreria di funzioni** per la geometria analitica del piano. Gli obiettivi sono molteplici: automatizzare i calcoli di routine, consolidare il concetto di algoritmo, svolgere semplici esempi di programmazione, utilizzare in ambienti significativi strutture dati come i vettori e le liste.
Può essere utilizzato qualunque programma; il lavoro proposto utilizza l'ambiente di programmazione della calcolatrice TI-92.

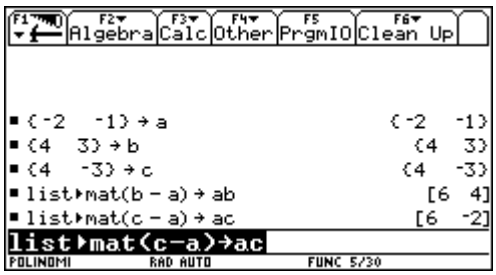
Punti e vettori

Decidiamo innanzitutto di indicare in modo diverso, anche sintatticamente, **punti** e **vettori**; la TI-92 possiede due strutture dati distinte: le *liste* (con parentesi graffe) e le *matrici* (con parentesi quadre); i vettori non sono altro che matrici ad una sola riga. Rappresenteremo dunque i punti mediante *liste* $\{x,y\}$, e i vettori mediante *matrici* $[x,y]$ ad una sola riga. (Per i vettori utilizzeremo nel seguito la notazione $\underline{AB}$, tipograficamente più semplice della notazione $\overrightarrow{AB}$).

Le liste sono molto utili e potenti perché una qualunque operazione tra liste (della stessa dimensione) dà come risultato una lista i cui elementi sono il risultato dell'operazione sugli elementi delle due liste.



Ecco per esempio definiti i punti $A(-2,-1)$, $B(4,3)$, $C(4,-3)$ e i vettori $\underline{AB}$, $\underline{AC}$.



I comandi
list►mat e mat►list
consentono di trasformare liste in vettori e viceversa.

La retta

Tradizionalmente la **retta** viene definita algebricamente in forma cartesiana, mediante l'equazione $ax+by+c = 0$, oppure nella forma $y = mx+q$; decidiamo di utilizzare questa seconda forma, che

fornisce direttamente informazioni geometriche sulla retta. Una retta parallela all'asse *y* avrà invece equazione $x=k$.

La **pendenza** (o coefficiente angolare) p di una retta non parallela all'asse *y* viene definita come il rapporto $p = b/a$ di un suo vettore direzione $[a,b]$. La retta AB è dunque il luogo dei punti $P(x,y)$ tali che

$$\text{pendenza } (\underline{AP}) = \text{ pendenza } (\underline{AB})$$

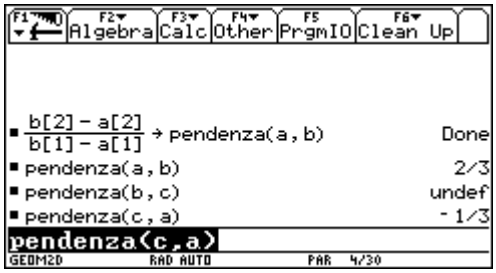
$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = p,$$

da cui si ottiene l'equazione cartesiana della retta:

$$y = p(x-x_A)+y_A.$$

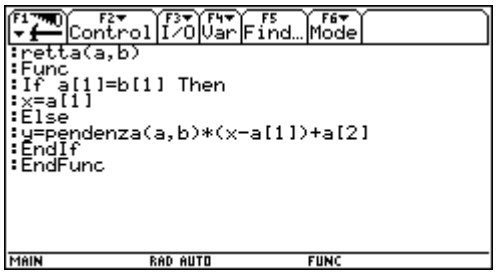
Siamo pronti per costruire la prima funzione: definiamo la pendenza della retta per due punti.



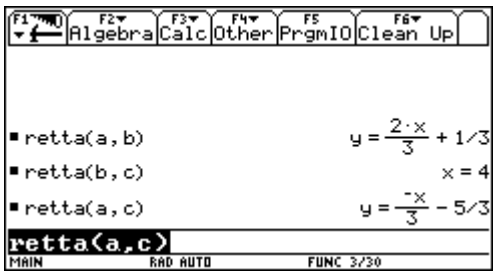
Come si vede, la TI-92 dà in uscita undef per la pendenza di una retta parallela all'asse *y*. Un aspetto interessante in fase di programmazione è quello di distinguere con la struttura

IF …THEN…ELSE

il comportamento delle rette parallele all'asse *y*. Il primo programma è il seguente.



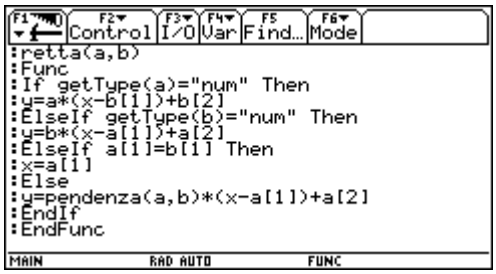
Ecco le rette per i punti *A*, *B*, *C*, dell'esempio precedente.

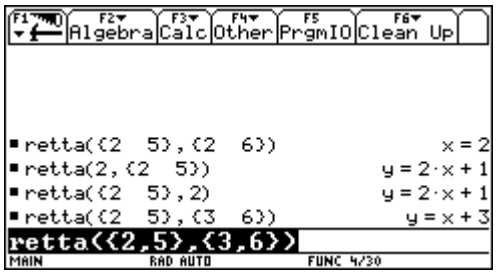


Una retta può essere data, anziché mediante due punti, mediante un punto e la pendenza. Vediamo allora di generalizzare la funzione precedente, utilizzando il comando

getType

che distingue se una variabile contiene una lista (quindi è un punto) oppure un numero (che è la pendenza). Ecco il programma più generale.



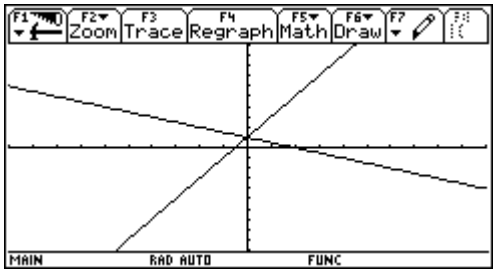


Angoli

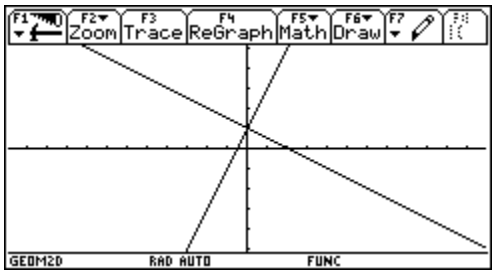
Utilizzando un software come Derive, o una calcolatrice grafica, è di fondamentale importanza una osservazione: mentre il **parallelismo** è un invariante per *dilatazioni* degli assi (cambiamento delle unità di misura), cioè per trasformazioni del tipo $(x, y)\to(hx, ky)$, non lo è la **perpendicolarità**.
L'immagine seguente mostra per esempio i grafici delle rette

$$y = 2x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1\,.$$



Su una calcolatrice grafica ha senso parlare di rette perpendicolari solo se si utilizza uno *zoom monometrico*. La TI-92 dà la possibilità di passare ad un grafico monometrico che conservi tutte le informazioni del grafico corrente.



Attraverso il prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{a}=[x_1, y_1]$, $\mathbf{b}=[x_2, y_2]$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = [x_1, y_1]\cdot[x_2, y_2] = x_1x_2+y_1y_2$$

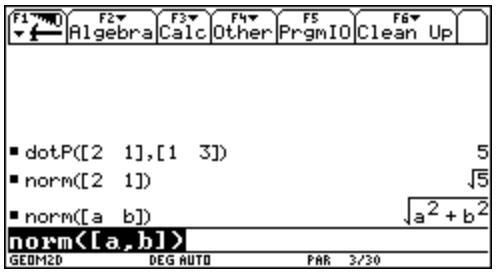
è possibile definire nel modo più naturale l'ampiezza di un angolo, come **angolo convesso tra due vettori**: da

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\cos\alpha$$

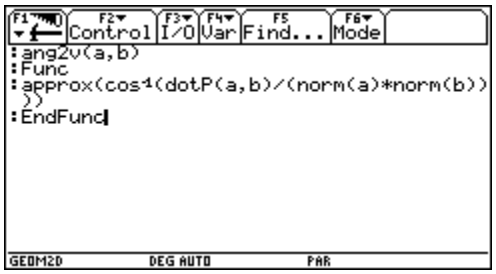
ricaviamo

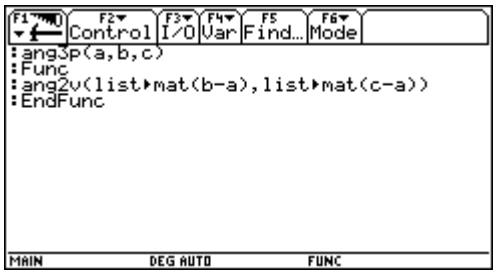
$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|}, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|} \right)$$

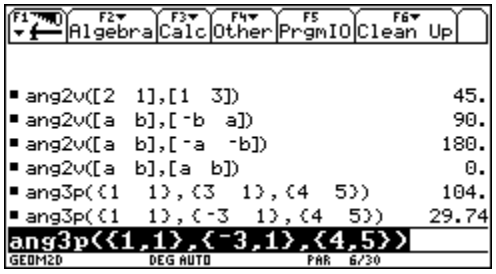
La TI-92 mette a disposizione il comando dotP per il prodotto scalare di due vettori, e il comando norm per il modulo (la *norma*) di un vettore.



È possibile quindi definire le funzioni ang2v e ang3p che prendono in ingresso rispettivamente due vettori e tre punti, e danno in uscita l'ampiezza (in gradi) del relativo angolo convesso.

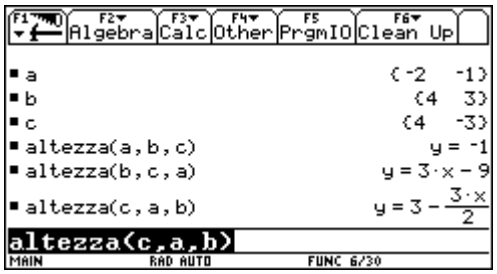




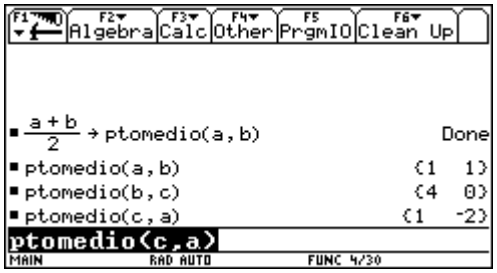


Altezze, mediane, assi

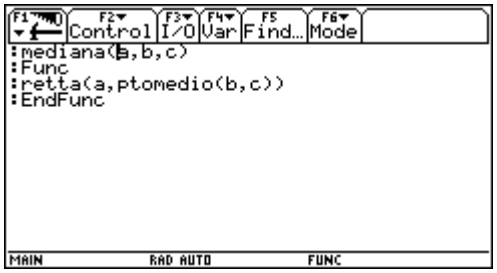
Possiamo ora definire la funzione altezza, che prende in ingresso tre punti ordinati (i vertici del triangolo) e dà in uscita l'equazione dell'altezza passante per il primo punto e ortogonale al lato degli altri due .

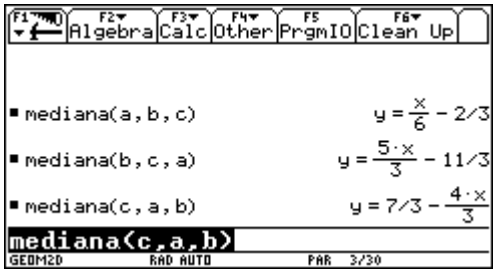


Una volta definito il punto medio tra due punti:

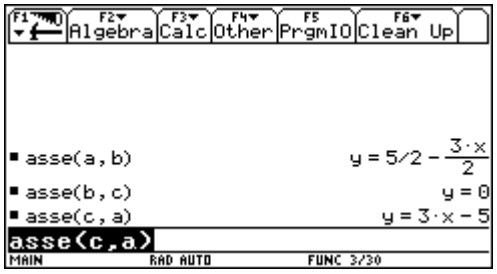


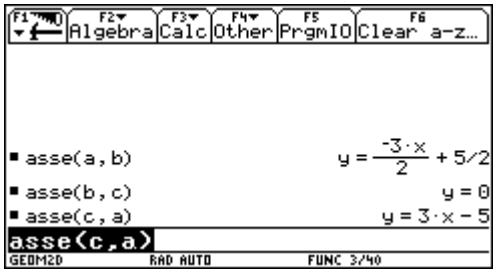
è possibile definire la funzione che prende in ingresso tre punti ordinati e fornisce in uscita l'equazione della mediana passante per il primo vertice.





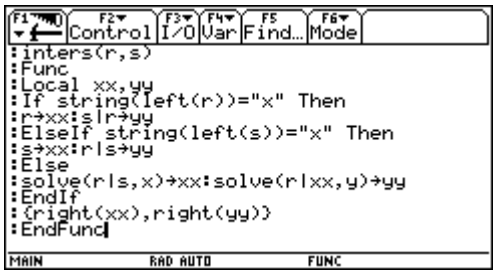
In modo analogo si definisce la funzione che fornisce l'equazione dell'asse di un segmento.

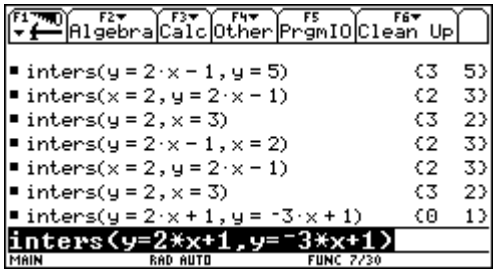




Intersezione tra due rette

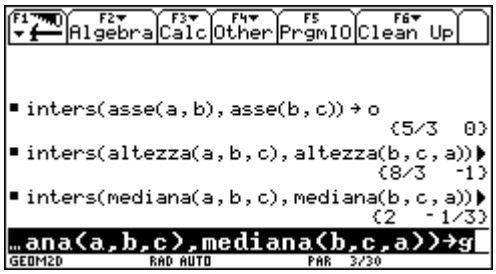
Una funzione utile è quella che calcola il punto di intersezione tra due rette, date in ingresso come equazioni. Per semplificare, supponiamo che le due rette non siano parallele.



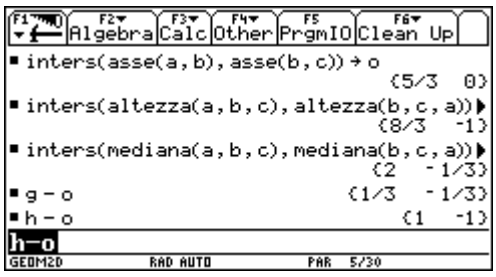


Il teorema di Eulero

Possiamo ora determinare il circocentro, l'ortocentro e il baricentro del triangolo *ABC*.



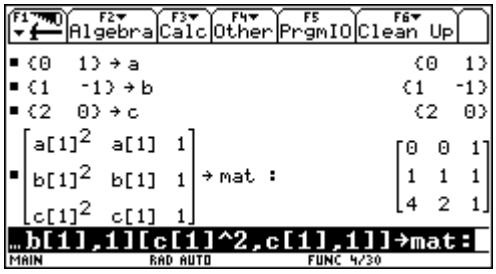
Si può verificare facilmente il teorema di Eulero: il circocentro *O*, il baricentro *G*, l'ortocentro *H* di un triangolo sono allineati, e $\underline{OH} = 3\underline{OG}$.



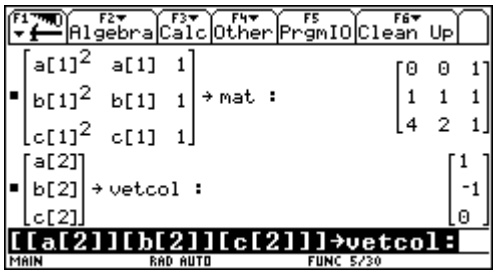
Parabole

Il lavoro può continuare in modo del tutto analogo per le parabole. Per esempio risolviamo il problema di determinare l'equazione della parabola (ad asse parallelo all'asse *y*) per tre punti; si tratta di risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite: i coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione $y = ax^2+bx+c$. Tale sistema è abbastanza laborioso da risolvere con carta e penna; è

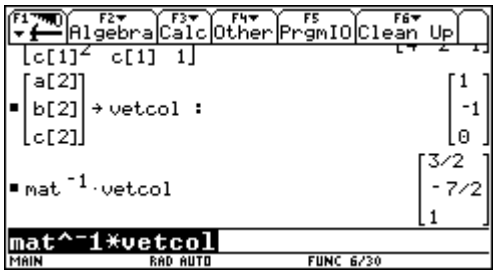
bene che lo studente cerchi di cogliere la *struttura* dei calcoli, e quando è possibile, di implementarli in un programma. Nel caso di un sistema lineare si può usare il comando
simult(m,v)
che prende in ingresso la matrice dei coefficienti e il vettore colonna dei termini noti, e restituisce (se esiste) la soluzione del sistema.
A titolo di esempio mostriamo la risoluzione passo-passo. Innanzitutto si costruisce la matrice dei coefficienti.



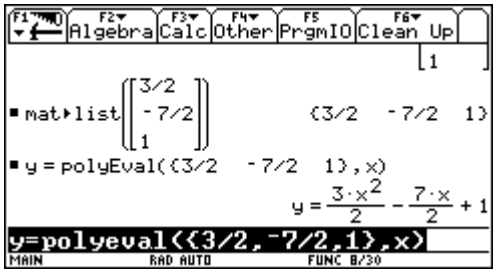
Poi il vettore colonna dei termini noti.



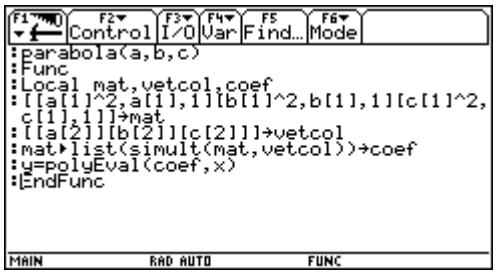
L'inversa della matrice per il vettore colonna ci dà il vettore delle soluzioni.

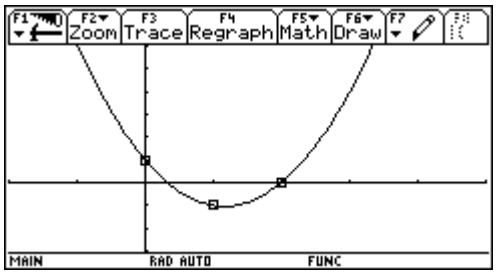


Trasformiamo il vettore in lista e usiamo il potente comando polyeval, che costruisce un polinomio a partire dalla lista dei coefficienti.



L'intero processo può essere automatizzato da un programma.





L'attività di programmazione può proseguire a diversi livelli di approfondimento.