1

# SISTEMI DINAMICI DISCRETI

**Michele Impedovo**
Università Bocconi di Milano
michele.impedovo@uni-bocconi.it

*Le certezze della fisica e di altre scienze della natura vengono oggi messe in forse da una nuova serie di fenomeni* ***caotici****, mai osservati prima, sia per questioni di miopia e pigrizia mentale, sia per la mancanza di strumenti adeguati come il computer. Questi fenomeni si rifiutano di obbedire al paradigma della scienza classica, pur rimanendo in una cornice deterministica. Il caos, infatti, rende impossibili le predizioni non per una sua intrinseca natura indeterministica, ma per la sua estrema sensibilità alle condizioni iniziali, che dovrebbero essere date con una precisione impossibile.*

*Ian Stewart*, Dio gioca a dadi?

## Un problema, per iniziare

*In un piccolo paese del Varesotto, 1000 abitanti, il tasso di mortalità annuo è del 20%; fortunatamente ogni anno nascono 100 bambini. Qual è nel tempo l'evoluzione della popolazione? Si estingue, aumenta a dismisura, si stabilizza?*

Questo piccolo problema può dare l'idea dell'importanza dei sistemi dinamici discreti nella modellazione dei problemi reali: è possibile descrivere in modo relativamente facile una o più grandezze (un *sistema*) che evolvono (un *sistema dinamico*) a passi costanti della variabile *tempo* (un *sistema dinamico discreto*). Il sistema può essere globalmente anche complesso, ma *in piccolo* è pienamente caratterizzato da una semplice legge ricorsiva.

Per esempio il nostro problema iniziale è descritto dalla legge

$$x_{t+1} = x_t - 0.2x_t + 100$$

cioè

$$x_{t+1} = 0.8x_t + 100$$

e dalla condizione iniziale

$$x_0 = 1000.$$

A partire dalla condizione iniziale possiamo costruire ogni elemento della successione sulla base della conoscenza dell'elemento precedente.

$x_0 = 1000$,
$x_1 = 0.8x_0 + 100$
$x_2 = 0.8x_1 + 100$
$x_3 = 0.8x_2 + 100$
…

$$1000, 900, 820, 756, \ldots$$

## Qualche notazione

Un sistema dinamico discreto, SDD d'ora in avanti, (del primo ordine) è caratterizzato da una legge del tipo

$$x_{t+1} = f(t, x_t),$$

(chiamata *equazione alle differenze*) dove:

- $t = 0, 1, 2, \ldots$
- $x$ è una successione definita in modo ricorsivo mediante la funzione $f$.

Per esempio l'equazione alle differenze vista prima

$$x_{t+1} = 0.8x_t + 100$$

definisce un SDD del primo ordine.

La celebre successione di Fibonacci, definita dalla legge

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t$$

è invece un SDD del secondo ordine, poiché la conoscenza del generico elemento della successione presuppone la conoscenza di due elementi precedenti.

L'equazione alle differenze del primo ordine

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{N}{x_t}\right)$$

fornisce il classico *algoritmo di Erone* per il calcolo della radice quadrata di $N$: definisce infatti una successione che converge (rapidamente) a $\sqrt{N}$ . Per esempio, con $N = 2$ e $x_0 = 1$:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots$$

Si osservi che $x_3$ approssima già la quinta cifra decimale di $\sqrt{2}$ .

Una *soluzione* di un'equazione alle differenze è una successione che soddisfa, per ogni $t$, l'equazione data.

In generale le soluzioni di un'equazione alle differenze sono infinite: ciascuna è caratterizzata dalle *condizioni iniziali*, che di norma sono tante quante l'ordine dell'equazione. Per esempio l'equazione del I ordine $x_{t+1} = 0.8x_t + 100$, con la condizione iniziale $x_0 = 1000$, definisce l'unica successione

$$1000, 900, 820, 756, \ldots.$$

L'equazione del II ordine $x_{t+2} = x_{t+1}+x_t$ con le condizioni iniziali $x_0=1$, $x_1=3$ definisce l'unica successione

$$1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, \ldots.$$

In seguito tratteremo solo di SDD del I ordine.

Un SDD può descrivere l'evoluzione di più grandezze contemporaneamente, mediante un vettore:

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t)$$

dove $f$ è una funzione da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$. Il numero di componenti del vettore $\mathbf{x}$ è la *dimensione* del SDD. Tratteremo inizialmente SDD di dimensione 1 e poi forniremo esempi di SDD a più dimensioni.

**Esplorazioni ed errori**

Con EXCEL possiamo facilmente esplorare un SDD: in una cella si scrive il valore iniziale (o i valori iniziali, se l'ordine è maggiore di 1); nella cella successiva si scrive la legge ricorsiva, utilizzando i riferimenti relativi alla cella precedente. Poi si copia la formula fino all'indice che si preferisce.

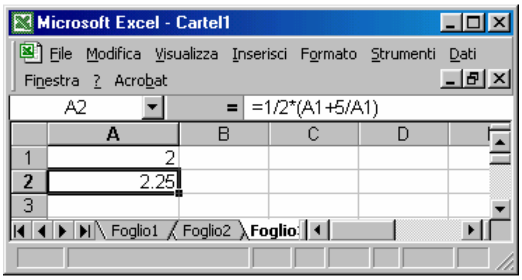
Ecco per esempio la costruzione, con EXCEL, dell'algoritmo di Erone per approssimare $\sqrt{5}$, con $x_0$=2, cioè del SDD

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{5}{x_t}\right), x_0 = 5.$$

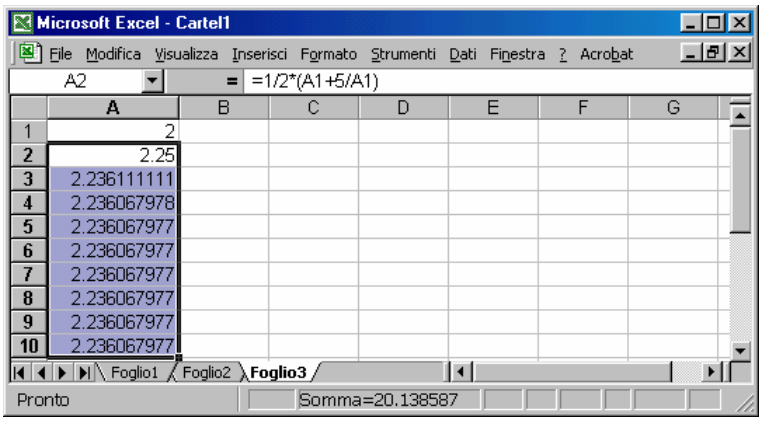
Scriviamo il valore iniziale 2 nella cella A1. Nella cella A2 scriviamo la legge ricorsiva, mediante il comando

"=1/2*(A1+5/A1)".

Nella cella A2 viene calcolato il valore di $x_1 = 2.25$




Il riferimento alla cella A1 è *relativo*: se si "afferra" con il cursore del mouse il quadratino nero in basso a destra della cella A2 e lo si trascina verso il basso la formula viene copiata aggiornando riga per riga il riferimento alla cella A1, che diventa A2, A3, ….




L'esplorazione numerica di una successione conduce inevitabilmente a errori. Per esempio la successione

$$x_{n+1} = 4x_n - 1$$

e valore iniziale $x_0 = 1/3$ è la successione costante di valore 1/3, come si può subito controllare. Se proviamo a calcolare con Excel i primi 12 elementi della successione sembra tutto normale.

| t | x[t] |
|---|---|
| 0 | 0,333333333 |
| 1 | 0,333333333 |
| 2 | 0,333333333 |
| 3 | 0,333333333 |
| 4 | 0,333333333 |
| 5 | 0,333333333 |
| 6 | 0,333333333 |
| 7 | 0,333333333 |
| 8 | 0,333333333 |
| 9 | 0,333333333 |
| 10 | 0,333333333 |
| 11 | 0,333333333 |
| 12 | 0,333333333 |

Ma al 13-esimo elemento ecco la sorpresa: l'ultima cifra decimale non è più 3, è 2.

| | |
|---|---|
| 13 | 0,333333332 |

Da questo momento in poi l'errore si amplifica rapidamente, la successione raggiunge il valore 0 e poi diverge a $-\infty$.

| | |
|---|---|
| 14 | 0,333333328 |
| 15 | 0,333333313 |
| 16 | 0,333333254 |
| 17 | 0,333333015 |
| 18 | 0,333332062 |
| 19 | 0,333328247 |
| 20 | 0,333312988 |
| 21 | 0,333251953 |
| 22 | 0,333007813 |
| 23 | 0,33203125 |
| 24 | 0,328125 |
| 25 | 0,3125 |
| 26 | 0,25 |
| 27 | 0 |

| | |
|---|---|
| 28 | -1 |
| 29 | -5 |
| 30 | -21 |
| 31 | -85 |
| 32 | -341 |
| 33 | -1365 |
| 34 | -5461 |
| 35 | -21845 |
| 36 | -87381 |
| 37 | -349525 |
| 38 | -1398101 |
| 39 | -5592405 |
| 40 | -22369621 |

Che cosa è successo? Qualunque approssimazione numerica tronca le cifre decimali da un certo punto in poi: iterando la legge ricorsiva l'errore si propaga fino a rendere inattendibile il risultato.

A questo proposito esiste un curioso aneddoto che appartiene alla storia dei SDD. Nel 1960 il meteorologo Edward Lorenz riuscì a costruire un modello ridotto (solo 12 variabili) per le previsioni del tempo, mediante un sistema dinamico discreto; utilizzando un computer poteva simulare numericamente l'evoluzione del tempo impostando i 12 valori di partenza delle sue variabili. Un giorno scoprì che le stesse condizioni iniziali, con le stesse leggi ricorsive, generavano evoluzioni completamente diverse! Era successo che al termine della giornata di lavoro il calcolatore (di allora!) aveva calcolato un migliaio di iterazioni delle variabili e Lorenz aveva ricopiato su un pezzo di carta i 12 valori della 500-esima iterazione; la mattina successiva, per non ricominciare tutto da capo, Lorenz aveva introdotto nel calcolatore, come valori iniziali, i numeri che aveva ricopiato il giorno prima. Si aspettava così di osservare di nuovo la seconda metà del processo già svolto. Sorpresa: l'evoluzione era completamente differente!

Ogni sistema di calcolo automatico mostra un certo numero di cifre decimali, ma ne ha in memoria qualcuna in più che non viene visualizzata.

Cerchiamo di capire ad esempio come si comporta con EXCEL: nella cella A1 scriviamo

"=1/7"; se il numero visualizzato, cioè 0.142857143, fosse lo stesso che EXCEL ha in memoria, moltiplicandolo per 1000 e togliendo la parte intera al risultato dovremmo ottenere 0.857143.

Allora nella cella A2 digitiamo la formula

"=1000*A1–int(1000*A1)"

(int($x$) è la funzione *parte intera*). Otteniamo invece:

| |
|---|
| 0,142857143 |
| 0,857142857 |

"Dietro" all'ultima cifra decimale visualizzata (3) si nascondono evidentemente altre cifre. Potrebbe essere interessante analizzare, con un sistema di calcolo automatico, la successione

$$x_0 = 1/3, \qquad x_{n+1} = 10x_n - \mathrm{int}(10x_n).$$

Un modo per contare il numero di cifre decimali memorizzate da un sistema di calcolo numerico consiste nel valutare l'uguaglianza

$$1 + 2^{-n} = 1$$

che dal punto di vista simbolico è sempre FALSA, mentre dal punto di vista numerico diventa VERA da un certo $n$ in poi, dato il numero di cifre memorizzate (in base 2) è finito.

La formula

"=1+2^(–47)=1"

restituisce FALSO, mentre la formula

"=1+2^(–48)=1"

restituisce VERO: EXCEL lavora con 47 cifre binarie e quindi con 15 cifre decimali, dato che $2^{-47} \approx 7\cdot 10^{-15}$.

Tornando a Lorenz, i numeri che aveva ricopiato non erano gli stessi che il calcolatore aveva in memoria: la differenza, inizialmente piccolissima, dava luogo a errori via via maggiori e a evoluzioni completamente differenti. Come vedremo, questa è una caratteristica centrale dei sistemi dinamici discreti.

La tabella seguente mostra i primi 20 valori delle due successioni caratterizzate dalla stessa legge ricorsiva

$$x_{t+1} = 2x_t - 100$$

e dai valori iniziali, rispettivamente, $x_0 = 99.999$ e $y_0 = 100.001$.

| t | x[t] | y[t] | t | x[t] | y[t] |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 99,999 | 100,001 | 11 | 97,952 | 102,048 |
| 1 | 99,998 | 100,002 | 12 | 95,904 | 104,096 |
| 2 | 99,996 | 100,004 | 13 | 91,808 | 108,192 |
| 3 | 99,992 | 100,008 | 14 | 83,616 | 116,384 |
| 4 | 99,984 | 100,016 | 15 | 67,232 | 132,768 |
| 5 | 99,968 | 100,032 | 16 | 34,464 | 165,536 |
| 6 | 99,936 | 100,064 | 17 | -31,072 | 231,072 |
| 7 | 99,872 | 100,128 | 18 | -162,144 | 362,144 |
| 8 | 99,744 | 100,256 | 19 | -424,288 | 624,288 |
| 9 | 99,488 | 100,512 | 20 | -948,576 | 1148,576 |

Come si vede, i valori delle due successioni rimangono vicini solo per le prime iterazioni, ma già la differenza $x_{20}-y_{20}$ è maggiore di 2000!

## SDD lineari

Analizziamo il SDD in un certo senso più semplice, quello lineare, cioè caratterizzato da un'equazione del tipo

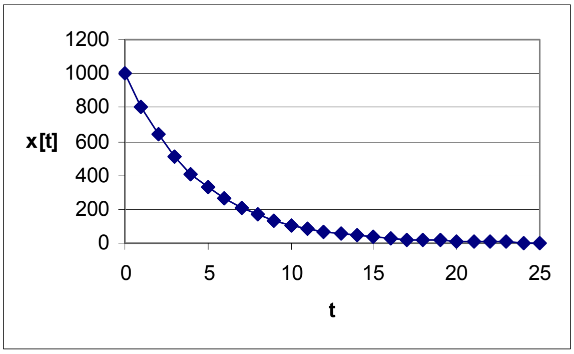
$$x_{t+1} = ax_t$$

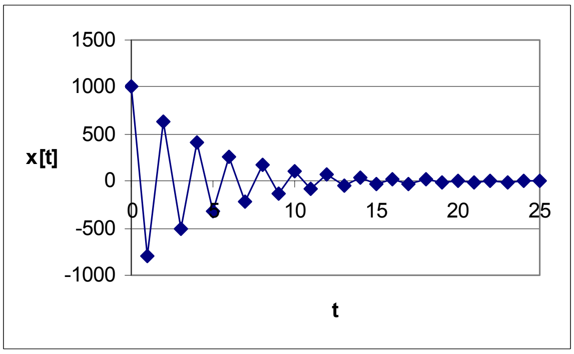
con $a\neq 0$. In questo caso si ricava facilmente, dalla legge ricorsiva, la legge generale:

$x_1 = ax_0$
$x_2 = ax_1 = a^2 x_0$
$x_3 = ax_2 = a^3 x_0$
…
$x_t = a^t x_0$.

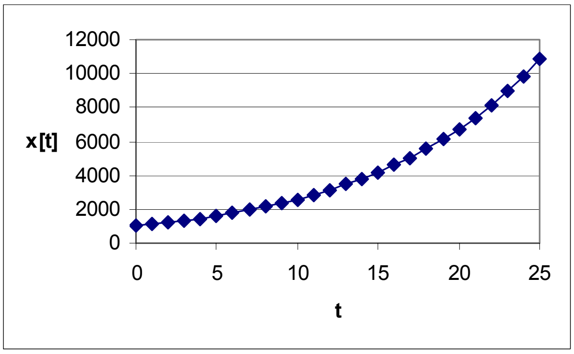
Al variare di $a$ possiamo riassumere le diverse caratteristiche della successione.

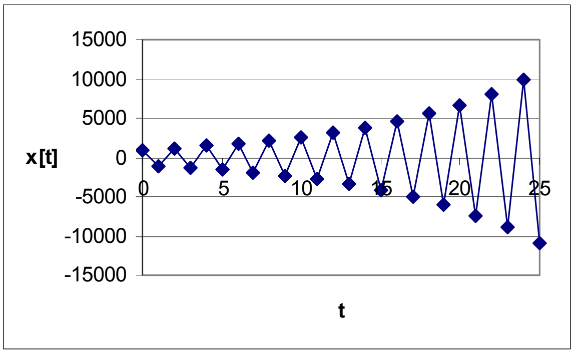
- Se $-1 < a < 1$ allora $a^t$ tende a 0; per qualunque condizione iniziale la successione $x_t$ tende a 0, tanto più rapidamente quanto più $a$ è vicino a 0. Per $0 < a < 1$ si ha la tipica decrescita esponenziale di valore iniziale $x_0$ e base $a$: ad ogni passo $x$ diminuisce di una percentuale pari a $1-a$. Per esempio se $a$=0.8 allora ad ogni passo $x$ diminuisce del 20%. Per $-1 < a < 0$ la convergenza a 0 non è monotona, i valori di $x$ oscillano con segni alternati. Ecco per esempio i grafici delle successioni $x_{t+1}=0.8x_t$ e $x_{t+1}=-0.8x_t$ entrambi con la condizione iniziale $x_0$=1000 (nei grafici le linee che congiungono i punti sono puramente indicative, servono soltanto ad agevolare la lettura del grafico).



- Se $a>1$ allora $x_t$ è una successione esponenziale crescente: ad ogni passo $x$ aumenta di una percentuale pari a $a-1$. Se $a<-1$ allora $x_t$ è una successione irregolare, a segni alternati, che diverge in modulo. Ecco per esempio i grafici delle successioni $x_{t+1}=1.1x_t$ e $x_{t+1}=-1.1x_t$, sempre con $x_0=1000$.




- I casi $a=1$ e $a=-1$ sono poco interessanti

Se si applica la legge ricorsiva $x_{t+1}=ax_t$ alle dinamiche di popolazioni (uomini, animali, vegetali, batteri, …) si ottiene il cosiddetto *modello di Malthus* (Thomas Malthus, 1766-1834): una popolazione inizialmente di entità $x_0$ è soggetta ad un tasso di natalità $n$ (percentuale di nuovi nati, per esempio ogni anno, sul totale della popolazione) e ad un tasso di mortalità $m$ (percentuale di morti ogni anno sul totale della popolazione). Se non ci sono immigrazioni né emigrazioni l'evoluzione nel tempo del numero di individui sarà del tipo

$$x_{t+1}=x_t+nx_t-mx_t$$

cioè $x_{t+1}=ax_t$, con $a=1+n-m$.

Secondo questo modello:

- se $0<a<1$, cioè se $n<m$, allora la popolazione è destinata ad estinguersi esponenzialmente;
- se $a>1$, cioè se $n>m$, allora la popolazione aumenta esponenzialmente.

Il modello di Malthus è ragionevole nella misura in cui la popolazione non è soggetta a limitazioni esterne (spazi ridotti, risorse limitate, …). Per esempio una colonia di batteri in abbondante liquido di coltura inizialmente è soggetta ad una crescita di tipo malthusiano; poi, al crescere esponenziale del numero di batteri l'inquinamento ambientale e la mancanza di risorse modificano (anche radicalmente) i tassi demografici ($n$ diminuisce e $m$ aumenta) e il modello non è più attendibile. Vedremo più avanti un modello più raffinato che tenga conto delle limitazioni ambientali.

Riassumendo: l'equazione alle differenze lineare

$$x_{t+1}=ax_t$$

è "domestica" e non presenta alcuna sorpresa.

**SDD lineari affini**

Di tutt'altra pasta (molto più saporita) è invece l'equazione (lineare affine)

$$x_{t+1}=ax_t+b.$$

Proviamo con EXCEL a esplorare la successione $x_{t+1} = 0.8x_t + 100$, con $x_0 = 1000$.

| t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1000 | 10 | 553,7 | 20 | 505,8 | 30 | 500,6 | 40 | 500,1 |
| 1 | 900 | 11 | 542,9 | 21 | 504,6 | 31 | 500,5 | 41 | 500,1 |
| 2 | 820 | 12 | 534,4 | 22 | 503,7 | 32 | 500,4 | 42 | 500,0 |
| 3 | 756 | 13 | 527,5 | 23 | 503,0 | 33 | 500,3 | 43 | 500,0 |
| 4 | 704,8 | 14 | 522,0 | 24 | 502,4 | 34 | 500,3 | 44 | 500,0 |
| 5 | 663,8 | 15 | 517,6 | 25 | 501,9 | 35 | 500,2 | 45 | 500,0 |
| 6 | 631,1 | 16 | 514,1 | 26 | 501,5 | 36 | 500,2 | 46 | 500,0 |
| 7 | 604,9 | 17 | 511,3 | 27 | 501,2 | 37 | 500,1 | 47 | 500,0 |
| 8 | 583,9 | 18 | 509,0 | 28 | 501,0 | 38 | 500,1 | 48 | 500,0 |
| 9 | 567,1 | 19 | 507,2 | 29 | 500,8 | 39 | 500,1 | 49 | 500,0 |

Si osserva (forse con una certa sorpresa) che il sistema converge per eccesso a 500: la popolazione di quel paese tenderà nel tempo a stabilizzarsi a 500 abitanti.

Poiché i parametri del problema sono i numeri 0.8, 100 e 1000, viene spontaneo chiedersi in che modo 500 scaturisca da quei valori. Per esempio, che cosa succederebbe se inizialmente ci fossero non 1000, ma 2000 abitanti? Se provate a porre la domanda agli studenti, gran parte di essi vi risponderanno che la popolazione si stabilizzerà a 1000 abitanti. Il cosiddetto *modello proporzionale* spadroneggia: se partendo da 1000 abitanti si arriva a 500, allora con 2000 abitanti si arriverà a 1000 …. Esploriamo la nuova successione con Excel, ci basta cambiare $x_0$.

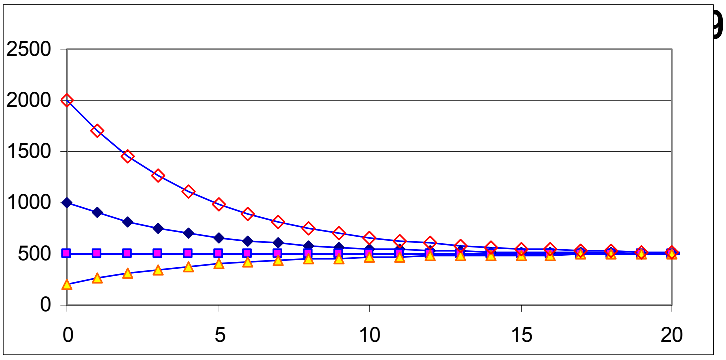
| t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2000 | 10 | 661,1 | 20 | 517,3 | 30 | 501,9 | 40 | 500,2 |
| 1 | 1700 | 11 | 628,8 | 21 | 513,8 | 31 | 501,5 | 41 | 500,2 |
| 2 | 1460 | 12 | 603,1 | 22 | 511,1 | 32 | 501,2 | 42 | 500,1 |
| 3 | 1268 | 13 | 582,5 | 23 | 508,9 | 33 | 501,0 | 43 | 500,1 |
| 4 | 1114,4 | 14 | 566,0 | 24 | 507,1 | 34 | 500,8 | 44 | 500,1 |
| 5 | 991,5 | 15 | 552,8 | 25 | 505,7 | 35 | 500,6 | 45 | 500,1 |
| 6 | 893,2 | 16 | 542,2 | 26 | 504,5 | 36 | 500,5 | 46 | 500,1 |
| 7 | 814,6 | 17 | 533,8 | 27 | 503,6 | 37 | 500,4 | 47 | 500,0 |
| 8 | 751,7 | 18 | 527,0 | 28 | 502,9 | 38 | 500,3 | 48 | 500,0 |
| 9 | 701,3 | 19 | 521,6 | 29 | 502,3 | 39 | 500,2 | 49 | 500,0 |

E se inizialmente ci fossero solo 200 abitanti?

| t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 200 | 10 | 467,8 | 20 | 496,5 | 30 | 499,6 | 40 | 500,0 |
| 1 | 260 | 11 | 474,2 | 21 | 497,2 | 31 | 499,7 | 41 | 500,0 |
| 2 | 308 | 12 | 479,4 | 22 | 497,8 | 32 | 499,8 | 42 | 500,0 |
| 3 | 346,4 | 13 | 483,5 | 23 | 498,2 | 33 | 499,8 | 43 | 500,0 |
| 4 | 377,1 | 14 | 486,8 | 24 | 498,6 | 34 | 499,8 | 44 | 500,0 |
| 5 | 401,7 | 15 | 489,4 | 25 | 498,9 | 35 | 499,9 | 45 | 500,0 |
| 6 | 421,4 | 16 | 491,6 | 26 | 499,1 | 36 | 499,9 | 46 | 500,0 |
| 7 | 437,1 | 17 | 493,2 | 27 | 499,3 | 37 | 499,9 | 47 | 500,0 |
| 8 | 449,7 | 18 | 494,6 | 28 | 499,4 | 38 | 499,9 | 48 | 500,0 |
| 9 | 459,7 | 19 | 495,7 | 29 | 499,5 | 39 | 500,0 | 49 | 500,0 |

Sorprendentemente nel lungo periodo non cambia nulla, la successione converge a 500 (per eccesso se $x_0 > 500$, per difetto se $x_0 < 500$) qualunque sia la condizione iniziale. Se $x_0 = 500$, allora il sistema non si muove, risulta $x_t = 500$ per ogni $t$.

La figura seguente mostra il comportamento delle diverse successioni: la successione costante di valore 500 sembra *attrarre* tutte le altre.




Questo primo approccio di tipo sperimentale è utile dal punto di vista didattico per costruire passo-passo la successione, per osservare come i successivi valori tendono (in questo caso) a stabilizzarsi, per esplorare il problema con diversi valori iniziali e convincersi che le corrispondenti successioni convergono tutte a 500. Ora però vogliamo capire **perché**.

## L'equilibrio di un SDD

Perché 500? Abbiamo scoperto che 500 è funzione solo dei parametri 0.8 e 100, e non dipende dal valore iniziale. Vogliamo capire qual è la funzione, questa misteriosa *black box* che, presi in ingresso 0.8 e 100, sputa 500.

Chiediamoci: esiste un valore iniziale $x_0$ per il quale la popolazione rimane costante nel tempo? Deve risultare, per ogni $t$:

$$x_t = x_{t+1}$$

cioè

$$x_t = 0.8x_t + 100.$$

Questo accade se e solo se esiste un numero $x$ per il quale risulti

$$x = 0.8x + 100.$$

$$0.2x = 100$$

$$x = 500.$$

In altri termini ci siamo chiesti per quale numero $x$ il 20% di $x$ (diminuzione percentuale della popolazione) è uguale a 100 (aumento assoluto della popolazione):

$$x = 500 - 0.2 \cdot 500 + 100 = 500 - 100 + 100 = 500.$$

Il valore 500 viene chiamato *punto di equilibrio* (o *equilibrio*) del sistema: se il sistema parte da 500, rimane inchiodato a quel valore per sempre. In altri termini: la successione costante di valore 500 è una soluzione dell'equazione alle differenze $x_{t+1} = 0.8x_t + 100$.

In generale per i SDD lineari affini

$$x_{t+1} = ax_t + b$$

(se $a \neq 1$) tra le infinite soluzioni esiste una ed una sola successione costante: l'equazione

$$x_t = x_{t+1}$$

diventa

$$x = ax + b$$

la cui soluzione (se $a \neq 1$) è

$$x = \frac{b}{1-a}$$

Se si parte da $x_0 = b/(1-a)$ il sistema dinamico … non è dinamico, è stazionario.

L'equilibrio di un SDD lineare affine

$$x_{t+1} = ax_t + b$$

(con $a \neq 1$) è $\frac{b}{1-a}$.

Se invece $a=1$ allora il sistema diventa

$$x_{t+1} = x_t + b$$

ed è immediato osservare che non ci sono equilibri: il sistema evolve linearmente verso $+\infty$ se $b>0$, verso $-\infty$ se $b<0$. Il caso $a = 1$ e $b = 0$ è ovviamente privo di interesse.

Abbiamo dunque visto che la successione costante di valore $b/(1-a)$ è un equilibrio del SDD

$$x_{t+1} = ax_t + b.$$

Per il SDD in cui $a=0.8$ e $b=100$ abbiamo sperimentalmente osservato che partendo da valori diversi dall'equilibrio, la corrispondente successione converge comunque all'equilibrio. È vero per qualsiasi valore iniziale? È questa una caratteristica comune di qualunque equilibrio in qualunque SDD? Sarebbe carino, no?

**La stabilità di un equilibrio**

Tentiamo, a partire dal valore iniziale $x_0$, di estrarre dalla legge ricorsiva la legge generale:

$x_1 = ax_0 + b$

$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$

$x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) = a^3x_0 + a^2b + ab + b$

$x_4 = ax_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b$

…

Al generico tempo $t$ risulta (se $a \neq 1$):

$$x_t = a^t x_0 + b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{t-1}\right)$$

$$= a^t x_0 + b\sum_{k=0}^{t-1} a^k$$

$$= a^t x_0 + b\frac{1-a^t}{1-a}$$

$$= a^t x_0 + \frac{b}{1-a} - \frac{b}{1-a}a^t$$

$$= a^t\left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

Ritroviamo, prepotente, l'equilibrio $b/(1-a)$. Se indichiamo con $E$ tale numero, possiamo scrivere la soluzione di un SDD lineare affine in modo significativo:

$$\boxed{x_t = a^t\left(x_0 - E\right) + E\,.}$$

Nella soluzione generale possiamo leggere, da un nuovo punto di vista, informazioni già note e scoprire informazioni nuove:

- Se $x_0 = E$ allora la soluzione è la successione costante di valore $E$.
- Se $a$ è compreso tra $-1$ e 1, allora $a^t$ tende a 0 e il sistema converge a $E$ per qualunque valore iniziale $x_0$. Si dice in questo caso che $E$ è un equilibrio *stabile* (oppure che è un *attrattore*), perché *attrae* successioni il cui valore iniziale è diverso da $x_0$. Anzi, in questo caso $E$ è un *attrattore globale*, nel senso che qualunque sia il punto di partenza $x_0$ del sistema, il sistema evolve convergendo a $E$.
- Se $a > 1$ allora il sistema diverge esponenzialmente. In questo caso l'equilibrio $E$ è *instabile*; se si parte da $E$ il sistema resta fermo, ma la più piccola perturbazione sulla condizione iniziale produce una catastrofe: il sistema si allontana indefinitamente dall'equilibrio.

Per fissare le idee su quest'ultima osservazione consideriamo il seguente problema.

*Un pigro quarantenne di nome Oblomov decide di vivere di rendita. Dispone di un capitale di 100.000 € che produce ogni mese interessi pari al 1% (di questi tempi è un tasso improbabile); per vivere stima di aver bisogno di 1000 € al mese. Ce la farà?*

Se indichiamo con $x_t$ il deposito bancario del nostro Oblomov al tempo $t$ (misurato in mesi), il problema può essere modellizzato mediante il SDD

$$x_{t+1} = x_t + 0.01x_t - 1000$$

cioè

$$x_{t+1} = 1.01x_t - 1000$$

con la condizione iniziale è $x_0$ = 100000. Si tratta ancora di un SDD della forma $x_{t+1}=ax_t+b$, però questa volta $a > 1$. L'equilibrio del sistema è

$$E = \frac{b}{1-a} = \frac{-1000}{1-1.01} = 100.000,$$

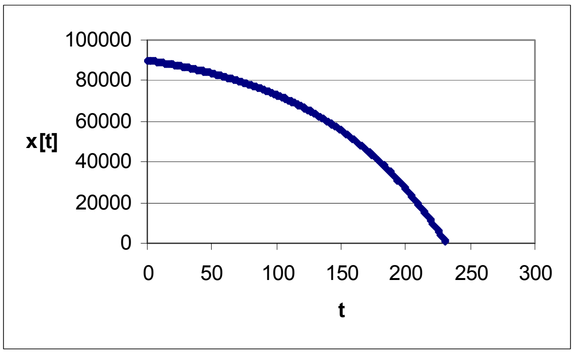
cioè esattamente la condizione iniziale! Infatti l'interesse mensile del 1% su 100.000 € (l'aumento percentuale) è uguale alla quota mensile di 1000 € necessaria per vivere (la diminuzione assoluta). In queste condizioni il nostro quarantenne può vivere di rendita per l'eternità.

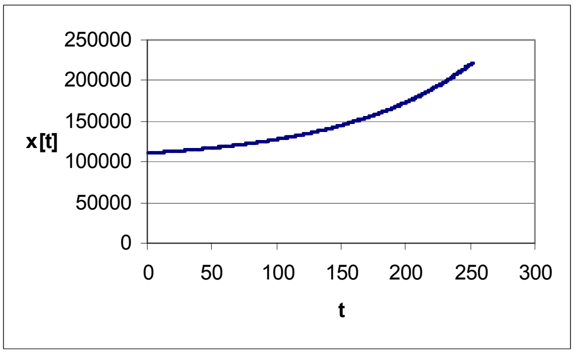
Ma … si tratta di un equilibrio assai precario.

Che cosa succede se il capitale iniziale è (seppur di poco) diverso da 100.000 €?

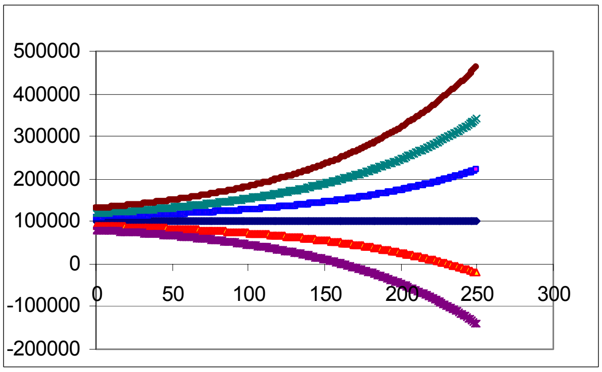
Se $x_0 < 100.000$ (anche di un solo centesimo di euro) allora il caro Oblomov è destinato (prima o poi) alla rovina.

Se invece $x_0 > 100.000$ (anche di un solo centesimo di euro) allora il capitale aumenta indefinitamente. Ecco l'andamento del deposito per $x_0 = 90.000$ € e per $x_0 = 110.000$ €.




Dopo circa 20 anni = 240 mesi nel primo caso il capitale si estingue, nel secondo caso raddoppia: il fatto che l'equilibrio $E = 100000$ sia instabile è ben visualizzato dalla figura seguente, in cui sono rappresentate diverse soluzioni per diverse condizioni iniziali: il grafico fa comprendere perché un equilibrio di questo tipo sia chiamato anche *repulsore*.




Riassumendo: per un SDD lineare affine $x_{t+1} = ax_t + b$, se $|a|>1$ l'equilibrio è instabile: qualunque valore iniziale diverso da $b/(1-a)$ genera una successione divergente.

Torniamo per un attimo alla successione $x_{n+1} = 4x_n - 1$ che abbiamo utilizzato per mostrare la propagazione degli errori di un sistema di calcolo numerico. Ora sappiamo che si tratta di un SDD lineare affine il cui equilibrio è $E = b/(1-a)=1/3$. Ma sappiamo anche che si tratta di un equilibrio instabile, dato che $a$=4>1: qualunque valore iniziale diverso da $x_0$=1/3 condurrà inevitabilmente ad un successione divergente. Ecco perché Excel (o qualunque altro programma) fa divergere a $-\infty$ quella successione: Excel rappresenta internamente il numero 1/3 con un piccolo errore di troncamento. Noi crediamo di impostare $x_0 = 1/3$, in realtà risulta $x_0 = 1/3-\varepsilon < 1/3$, e di conseguenza la successione diverge a $-\infty$.

Abbiamo visto dunque che un SDD lineare affine caratterizzato da

*diminuzione percentuale + aumento assoluto*

possiede un equilibrio stabile (converge sempre all'equilibrio), mentre un sistema soggetto a

*aumento percentuale + diminuzione assoluta*

possiede un equilibrio instabile (diverge per qualunque valore $x_0 \neq E$).

Questa osservazione è molto utile per le strategie in ambiente economico e più in generale in ambienti in cui una certa risorsa sia soggetta a prelievo periodico (bacini di pesca, aree di caccia, imposte sui cittadini, …): se vogliamo che la risorsa non si estingua, ma raggiunga un equilibrio stabile, non dobbiamo prelevarne una data quantità costante ad ogni periodo, ma una certa *percentuale costante*.

Se applichiamo la legge lineare affine $x_{t+1}=ax_t+b$ alle dinamiche di popolazioni, possiamo arricchire il modello di Malthus tenendo conto di eventuali immigrazioni o emigrazioni. Il coefficiente $a$ continua a descrivere il bilancio demografico $1+n-m$ per ogni periodo mentre $b$ descrive i dati assoluti di periodo riguardanti immigrazioni (se $b$>0, oppure emigrazioni se $b$<0).

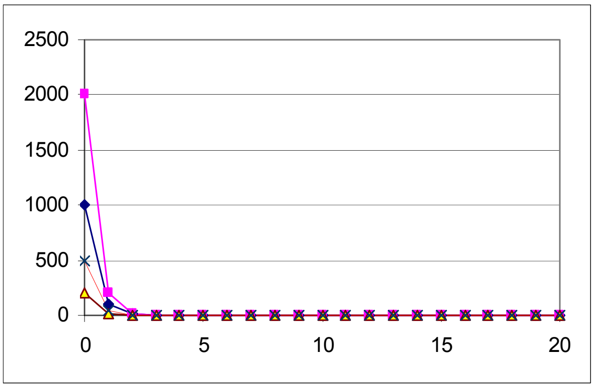
Nei SDD lineari affini di cui abbiamo parlato finora i coefficienti $a$ e $b$ sono costanti: una generalizzazione ricca di sviluppi interessanti (che non tratteremo) consiste nel pensare $a$ e $b$ dipendenti dal tempo, e quindi sostituire ad $a$ e $b$ sue successioni $a_t$, $b_t$. Il più generale SDD lineare affine diventa allora

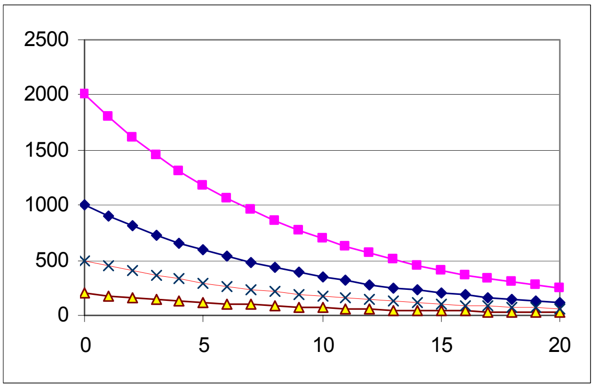
$$x_{t+1} = a_t x_t + b_t.$$

Ancora una osservazione sulla quale torneremo: abbiamo visto che se $a$ è compreso tra $-1$ e 1 allora l'equilibrio è stabile. Le due figure seguenti mostrano i grafici delle successioni relative ai SDD

$$x_{t+1} = 0.1x^t \qquad x_{t+1} = 0.9x^t$$

con diverse condizioni iniziali (200, 500, 1000, 2000), entrambe per $t$ = 0, 1, 2, …, 20.




In entrambi i casi l'equilibrio è $E$=0 e in entrambi i casi l'equilibrio è stabile, ma le soluzioni del primo sistema (con $a$=0.1) convergono a 0 più rapidamente del secondo (con $a$=0.9). Si tratta di un risultato ovvio se si pensa che la rapidità di convergenza è determinata dalla base $a$ dell'esponenziale $a^t$: un SDD lineare affine converge (se converge) tanto più rapidamente quanto più $a$ è vicino a 0.

## Il diagramma di fase

Abbiamo un altro modo ancora per esplorare un SDD e per capirne la struttura: tracciare il *diagramma di fase*.

Consideriamo ancora il sistema definito dalla legge lineare

$$x_{t+1} = 0.8x_t + 100.$$

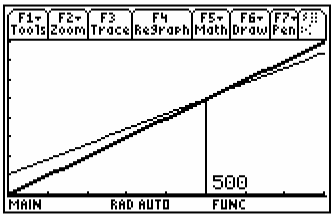
Sappiamo che l'equilibrio del sistema (la successione costante) si trova risolvendo l'equazione

$$x = 0.8x + 100,$$

che è l'equazione risultante del sistema

$$\begin{cases} y = 0.8x + 100 \\ y = x \end{cases}$$

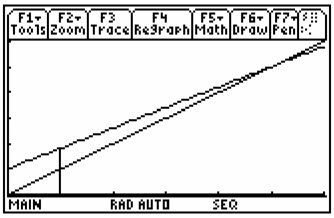
Risulta quindi naturale tracciare sullo stesso piano i grafici della funzione lineare $f: x \to 0.8x+100$ e della funzione identità $I$: $x \to x$. La figura seguente è stata costruita con una TI-89, che implementa il diagramma di fase di un SDD .



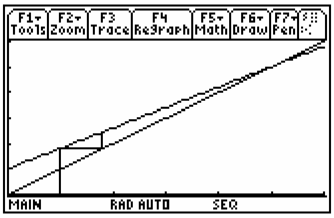

L'equilibrio è l'ascissa $x^*=500$ del punto di intersezione tra le due rette.

Poiché $f(x_t) = x_{t+1}$, se da un punto qualsiasi $x_0$ sull'asse delle ascisse saliamo in verticale fino al grafico della funzione $f$ troviamo il punto di coordinate $(x_0, ax_0+b)$ cioè il punto $(x_0, x_1)$:

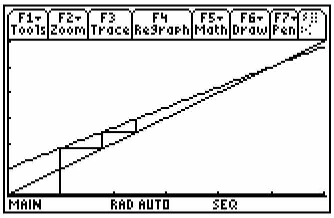
Nella figura seguente siamo partiti da $x_0=100$ e abbiamo trovato il punto $(x_0, x_1) = (100, 180)$.



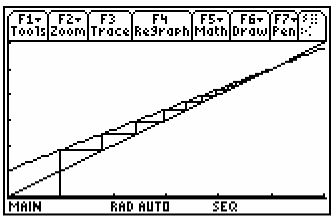

Se ora dal punto $(x_0, x_1)$ ci muoviamo prima in orizzontale fino alla retta $y=x$ e poi in verticale fino alla funzione $f$ troviamo dapprima il punto $(x_1, x_1)$ e poi il punto $(x_1, x_2)$.



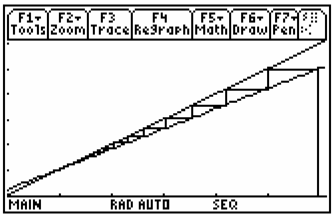

Di nuovo ci spostiamo in orizzontale fino a $y=x$ e in verticale fino a $f$ trovando il punto $(x_2, x_2)$ e poi il punto $(x_2, x_3)$.




Per ogni coppia di spostamenti (orizzontale e verticale) si passa dal punto $(x_{t-1}, x_t)$ al punto $(x_t, x_{t+1})$: in definitiva le ordinate dei successivi punti su $f$ sono i successivi valori della successione che parte da $x_0$. Se proseguiamo indefinitamente costruiamo una *ragnatela* e osserviamo che il sistema non può che convergere a 500.

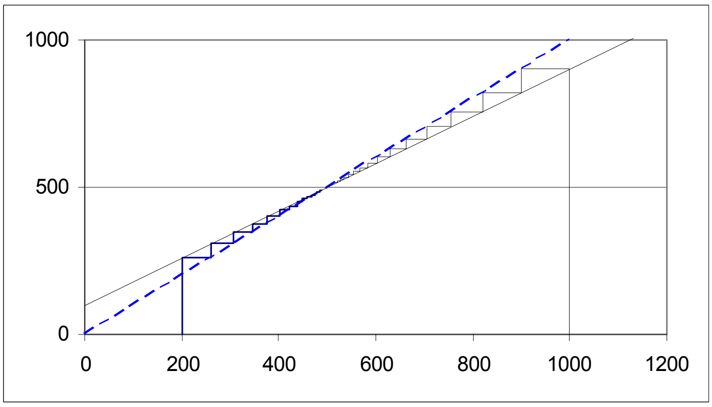



Analogamente, se partiamo da un valore maggiore di 500, per esempio 1000, i successivi spostamenti ci riportano all'equilibrio. Nella figura seguente la finestra grafica è $[400, 1000]\times[400, 1000]$.




Il diagramma di fase ci fa capire da un altro punto di vista (un punto di vista *geometrico*) perché, se $0 < a < 1$ tutte le successioni convergono all'equilibrio.

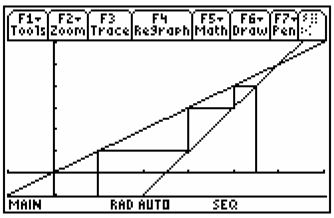
Il diagramma di fase si può ottenere facilmente anche con EXCEL.

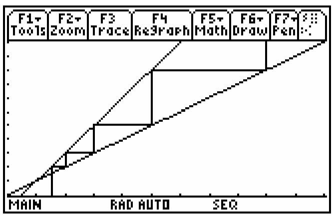



Tutt'altro accade invece se $a > 1$. Consideriamo il diagramma di fase relativo al sistema dinamico

$$x_{t+1} = 2x_t - 500,$$

il cui equilibrio è sempre $b/(1-a) = 500$, rispettivamente con $x_0$=450 (finestra grafica $[-100, 600]\times [-100, 600]$) e $x_0$=550 (finestra grafica $[400, 1500]\times [400, 1500]$): qualunque sia $x_0 \neq 500$ il sistema diverge, a $+\infty$ se $x_0>500$, a $-\infty$ se $x_0<500$.

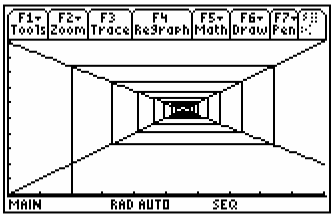


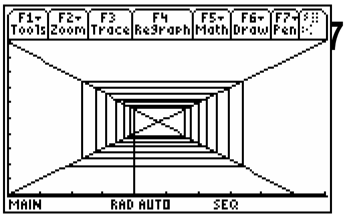



Come si può comprendere, il fatto che la ragnatela converga all'equilibrio o si allontani dall'equilibrio dipende proprio dalla pendenza $a$ con cui la retta $y=ax+b$ interseca la retta $y=x$: se tale pendenza è in modulo minore di 1 allora il sistema converge, se è maggiore di 1 il sistema diverge. Non è detto che l'evoluzione sia monotona; le seguenti figure mostrano rispettivamente i diagrammi di fase dei sistemi dinamici

$$x_{t+1} = -0.8x_t + 100,\ x_0 = 20 \qquad \text{(l'equilibrio è } 100/1.8 \approx 56)$$

$$x_{t+1} = -1.1x_t + 100,\ x_0 = 40 \qquad \text{(l'equilibrio è } 100/2.1 \approx 48).$$




Il primo sistema converge all'equilibrio: la ragnatela si chiude intorno al punto di intersezione; per il secondo sistema la ragnatela si apre e si allontana dall'equilibrio.

## Catene di Markov

Fino ad ora abbiamo trattato sistemi *uni-dimensionali*, abbiamo cioè analizzato l'evoluzione di una sola grandezza. Possiamo analizzare sistemi a più dimensioni. Consideriamo il seguente problema.

*Nel Paese X, in cui votano costantemente 12 000 cittadini, si vota ogni anno per il rinnovo del Parlamento e ogni anno si presentano alle elezioni due partiti: il partito A e il partito B. Ad ogni elezione gli umori dell'elettorato in parte cambiano: non tutti quelli che hanno votato per un partito lo votano ancora l'anno successivo. Da stime e sondaggi si ricava la seguente tabella, che illustra come si spostano le preferenze dell'elettorato da un anno all'altro:*

| | **da A** | **da B** |
|---|---|---|
| **a A** | 70% | 20% |
| **a B** | 30% | 80% |

*Se le ultime elezioni dell'anno 2003 hanno assegnato 11000 voti al partito A e 1000 voti al partito B, come andranno le elezioni del 2004? E nel 2010? E nel 2020? Qual è l'evoluzione del sistema?*

Indichiamo con $A_0$ e $B_0$ la distribuzione di voti al tempo $t$=0. I voti di A al tempo $t$=1 saranno pari al 70% di $A_0$ più il 20% di $B_0$. Analogamente i voti di B al tempo $t$=1 saranno pari al 30% di $A_0$ più l'80% di $B_0$. La distribuzione di voti al tempo $t$=1 è dunque la seguente:

$$A_1 = 0.7A_0 + 0.2B_0.$$

$$B_1 = 0.3A_0 + 0.8B_0.$$

Possiamo utilizzare una scrittura più elegante (e più strutturata) utilizzando vettori e matrici:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_0$$

dove $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$. La matrice **M** è detta *matrice di transizione*, con ovvio significato.

Supponiamo che **M** sia costante nel tempo; possiamo allora definire un SDD a due dimensioni:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 11000 \\ 1000 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_t.$$

Si tratta della naturale generalizzazione del SDD lineare uni-dimensionale $x_{t+1} = ax_t$.

Il sistema è caratterizzato da una *matrice stocastica* (o *matrice di probabilità*), in cui la somma delle colonne è sempre 1: la matrice descrive un sistema chiuso, senza entrate né uscite. Una successione di questo tipo è chiamata *catena di Markov* (Andrei Markov, 1856-1922). Nel nostro esempio risulta

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \cdot 11000 + 0.2 \cdot 1000 \\ 0.3 \cdot 11000 + 0.8 \cdot 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7900 \\ 4100 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che la somma degli elementi di $\mathbf{x}_1$ è ancora 12000: è una caratteristica delle matrici stocastiche, facilmente dimostrabile.

Per la proprietà associativa del prodotto tra matrici:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{M}\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{x}_0) = (\mathbf{M}\,\mathbf{M})\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{M}^2\,\mathbf{x}_0$$

e in generale (in perfetta analogia con i sistemi lineari uni-dimensionali)

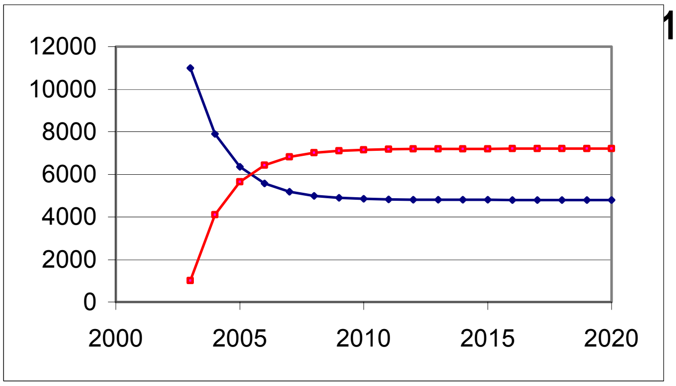
$$\mathbf{x}_t = \mathbf{M}^t\,\mathbf{x}_0$$

Facendo i calcoli (o, meglio, facendoli fare al calcolatore) risulta

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6350 \\ 5650 \end{bmatrix},\ \mathrm{x}_7 = \begin{bmatrix} 4848 \\ 7152 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_{17} = \begin{bmatrix} 4800 \\ 7200 \end{bmatrix}.$$

Ecco la tabella e il grafico delle due successioni (i voti per A e per B, cioè la prima componente e la seconda componente del vettore $\mathbf{x}$).

| t | t+2003 | A | B |
|---|---|---|---|
| 0 | 2003 | 11000 | 1000 |
| 1 | 2004 | 7900 | 4100 |
| 2 | 2005 | 6350 | 5650 |
| 3 | 2006 | 5575 | 6425 |
| 4 | 2007 | 5187,5 | 6812,5 |
| 5 | 2008 | 4993,8 | 7006,3 |
| 6 | 2009 | 4896,9 | 7103,1 |
| 7 | 2010 | 4848,4 | 7151,6 |
| 8 | 2011 | 4824,2 | 7175,8 |
| 9 | 2012 | 4812,1 | 7187,9 |
| 10 | 2013 | 4806,1 | 7193,9 |
| 11 | 2014 | 4803,0 | 7197,0 |
| 12 | 2015 | 4801,5 | 7198,5 |
| 13 | 2016 | 4800,8 | 7199,2 |
| 14 | 2017 | 4800,4 | 7199,6 |
| 15 | 2018 | 4800,2 | 7199,8 |
| 16 | 2019 | 4800,1 | 7199,9 |
| 17 | 2020 | 4800,0 | 7200,0 |




Si osserva che il sistema si stabilizza rapidamente verso il vettore $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}4800\\7200\end{bmatrix}$: analogamente a quanto accade per i sistemi uni-dimensionali si tratta del vettore di equilibrio, cioè dell'unico vettore che soddisfa l'equazione vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}$$

e tale che la somma degli elementi sia 12000. Ogni catena di Markov converge ad un vettore di equilibrio che è indipendente dal vettore iniziale $\mathbf{x}_0$.

Non è difficile, con un minimo bagaglio di algebra lineare, analizzare il generico SDD lineare affine vettoriale

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{b},$$

dove il vettore **b** descrive eventuali nuovi ingressi (o uscite) dal sistema.

**Matrici di Leslie**

Supponiamo di aver diviso una popolazione in 6 fasce di età di 15 anni ciascuna:
Fascia 1: 0 -15 anni
Fascia 2: 15 - 30 anni
...
Fascia 5: 60 - 75 anni
Fascia 6: più di 75 anni

Fotografiamo la distribuzione della popolazione nelle varie fasce d'età in un certo istante mediante il vettore $\mathbf{P}_0$, il cui $k$-esimo elemento rappresenta il numero di individui della popolazione che appartengono alla fascia $k$. Chiediamoci quale sarà la distribuzione nelle varie fasce d'età esattamente tra 15 anni, cioè quale sarà il vettore $\mathbf{P}_1$.

Per saperlo abbiamo bisogno di due tipi di informazioni:

1) i *coefficienti di sopravvivenza*, e cioè la probabilità che un individuo che appartiene alla fascia d'età $k$ sia vivo dopo 15 anni, e quindi appartenga alla fascia d'età $k$+1. Indichiamo con $s_k$ tali coefficienti.

2) I *coefficienti di fertilità*, e cioè il numero medio di nuovi nati per ciascun individuo della fascia $k$. Più precisamente: dagli individui della fascia $k$, nell'intervallo di tempo di 15 anni, nasceranno $f_k$ nuovi individui.

Una *matrice di Leslie* **L** (P.H. Leslie, *The Use of Matrices in Certain Population Mathematics*, [5]) contiene tutte le informazioni date dai coefficienti $s_k$ e dai coefficienti $f_k$ e, nell'ipotesi delle 6 fasce d'età, ha la seguente struttura.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_5 & 0 \end{bmatrix}$$

In generale il generico elemento $L_{h,k}$ della matrice descrive la percentuale di individui che, facendo parte della fascia d'età $k$, dopo 15 anni sono ancora vivi nella fascia d'età $h$.

È ovvio che gli unici elementi diversi da 0, a parte la prima riga, sono quelli del tipo $\mathbf{L}_{k+1,k}$. I coefficienti di fertilità rappresentano anch'essi in un certo senso, il passaggio dallo "fascia 0" (="non ancora nato") alla fascia 1.

È altresì ovvio che sulla prima riga il primo e l'ultimo elemento saranno costituiti da numeri piccoli: il tasso di fertilità è basso per i nuovi nati e per gli anziani.

Ecco un esempio di matrice di Leslie a 6 stadi, con $\Delta t$ = 15 anni.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.29 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Anche la matrice **L** è una *matrice di transizione*: se il vettore $\mathbf{P}_t$ descrive la suddivisione in fasce di età di una popolazione in un certo istante $t$, al tempo $t$+1 (cioè dopo 15 anni, nel nostro esempio) la popolazione sarà descritta dal vettore $\mathbf{LP}_{t+1}$. Abbiamo in definitiva costruito un SDD lineare

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{LP}_t$$

con condizione iniziale $\mathbf{P}_0$, che descrive l'evoluzione della distribuzione della popolazione nel tempo, a passi costanti di 15 anni. Per esempio se:

$\mathbf{P}_0$ = [8, 9.5, 7, 8, 7, 4]

(i dati sono in milioni di individui), ecco la situazione dopo 15, 30, 45 anni:

$\mathbf{P}_1$ = [10, 7.6, 9.3, 6.3, 6.8, 4.2] totale 44.2

$\mathbf{P}_2$ = [9.1, 9.5, 7.4, 8.4, 5.4, 4.1] totale 43.9

$\mathbf{P}_3$ = [10.2, 8.6, 9.3, 6.7, 7.1, 3.2] totale 45.2

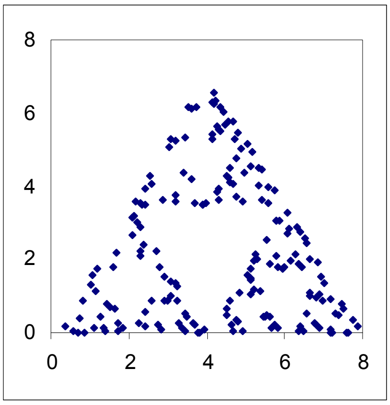
Si può osservare che la popolazione (nell'ipotesi che la matrice di Leslie resti costante) tende a crescere indefinitamente. Il sistema si evolve in tutt'altro modo, invece, se i coefficienti di fertilità sono bassi. Per esempio, basta porre $\mathbf{L}_{1,2} = 0.08$ (anziché 0.8) e la popolazione tenderà ad estinguersi.

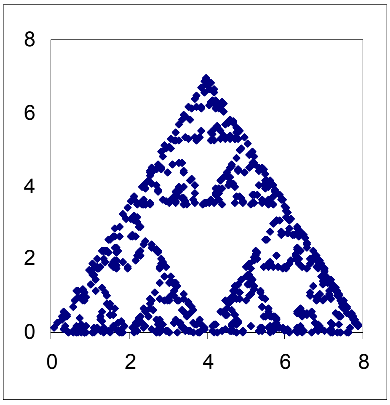
### Il triangolo di Sierpinski

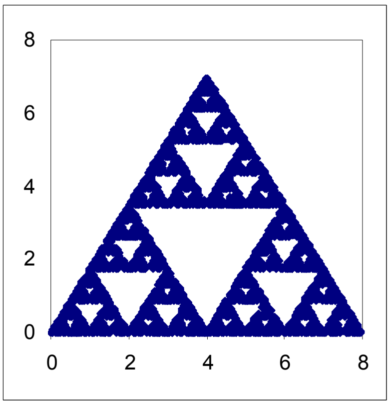
Abbiamo visto che SDD lineari (affini) hanno al più un punto di equilibrio, un solo punto fa da *attrattore* del sistema. Esistono SDD con attrattori più complessi: per mostrare un solo esempio, di dimensione 2, consideriamo il seguente SDD, nel quale introduciamo un elemento casuale. Sia dato un triangolo qualsiasi, per esempio il triangolo di vertici (0, 0), (8, 0), (4, 7). Partiamo da un punto qualsiasi $P_0$. Ora lanciamo un "dado" a tre facce:

- se esce 1 allora $P_{n+1}$ è il punto medio tra $P_n$ e $A$;
- se esce 2 allora $P_{n+1}$ è il punto medio tra $P_n$ e $B$;
- se esce 3 allora $P_{n+1}$ è il punto medio tra $P_n$ e $C$.

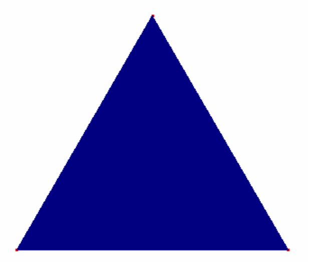
Se calcoliamo con Excel i primi 200, 800, 5000 elementi di questa successione e tracciamo i grafici dei corrispondenti punti otteniamo rispettivamente le seguenti figure.



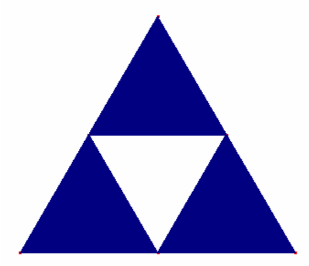



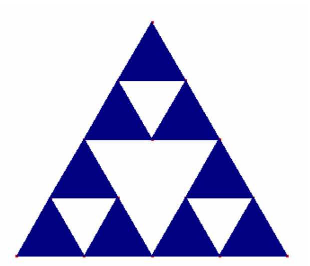

L'*attrattore* di questo SDD è il cosiddetto *triangolo di Sierpinski* (Waclaw Sierpinski, 1882-1969): dato un triangolo qualsiasi $T_0$, si consideri la figura $T_1$ che si ottiene "togliendo" il triangolo centrale, cioè il triangolo dei punti medi; da $T_1$ si tolga il triangolo centrale ad ognuno dei 3 triangoli ottenuti; da $T_2$ si tolga il triangolo centrale ad ognuno dei $3^2$ triangoli ottenuti, …, da $T_n$ si tolga il triangolo centrale ad ognuno dei $3^n$ triangoli ottenuti, e così via. Il limite, per $n \to \infty$, di $T_n$ è il triangolo di Sierpinski.



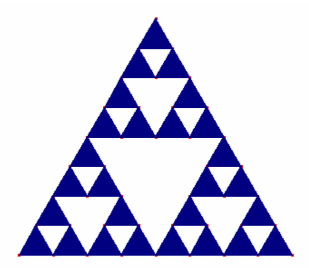
$T_0$



$T_1$



$T_2$



$T_3$

È davvero sorprendente che, qualunque sia il punto di partenza, la successione tende a *riempire* il triangolo di Sierpinski. È una delle sorprese che ci riservano i sistemi dinamici. Ne vedremo molte altre.

**Prede e predatori**

Abbiamo analizzato fino ad ora solo SDD di tipo lineare (e come abbiamo visto, c'è già parecchia carne al fuoco). Proviamo a vedere che cosa succede con leggi ricorsive più complesse.

Un celebre modello non lineare (quadratico) bidimensionale, molto utilizzato in ecologia e in biologia (ma anche in economia), è il modello *preda-predatore*, noto anche come *modello di Lotka-Volterra*, dai nomi del matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) e del chimico e demografo americano (di origine ucraina) Alfred Lotka (1889-1949), che lo proposero, nella versione continua, nei primi anni '20 del secolo scorso. Si suppone che in un ambiente circoscritto convivano due specie, una delle quali (i predatori) si ciba dell'altra (le prede). Indichiamo con

- $x_t$ il numero di prede al tempo $t$ (il tempo sia misurato, per esempio, in mesi);
- $y_t$ il numero di predatori al tempo $t$.

In assenza di predatori le prede crescerebbero esponenzialmente, con fattore di crescita $a>1$, secondo l'equazione

$$x_{t+1} = x_t + ax_t.$$

La presenza dei predatori fa sì che il fattore di crescita non sia costante, ma decresca linearmente con il numero di predatori:

$$x_{t+1} = x_t + x_t\,(a - by_t).$$

I predatori, in assenza di prede, si estinguerebbero esponenzialmente, secondo l'equazione

$$y_{t+1} = y_t - cy_t.$$

La presenza delle prede fa sì che il tasso di decrescita $-c$ cresca linearmente con il numero delle prede:

$$y_{t+1} = y_t + y_t\,(-c + dx_t)$$

In definitiva il SDD (quadratico) è il seguente:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_t + x_t\,(a - by_t) \\ y_t + y_t\,(-c + dx_t) \end{bmatrix}$$

con $a$, $b$, $c$, $d$ costanti positive.

Poiché il modello ha senso solo per grandezze positive, una versione più precisa è la seguente:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\left(x_t + x_t\,(a - by_t), 0\right) \\ \max\left(y_t + y_t\,(-c + dx_t), 0\right) \end{bmatrix}$$

Si può facilmente verificare che l'unico equilibrio non banale è $\left[\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}\right]$. Ma si tratta in generale di un equilibrio instabile.

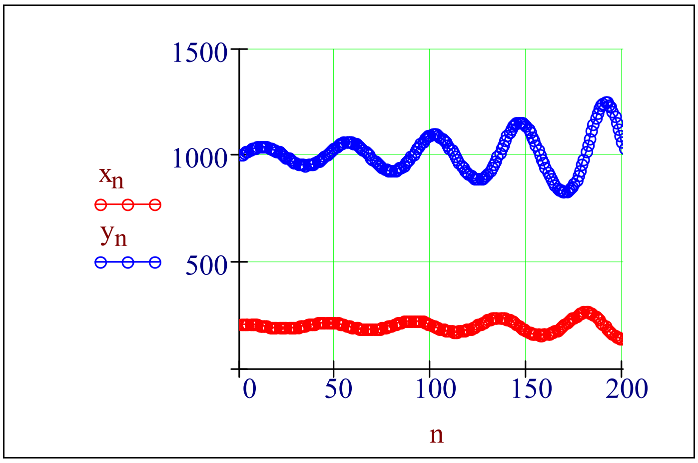
Il grafico seguente si riferisce ai valori dei parametri

$$a = 0.2,\ b = 0.0002,\ c = 0.1,\ d = 0.0005$$

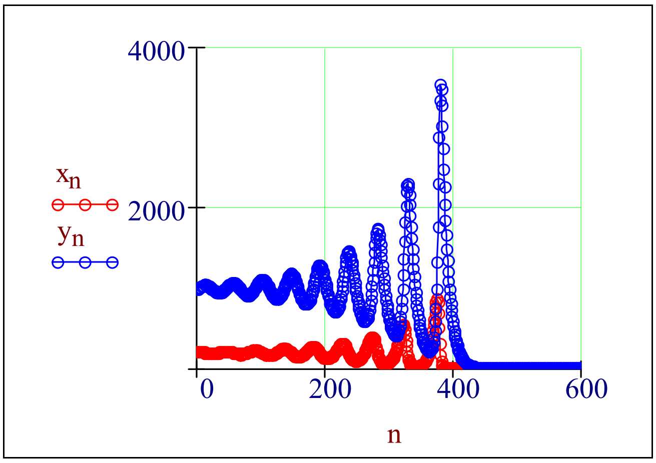
e condizioni iniziali

$$x_0 = 210,\ y_0 = 1000,$$

di poco distanti dall'equilibrio [200, 1000].




La numerosità delle prede e dei predatori, dopo un periodo di relativo equilibrio, oscilla con ampiezza crescente, fino a che le prede e subito dopo i predatori, si estinguono.




**Il gioco di Collatz**

Si tratta di un SDD in **N** (è anche un gioco con i numeri naturali e può essere proposto a qualunque età), definito nel seguente modo:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2} & x_n \text{ pari} \\ 3x_n + 1 & x_n \text{ dispari} \end{cases}$$

Per esempio, con $x_0 = 7$ si la ha seguente successione:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …

che è periodica (di periodo 3) da un certo punto in poi, assumendo ciclicamente i valori 4, 2, 1.

Con $x_0 = 84$ si ottiene

84, 42, 21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, …

Anche in questo caso la successione arriva a 1 e ripete all'infinito la sequenza 4, 2, 1. Per tutti i numeri $x_0 \le 10^{12}$ è stato verificato con i calcolatori che la corrispondente successione di Collatz arriva prima o poi a 1. La terna di numeri 4, 2, 1 costituisce un *attrattore* di questo SDD, è almeno un *attrattore locale*: attira a sé tutte le successioni il cui valore iniziale è minore di $10^{12}$. Ma è un *attrattore globale*, cioè attira tutte le successioni, qualunque sia il valore iniziale? La cosa strabiliante è che nessuno, fino ad ora (nonostante ricerche numerose e approfondite di matematici qualificati), è stato in grado di stabilire se l'affermazione: "Qualunque sia $x_0 \in$ **N**, la successione di Collatz assume prima o poi il valore 1" sia vera (nessuno ha fornito una dimostrazione) o falsa (nessuno ha esibito un controesempio). Il problema è tuttora aperto. Per un approfondimento si veda [4].

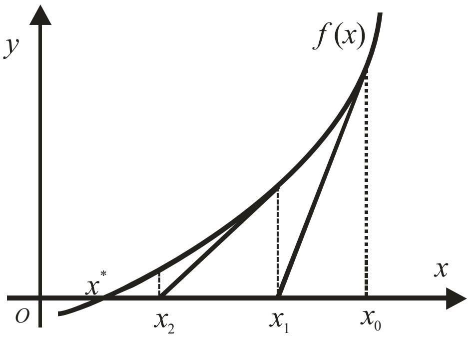
**L'algoritmo di Newton**

Un classico algoritmo ricorsivo è quello di Newton per l'approssimazione delle soluzioni di un'equazione

$$f(x) = 0,$$

dove $f(x)$ è una funzione derivabile.

Una soluzione di $f(x)$=0 è un punto $x^*$ in cui il grafico di $y = f(x)$ interseca l'asse $x$. Se in un punto $x_0$ mandiamo la retta tangente a $f(x)$, questa interseca l'asse $x$ in un punto $x_1$. Si manda la retta tangente a $f(x)$ in $x_1$ e così via: si costruisce una successione $x_0$, $x_1$, $x_2$, … che converge a $x^*$.




La retta tangente a $f(x)$ in $x_0$ ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

e la sua intersezione con l'asse $x$ è la soluzione dell'equazione

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Se generalizziamo otteniamo la legge ricorsiva dell'algoritmo di Newton:

$$\boxed{x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}}$$

Dimostriamo che tale sistema dinamico ammette come equilibrio proprio $x^*$. Deve risultare $x_{t+1} = x_t$, quindi un equilibrio è una soluzione dell'equazione

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 0.$$

Dunque $x^*$, lo zero di $f$ che vogliamo approssimare, è un equilibrio del sistema dinamico. La domanda "$x^*$ è un equilibrio stabile?" è cruciale, perché significa: "possiamo sperare che partendo da $x_0 \neq x^*$ si ottenga una successione che converge a $x^*$?".

Se la risposta fosse "sì" allora avremmo costruito un algoritmo per l'approssimazione di $x^*$.

Abbiamo visto che se il sistema è lineare, cioè del tipo $x_{t+1} = g(x_t)$, con $g(x) = ax+b$, allora l'equilibrio è stabile se il valore assoluto di $|a|$, la pendenza della funzione lineare $g(x)$, è minore di 1.

E se $g(x)$ non è lineare? Non è difficile immaginare che (almeno nel caso in cui $g$ è derivabile) un equilibrio $x^*$ sia stabile (almeno localmente) se la pendenza di $g$ in $x^*$ è in modulo minore di 1:

$$\left|g'\left(x^*\right)\right| < 1$$

cioè se

$$-1 < g'(x^*) < 1.$$

Poiché nel nostro caso

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

risulta

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2};$$

allora, dato che $f(x^*) = 0$ per ipotesi, risulta

$$g'(x^*) = \frac{f\left(x^*\right)f''\left(x^*\right)}{f'\left(x^*\right)^2} = 0$$

Dunque $x^*$ nel SDD definito dall'algoritmo di Newton è un equilibrio (almeno localmente) stabile: partendo da $x_0$ "abbastanza vicino" a $x^*$ (che è ignoto), otteniamo una successione che converge a $x^*$.

Ma c'è di più: abbiamo visto che se $g(x)=ax+b$ allora la rapidità di convergenza all'equilibrio è tanto maggiore quanto più $a$ è vicino a 0. Per $g(x)$ qualsiasi (purché derivabile) la rapidità di convergenza sarà tanto maggiore quanto più vicino a 0 è la pendenza di $g(x^*)$; in questo caso è addirittura $g'(x^*)=0$. Si dice in questo caso che $x^*$ è un *superattrattore*.

Consideriamo come esempio l'equazione $f(x) = 0$:

$$x^3 + x - 1 = 0,$$

che ammette certamente uno zero $x^*$ compreso tra 0 e 1, dato che $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$. È l'unico zero, poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x$.

Risulta

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$x_{t+1} = x_t - \frac{x_t^3 + x_t - 1}{3x_t^2 + 1} = \frac{2x_t^3 + 1}{3x_t^2 + 1}$$

Se assumiamo come condizione iniziale il punto medio dell'intervallo [0, 1], $x_0 = 1/2$, otteniamo (in forma simbolica) la successione

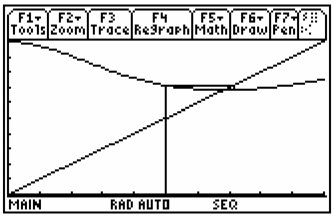
$$\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{593}{868}, \ldots$$

Per comprendere la straordinaria rapidità di convergenza osserviamo i primi 10 valori della successione in forma numerica:

| t | x[t] |
|---|---|
| 0 | 0,5 |
| 1 | 0,714285714285714 |
| 2 | 0,683179723502304 |
| 3 | 0,682328423304578 |
| 4 | 0,682327803828347 |
| 5 | 0,682327803828019 |
| 6 | 0,682327803828019 |
| 7 | 0,682327803828019 |
| 8 | 0,682327803828019 |
| 9 | 0,682327803828019 |
| 10 | 0,682327803828019 |

Accidenti! Alla quinta iterazione sono già state approssimate le prime 15 cifre decimali: capito che cos'è un super-attrattore?

Osserviamo ora il diagramma di fase nell'intervallo $[0, 1]\times[0, 1]$.




Si osserva che $g(x)$ interseca la retta $y=x$ in un punto di pendenza nulla, e la ragnatela è talmente rapida da non lasciar vedere granché. Il punto di equilibrio, cioè il punto di intersezione tra $y=g(x)$ e $y=x$ è un vero e proprio buco nero!

Ancora un'osservazione: se si applica l'algoritmo di Newton all'equazione $x^2 - N = 0$, con $N$ positivo qualsiasi e con $x_0>0$, si costruisce una successione che converge a $\sqrt{N}$ . Svolgendo i calcoli:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{x_t^2 - N}{2x_t} = \frac{x_t^2 + N}{2x_t} = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{N}{x_t}\right).$$

Toh! Riconoscete in quest'ultima espressione l'algoritmo di Erone? Dato $x_t$, $x_{t+1}$ è il punto medio dell'intervallo che ha per estremi $x_t$ e $N/x_t$: infatti poiché il prodotto di questi due numeri è $N$, non possono essere entrambi maggiori né entrambi minori di $\sqrt{N}$ . Dei due numeri $x_t$ e $N/x_t$, uno dei due è minore e l'altro maggiore di $\sqrt{N}$ : prendiamone dunque il punto medio.

Si scopre così che l'algoritmo di Newton applicato all'equazione $x^2 - N = 0$ restituisce l'algoritmo di Erone per il calcolo della radice quadrata di $N$.

Se vogliamo invece un algoritmo per l'approssimazione della radice cubica di un numero non dobbiamo fare altro che considerare l'equazione $x^3 - N = 0$. L'algoritmo di Newton ci fornisce il sistema dinamico

$$x_{t+1} = x_t - \frac{x_t^3 - N}{3x_t^2} = \frac{2x_t^3 + N}{3x_t^2}.$$

Per esempio, per approssimare $\sqrt[3]{3}$, che è compreso tra 1 e 2, definiamo il SDD

$$x_{t+1} = \frac{2x_t^3+3}{3x_t^2}, \text{ con } x_0 = 1.5.$$

Otteniamo, in forma numerica, la seguente tabella: $x_4$ approssima già le prime 14 cifre decimali.

| t | x[t] |
|---|---|
| 0 | 1,5 |
| 1 | 1,44444444444444 |
| 2 | 1,44225290379137 |
| 3 | 1,44224957031511 |
| 4 | 1,44224957030741 |
| 5 | 1,44224957030741 |
| 6 | 1,44224957030741 |
| 7 | 1,44224957030741 |
| 8 | 1,44224957030741 |
| 9 | 1,44224957030741 |
| 10 | 1,44224957030741 |

In generale, per la radice $n$-esima di $N$, partiamo dall'equazione $x^n - N = 0$ e arriviamo al sistema dinamico

$$x_{t+1} = x_t - \frac{x_t^n - N}{nx_t^{n-1}} = \frac{(n-1)x_t^n + N}{nx_t^{n-1}}.$$

Algoritmi di questo tipo sono implementati nelle calcolatrici scientifiche.

## Sistemi dinamici discreti e caos

Analizzando l'algoritmo di Newton abbiamo graziosamente glissato su un dubbio che senz'altro il lettore si è posto: che cosa accade se l'equazione $f(x) = 0$ ammette più di una soluzione? A quale delle soluzioni converge la successione di Newton? Evidentemente questo dipende dalla scelta di $x_0$. Da buoni matematici ci aspettiamo semplici leggi del tipo: "la successione di Newton converge allo zero di $f(x)$ più vicino a $x_0$", oppure "se $x_0$ sta qui allora la corrispondente successione converge a questa soluzione, se $x_0$ sta lì allora la successione converge a quell'altra soluzione, …".

Beata innocenza …

Vediamo un po'. Se l'equazione da cui partiamo è un'equazione polinomiale di secondo grado che ammette due radici reali $\alpha_1 < \alpha_2$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $b^2 - 4ac > 0$, allora tutto funziona come ci aspettiamo:

$$x_{t+1} = x_t - \frac{ax_t^2 + bx_t + c}{2ax_t + b} = \frac{ax_t^2 - c}{2ax_t + b}.$$

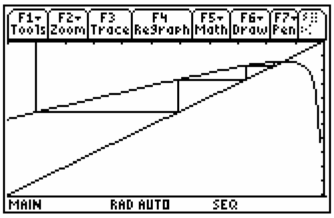
C'è un unico punto critico dal quale non possiamo partire: $x_0 = -b/(2a)$, che annulla il denominatore. In effetti è comprensibile: $-b/(2a)$ è l'ascissa del vertice della parabola $y = ax^2 + bx +$

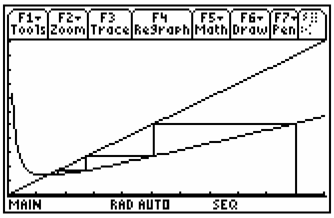
$c$ e la retta tangente in tale punto non interseca l'asse delle $x$: la successione di Newton, come una miccia bagnata, non viene innescata. Sia dunque $x_0 \neq -b/(2a)$.

Bene: si verifica facilmente che se $x_0 < -b/(2a)$ allora la successione di Newton converge ad $\alpha_1$, altrimenti converge ad $\alpha_2$. Consideriamo come esempio l'equazione $x^2 - 2 = 0$. La successione di Newton è

$$x_{t+1} = \frac{x_t^2 + 2}{2x_t}.$$

Tracciati i grafici di $y = \dfrac{x^2+2}{2x}$ e di $y=x$, ecco i diagrammi di fase (rispettivamente nel III e nel I quadrante) per $x_0 = -10$ e $x_0 = 10$.




Per qualunque $x_0<0$ la successione converge a $-\sqrt{2}$, per $x_0>0$ converge a $\sqrt{2}$. Tutto ciò è molto tranquillizzante. Ma la catastrofe è in agguato …

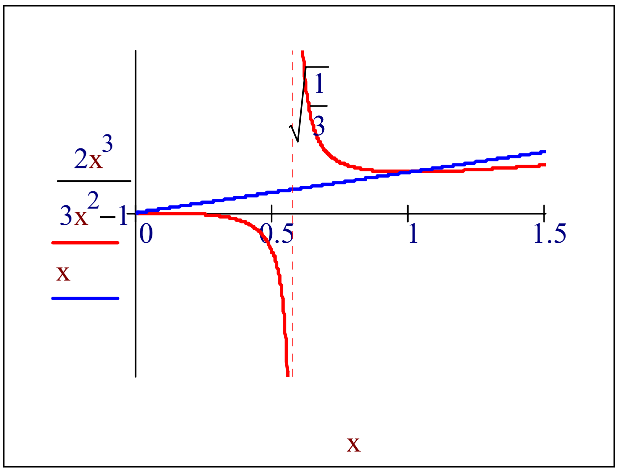
Vediamo ora che cosa accade per equazioni polinomiali di terzo grado, per esempio la semplicissima

$$x^3 - x = 0,$$

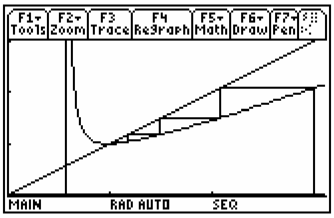
che ammette le tre soluzioni $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$. La successione di Newton è

$$x_{t+1} = x_t - \frac{x_t^3 - x_t}{3x_t^2 - 1} = \frac{2x_t^3}{3x_t^2 - 1}.$$

Costruiamo il diagramma di fase. Il grafico di $y = \dfrac{2x^3}{3x^2-1}$ e $y=x$, che si intersecano in $-1$, in 0 e in 1, è il seguente (data la simmetria rispetto all'origine, lo mostriamo solo per $x \geq 0$).




Ci sono due asintoti verticali in corrispondenza di $-\sqrt{1/3}$ e $\sqrt{1/3} \approx 0.577$, valori che $x_0$ non può assumere (sono quelli in cui $f'(x)=0$). Mediante il diagramma di fase si osserva che se $x_0 > \sqrt{1/3}$ allora la successione converge a 1 (e se $x_0 < -\sqrt{1/3}$ allora la successione converge a $-1$). Il seguente diagramma di fase si riferisce a $x_0 = 3$.




E se $-\sqrt{1/3} < x_0 < \sqrt{1/3}$? Ci piacerebbe, per esempio, che la successione innescata da $x_0$ convergesse alla soluzione più vicina a $x_0$.

E invece …

Nulla si può dire a priori, invece, se $-\sqrt{1/3} < x_0 < \sqrt{1/3}$: si possono trovare punti arbitrariamente vicini tali che la corrispondente successione converga a valori differenti. Ecco per esempio grafici e tabelle delle successioni corrispondenti ai tre valori di $x_0$ 0.4472, 0.44725, 0.4473.

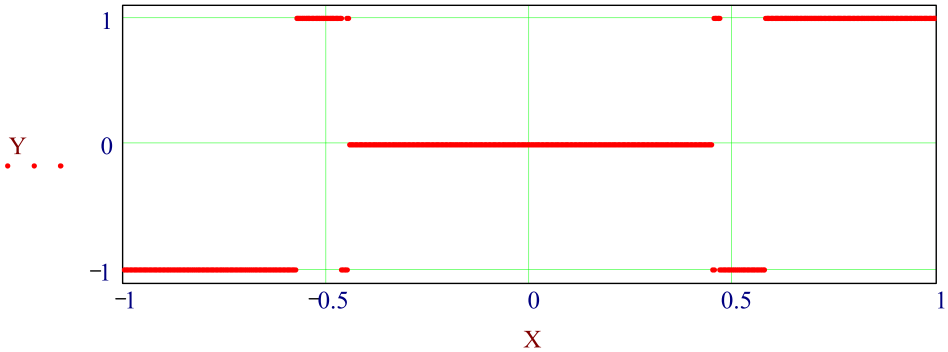
| t | x[t] | x[t] | x[t] |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,4472 | 0,44725 | 0,4 |
| 1 | -0,4471320318 | -0,4474320892 | -0,4477323984 |
| 2 | 0,4467245478 | 0,4485269636 | 0,4503400087 |
| 3 | -0,4442912970 | -0,4551814749 | -0,4664759756 |
| 4 | 0,4300999980 | 0,4984238057 | 0,5847059427 |
| 5 | -0,3575504614 | -0,9722128442 | 15,5909178929 |
| 6 | 0,1482954963 | -1,0012385464 | 10,4082181468 |
| 7 | -0,0069832120 | -1,0000022944 | 6,9602286463 |
| 8 | 0,0000006812 | -1,0000000000 | 4,6723010669 |
| 9 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 3,1631664912 |
| 10 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 2,1814518637 |
| 11 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,5638432502 |
| 12 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,2070867451 |
| 13 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0434319034 |
| 14 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0025693738 |
| 15 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000098435 |
| 16 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000000001 |
| 17 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000000000 |
| 18 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000000000 |
| 19 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000000000 |
| 20 | 0,0000000000 | -1,0000000000 | 1,0000000000 |

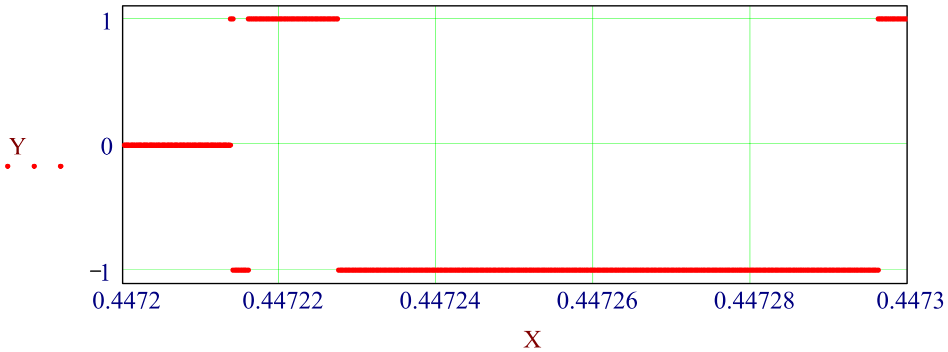
Se $x_0 = 0.4472$ la successione converge a 0, se $x_0 = 0.44725$ la successione converge a $-1$, se $x_0 = 0.4473$ la successione converge a 1.

Si osservi attentamente la tabella per cogliere uno degli aspetti più interessanti e al tempo stesso sconvolgenti di un SDD, aspetto che giustifica ampiamente il termine *caos* che si utilizza in questi casi: si parte da valori molto vicini e le prime iterazioni mostrano valori delle successioni pressoché uguali (come peraltro ci aspettiamo: non è questa l'idea intuitiva di *continuità*? se parto da valori quasi uguali le corrispondenti evoluzioni non saranno molto differenti). Ma ecco che alla quinta iterazione la catastrofe ha già realizzato i suoi devastanti effetti: la prima successione vale circa $-0.36$, la seconda $-0.97$, la terza addirittura 15.6!

Si tratta del famoso "effetto farfalla": il battito d'ali di una farfalla in Florida provoca un tornado alle Hawai.

Il caos si impadronisce del problema e non ci lascia altra possibilità che *esplorare* che cosa accade tra $-1$ e 1. Il grafici seguenti illustrano, con una risoluzione al pixel, il limite ($-1$, 0, oppure 1) a cui converge la successione al variare di $x_0$ rispettivamente tra $-1$ e 1 (la prima figura), tra 0.4472 e 0.4473 (la seconda figura).



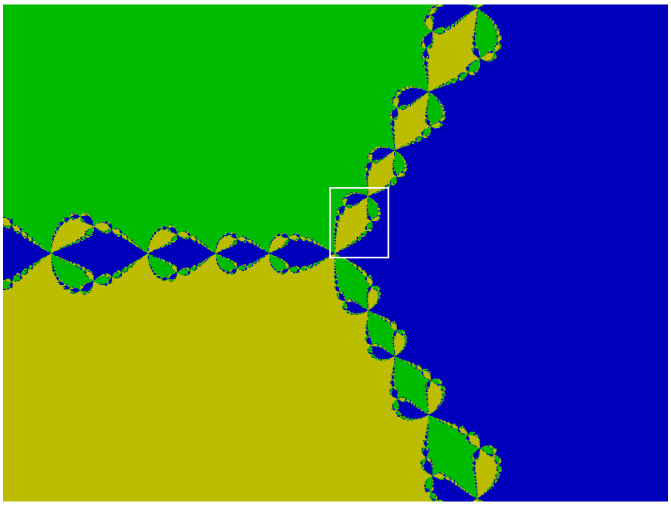



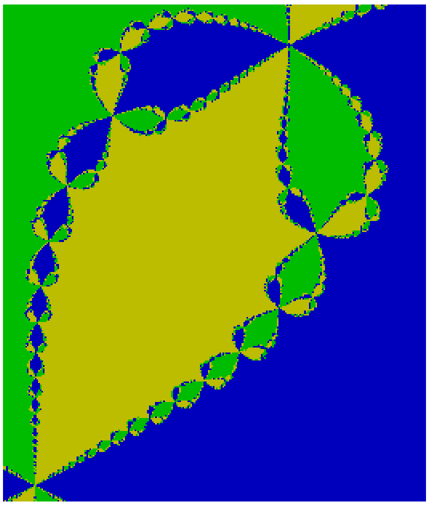

Si tratta forse del primo frattale nella storia della matematica, anche se solo intuito. Il primo ad accorgersi che "qualcosa non funziona" è Arthur Cayley (1821-1895), che analizza l'algoritmo di Newton nel suo ambiente più naturale, il campo dei numeri complessi. Un'equazione polinomiale $f(z)=0$ di grado $n$ ha in **C** $n$ radici che sono rappresentate come punti nel piano complesso. Partendo dal numero complesso $z_0$ l'algoritmo di Newton permette di costruire una successione di numeri complessi: a quale delle soluzioni complesse converge la successione? Per fissare le idee, supponiamo di analizzare l'equazione

$$z^3 - 1 = 0,$$

che ammette in **C** tre soluzioni $z_1$, $z_2$, $z_3$. Ci piacerebbe poter dividere il piano complesso in tre regioni $R_1$, $R_2$, $R_3$ tali che se $z_0$ appartiene alla regione $R_i$ allora la corrispondente successione converge alla soluzione $z_i$. Per distinguere le tre regioni possiamo utilizzare tre colori; in altri termini, se assegniamo a ciascuna soluzione un colore, e coloriamo ogni punto del piano complesso con il colore della soluzione a cui converge l'algoritmo di Newton quando si parte da quel numero, ci piacerebbe ottenere una semplice colorazione del piano. Illusione!

La risposta è sorprendente: otteniamo un *frattale*. Lungo le semirette che escono dall'origine si notano delle configurazioni a forma di goccia che presentano la tipica *omotetia interna* delle figure frattali. Ingrandendo una di queste gocce si osservano gocce simili via via più piccole.





**La crescita logistica**

Abbiamo visto che il *modello di Malthus*

$$x_{t+1} = ax_t$$

con $a > 1$, è adatto a descrivere la crescita esponenziale di una popolazione solo in una fase iniziale, nell'ipotesi che le risorse ambientali siano illimitate, ma è inadatto, su lungo periodo, a descrivere realisticamente quanto accade: all'aumentare della popolazione diminuiscono le risorse disponibili, aumenta l'inquinamento ambientale e in generale il fattore di crescita $a$ non rimane costante, ma diminuisce. Formuliamo l'ipotesi più semplice: che $a$ decresca linearmente al crescere di $x_t$ con una certa pendenza $b$; dunque sostituiamo, nel modello malthusiano, $a - bx_t$ ad $a$. Otteniamo il modello di Verhulst (Pierre Verhulst, 1804-1849) o *crescita logistica*, che è un SDD quadratico:

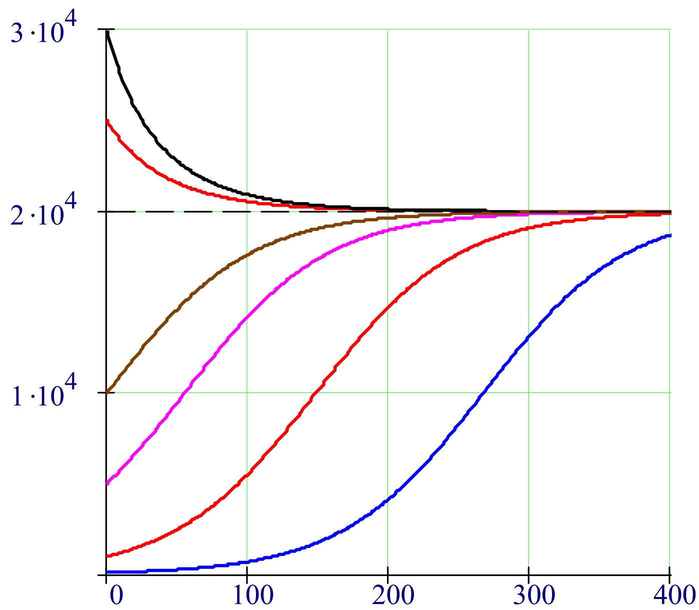
$$x_{t+1} = x_t\,(a - bx_t),$$

dove $a$ e $b$ sono parametri positivi: il primo è legato al tasso di crescita della popolazione, il secondo descrive la limitatezza delle risorse al crescere della popolazione. Solitamente $b$ è piccolo rispetto ad $a$, in modo tale che almeno inizialmente risulti

$$x_{t+1} = ax_t - bx_t^2 \approx ax_t$$

e la crescita sia di tipo malthusiano.

Ecco un esempio. Una popolazione è soggetta ad una crescita logistica con $a = 1.02$ e $b = 10^{-6}$. Vediamo che cosa accade al variare di $x_0$ = 100, 1000, 5000, 10000, 20000, 25000, 30000.




Indipendentemente dal valore iniziale tutte le successioni convergono a 20000, per difetto se $x_0 < 20000$, per eccesso se $x_0 > 20000$.

Ora siamo in grado di capire perché: i punti di equilibrio del SDD

$$x_{t+1} = x_t\,(a - bx_t).$$

sono le soluzioni dell'equazione

$$x = x\,(a - bx)$$

cioè $x^* = \dfrac{a-1}{b}$ (e $x^{**} = 0$, soluzione priva di interesse).

Nel nostro caso l'equilibrio è dunque $E = 0.02/0.000001 = 20000$, come ci aspettavamo. Osserviamo dal grafico che si tratta di un equilibrio stabile almeno localmente: per ogni valore $x_0 > 0$ la successione converge a $E$. Il significato fisico del numero $E$ è chiaro: si tratta del numero massimo di individui che l'ambiente caratterizzato dai parametri $a$ e $b$ è in grado di sopportare; se $x_0 < E$ la popolazione può aumentare fino a $E$, se $x_0 > E$, la popolazione diminuisce fino a $E$.

Con $x_0 < 0$ abbiamo invece una successione divergente a $-\infty$, il che ci fa capire che 0 non è un equilibrio stabile e che $E$ non è *globalmente stabile*.

In fondo ritroviamo una situazione molto simile ad altre che abbiamo già incontrato con i SDD lineari: $E$ è un *attrattore*. C'è però una novità: se si osserva il grafico per $x_0$ = 100, 1000, 5000, si nota che le successioni inizialmente crescono sempre di più (la pendenza aumenta), fino a raggiungere il valore 10000, e poi si inverte la tendenza; la pendenza (intesa come differenza $x_{t+1}-x_t$) diminuisce e tende a 0. In effetti si può dimostrare che qualunque sia $x_0$, purché minore di $E/2$, risulta

$$x_t - x_{t-1} < x_{t+1} - x_t$$

fino a che $x_t < E/2$. Detto in altri termini il "punto di flesso" delle successioni ha sempre valore $E/2$. Questa osservazione è molto importante, non solo nello studio delle popolazioni. Pensiamo per esempio alla diffusione dei telefonini: abbiamo inizialmente una fase in cui il numero di telefonini venduti aumenta sempre di più (con pendenza crescente). Ad un certo punto il mercato comincia a saturarsi, e la pendenza comincia a diminuisce; l'informazione preziosa è questa: il numero di telefonini venduti fino a quel momento rappresenta circa la metà di quelli che il mercato può assorbire. Il punto di equilibrio $E$ è ciò che in economia si chiama *mercato potenziale*.

## Crescita logistica e caos

Dall'esempio ora visto potremmo concludere che i SDD quadratici siano "innocui" e non presentino sostanziali novità rispetto ai SDD lineari; l'unica novità sembra essere il fatto che un equilibrio può essere *localmente* stabile (anziché *globalmente* stabile come nei SDD lineari): se $x_0$ appartiene ad un certo intervallo che contiene l'equilibrio $E$, chiamato *bacino di attrazione* (nell'esempio illustrato è l'intervallo $(0, \infty)$), allora la corrispondente successione converge a $E$, altrimenti diverge.

Non è così. La convergenza o la divergenza non sono gli unici comportamenti possibili per un SDD: ancora una volta il *caos* è in agguato.

Analizziamo il SDD quadratico

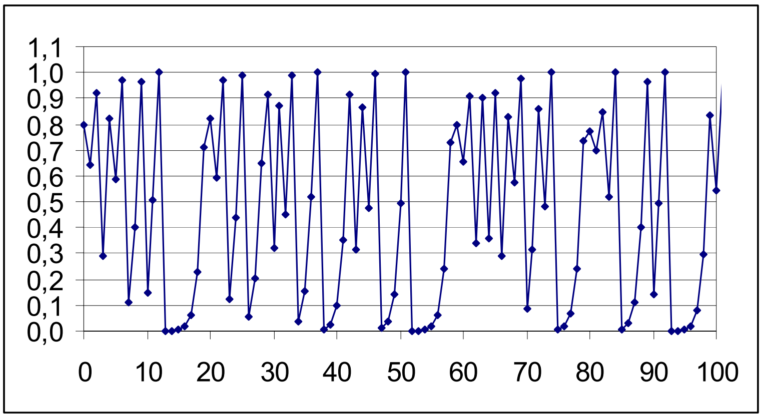
$$x_{t+1} = 4x_t\,(1-x_t).$$

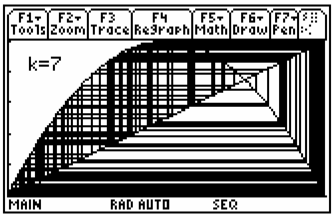
Gli equilibri si trovano risolvendo l'equazione

$$x = 4x\,(1-x),$$

che ammette la soluzione banale $x = 0$ e la soluzione $x = 3/4 = 0.75$. Esploriamo il sistema, per esempio partendo da $x_0 = 0.8$.

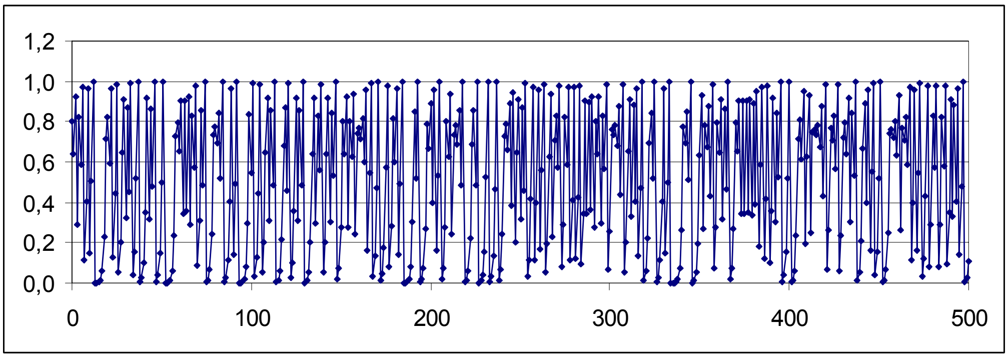
| t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] | t | x[t] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,8 | 10 | 0,14784 | 20 | 0,82001 | 30 | 0,32034 | 40 | 0,09794 |
| 1 | 0,64 | 11 | 0,50392 | 21 | 0,59036 | 31 | 0,87089 | 41 | 0,35340 |
| 2 | 0,9216 | 12 | 0,99994 | 22 | 0,96734 | 32 | 0,44975 | 42 | 0,91403 |
| 3 | 0,28901 | 13 | 0,00025 | 23 | 0,12638 | 33 | 0,98990 | 43 | 0,31431 |
| 4 | 0,82194 | 14 | 0,00098 | 24 | 0,44165 | 34 | 0,03999 | 44 | 0,86208 |
| 5 | 0,58542 | 15 | 0,00394 | 25 | 0,98638 | 35 | 0,15355 | 45 | 0,47559 |
| 6 | 0,97081 | 16 | 0,01568 | 26 | 0,05374 | 36 | 0,51989 | 46 | 0,99762 |
| 7 | 0,11334 | 17 | 0,06174 | 27 | 0,20342 | 37 | 0,99842 | 47 | 0,00951 |
| 8 | 0,40197 | 18 | 0,23173 | 28 | 0,64815 | 38 | 0,00632 | 48 | 0,03768 |
| 9 | 0,96156 | 19 | 0,71212 | 29 | 0,91221 | 39 | 0,02512 | 49 | 0,14504 |




Che cosa sta succedendo? Il sistema non sembra avere alcun comportamento prevedibile, oscilla in modo irregolare su tutto l'intervallo [0, 1] e pare che non abbia alcuna intenzione di stabilizzarsi, né per convergere né per divergere.

Proviamo a spingere la successione fino a $t = 500$.




È possibile che un sistema apparentemente docile come $x_{t+1} = 4x_t\,(1-x_t)$ produca un'evoluzione così caotica?

La risposta è sì. Siamo in presenza di un comportamento caotico perché l'evoluzione del sistema è imprevedibile, perché il sistema mostra l'*effetto farfalla*, la dipendenza sensibile dai dati iniziali in modo parossistico: se $x_0$=0.75 la successione è costante (e quindi convergente), ma se $x_0 = 0.75+\varepsilon$, con $\varepsilon$ arbitrariamente piccolo, la successione è caotica. Siamo in presenza di un comportamento caotico perché l'insieme dei valori assunti dalla successione è *denso* sull'intervallo (0, 1): per quanto piccolo prendiamo un intervallo $\Delta x$ contenuto in (0, 1), in esso cadono infiniti valori della successione; questo significa che possiamo partire da qualsiasi punto dell'intervallo (0, 1) e arrivare in qualsiasi punto dell'intervallo (0, 1). Insomma, siamo di fronte a oggetti matematici semplici (un polinomio di secondo grado!) che generano comportamenti caotici disordinati e informi; che cosa direbbe Euclide?

Vediamo di metterci un po' di matematica per capire meglio che cosa accade. Consideriamo il SDD

$$x_{t+1} = kx_t\,(1-x_t).$$

Il grafico della funzione $f(x) = kx(1-x)$ è una parabola concava la cui parte non negativa è compresa nell'intervallo $x\in[0, 1]$. Se vogliamo una successione a valori positivi dobbiamo fare in modo che risulti $0 \le f(x) \le 1$ per ogni $x\in[0, 1]$. Poiché il vertice della parabola ha coordinate $(1/2, k/4)$ deve risultare

$$0 \le k \le 4.$$

Inoltre gli equilibri sono le soluzioni dell'equazione

$$x = kx(1-x),$$

cioè $x^* = 0$ e $x^{**} = \dfrac{k-1}{k}$ (siamo interessati a questo secondo equilibrio). Affinché sia $x^{**} \ge 0$ deve essere $k \le 1$; in definitiva siamo interessati solo ai valori

$$k \in [1, 4].$$

Sappiamo che un equilibrio $E$ è localmente stabile per il SDD $x_{t+1} = f(x_t)$ se

$$-1 < f'(E) < 1.$$

Risulta

$$f(x) = kx(1-x)$$

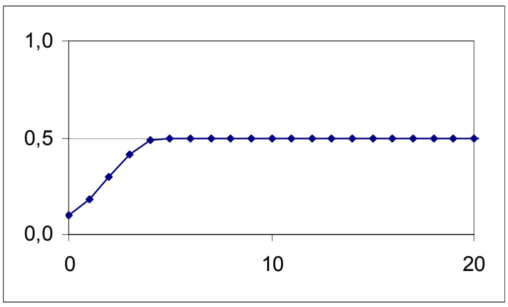
$$f'(x) = k - 2kx$$

e dunque

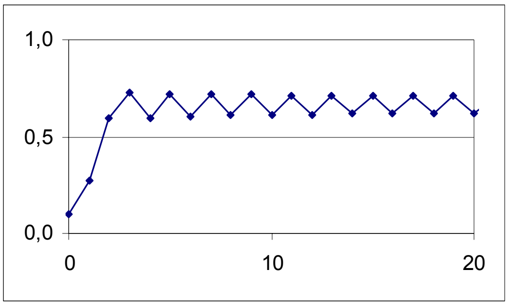
$$f'\left(\frac{k-1}{k}\right) = 2-k.$$

Dunque $E = \dfrac{k-1}{k}$ è stabile se $-1 < 2-k < 1$, cioè $1 < k < 3$. La stabilità è garantita solo per $k$ compreso tra 1 e 3. Che cosa succede se $k\in[3, 4]$?

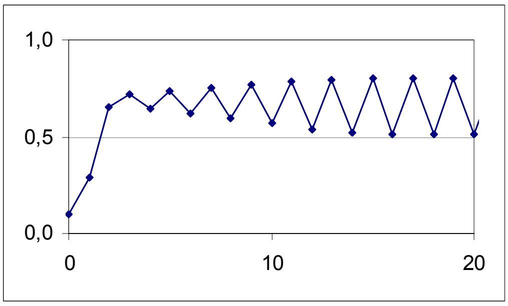
I grafici seguenti mostrano i comportamenti della successione logistica per $k = 2, 3, 3.2, 3.5$, sempre partendo da $x_0 = 0.1$.



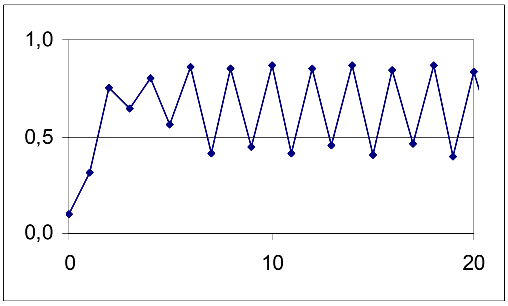

$k = 2$




$k = 3$

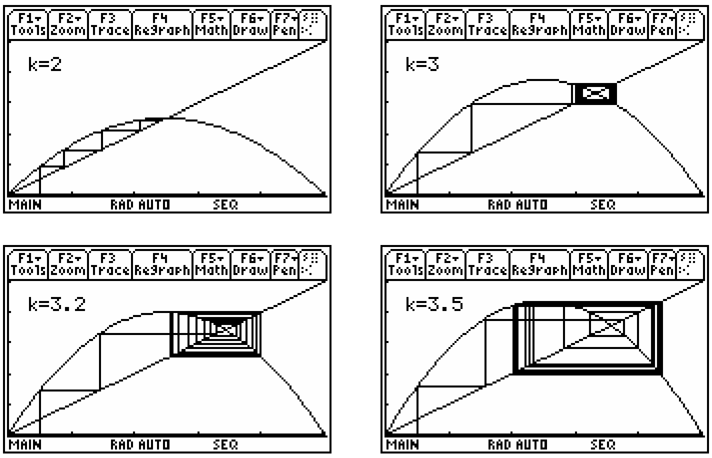



$k = 3.2$




$k = 3.5$

E questi sono i corrispondenti diagrammi di fase.




Come si vede la convergenza per $k$=2 è molto rapida, per $k$=3 la convergenza si indebolisce, per $k$=3.2 accade un fenomeno nuovo: la successione oscilla tra due valori distinti (circa 0.5 e 0.8); per 3.5 la successione oscilla tra quattro valori distinti.

Riportiamo le parole di Ian Stewart [9], che immagina si possa regolare con una manopola il valore di $k$.

> Quando $k$=2, la ragnatela sale su per la diagonale e poi si muove a spirale verso l'interno, fino a raggiungere il punto in cui la parabola interseca la diagonale, che è il punto di equilibrio. Ne segue

la stabilità [...] la ragnatela si muove a spirale verso l'interno, purché $k$ sia minore di 3. Così, per $k$ compreso tra 1 e 3 si ottiene si ottiene un singolo equilibrio stabile e la dinamica a lungo termine consiste nel non fare assolutamente niente. Mentre si ruota la manopola $k$, la posizione del punto di equilibrio si muove leggermente, ma non accade nient'altro.

Quando $k$ è esattamente uguale a 3, il punto di equilibrio è *debolmente stabile*: la convergenza verso di esso è estremamente lenta. Questo è un segno del fatto che ci troviamo sulla soglia di un cambiamento radicale. In effetti quando $k>3$ il punto di equilibrio diventa instabile e la ragnatela comincia a muoversi a spirale verso l'esterno.

Ogni volta che si conosce una soluzione di un sistema dinamico, e che essa diventa instabile, ci si dovrebbe chiedere: "In che direzione sta muovendosi il sistema?". In pratica esso non resterà nello stato instabile, anche se questo comportamento soddisfa le equazioni, ma ne uscirà e farà qualcos'altro. Spesso questo qualcos'altro è molto meno ovvio, e perciò più interessante, dello stato instabile iniziale. Questo è un modo facile per imparare una quantità di cose nuove: è la *teoria delle biforcazioni*.

In questo spirito, chiediamoci: in che direzione si muoverà lo stato stazionario dell'applicazione equazione logistica quando $k$ è maggiore di 3, per esempio quando è uguale a 3.2? Se disegniamo il diagramma di fase, troveremo che il moto a spirale verso l'esterno rallenta e infine converge verso un quadrato. Il valore di $x$ oscilla alternativamente fra due numeri distinti, cioè entra in un "ciclo di periodo due". Così lo stato stazionario perde stabilità e diventa periodico: in altri termini, il sistema comincia ad oscillare.

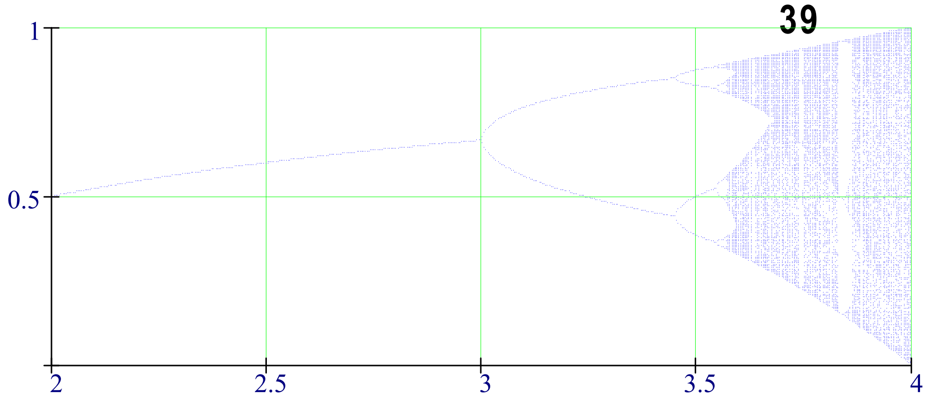
Se si dispone di un computer con un generatore di suoni, si può eseguire una sorta di musica rudimentale, usando i successivi valori di $x$ per determinare le note da suonare. Per esempio, si potrebbe stirare l'intervallo [0, 1] fino a fargli coprire un'ottava: *do*, *re*, *mi* e tutto il resto. Il motivo corrispondente allo stato stazionario è ripetitivo e noioso: *fa*, *fa*, *fa*, *fa*, *fa* e così via per sempre. Il motivo con periodo due ha almeno il merito del ritmo: *sol-mi-sol-mi-sol-mi* e così via. Non è certo Beethoven.

Se si aumenta $k$ a circa 3.5, anche l'attrattore di periodo due diventa instabile a appare un ciclo di periodo quattro: *sol-fa-la-mi-sol-fa-la-mi* ...

Per $k$=3.56 il periodo raddoppia di nuovo a otto; per 3.567 raggiunge il 16, e successivamente si ottiene una rapida sequenza di raddoppiamenti con periodi che salgono a 32, 64, 128, ...

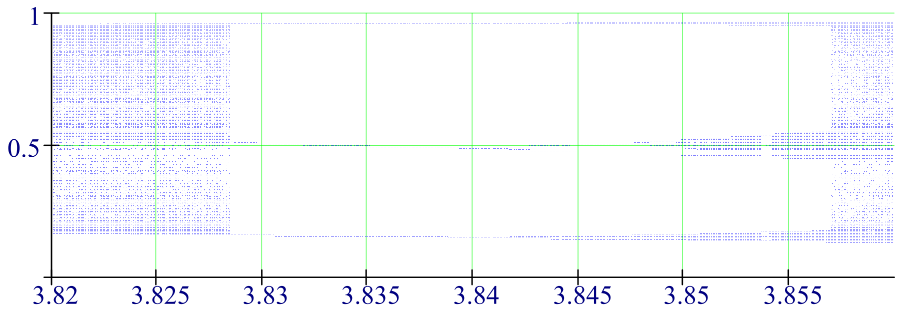
La cascata dei raddoppiamenti del periodo è così rapida che per $k$=3.58 circa è tutto finito: il periodo si è raddoppiato un numero infinito di volte. A quel punto, dopo aver fatto del suo meglio per restare periodica, pagando il prezzo di periodi sempre più lunghi, l'applicazione logistica diventa caotica. All'ascolto si possono udire ancora dei "quasi ritmi", piccole sequenze di motivi a metà familiari, ma nulla di ripetitivo. Di nuovo, non è Beethoven, ma non è del tutto diversa dalla musica di certi compositori minimalisti moderni.

Possiamo ora tracciare il *diagramma di biforcazione*, una celebre figura che traduce geometricamente la "musica" di cui parla Ian Stewart. Sull'asse delle ascisse poniamo i valori di $k$, da 2 a 4. Sull'asse delle ordinate indichiamo, per ogni $k$, i "punti limite" del SDD $x_{t+1}=kx_t(1-x_t)$.




Sul grafico si legge che per $k$ minore di 3 la successione converge ad un valore, che è lentamente crescente al crescere di $k$. In $k$=3 si ha la prima biforcazione: fino a circa 3.4 la successione oscilla tra due valori distinti, che poi diventano quattro, otto, e così via.

In fondo si potrebbe pensare che le cose siano semplici: al crescere di $k$ cresce la complessità del sistema, fino al caos. Ma nemmeno questo è vero: osservate, in corrispondenza di $k$ uguale a circa 3.84, una sorprendente zona in cui la densità dei punti limite diminuisce: la musica diventa improvvisamente rarefatta!




Un ingrandimento della regione compresa tra $k$=3.82 e 3.86 (quindi in piena regione caotica) ci mostra un improvviso ritorno ad una relativa regolarità: si distingue un ciclo di periodo tre, e le successive biforcazioni a 6, 12, …; insomma, all'interno del regime caotico si aprono finestre di regolarità (per un approfondimento vedere il teorema di A. N. Sarkovskij), che a loro volta nascondono regioni caotiche al cui interno …

Questo è il caos: ed è tutto contenuto nella applicazione

$$x \to kx(1-x).$$

## L'insieme di Mandelbrot

"Quanto è lunga la costa della Bretagna?". Con questa domanda inizia uno dei primi capitoli del libro di Benoit Mandelbrot (1924- ) *Gli oggetti frattali. Forma, caso e dimensione* [6]. La pubblicazione di questo libro, nel 1975, ha suscitato interesse, stupore critiche; Mandelbrot si propone di dare un'interpretazione matematica a fenomeni reali dominati dal caso e dal caos: la lunghezza di un tratto di costa, la forma delle nuvole, la traiettoria del moto browniano, la distribuzione delle galassie, gli errori casuali nella trasmissione dei dati, la turbolenza atmosferica. Una delle tesi affascinanti di Mandelbrot è che il comportamento caotico, irregolare, imprevedibile, a *omotetia interna*, di alcuni fenomeni può essere riprodotto da un sistema dinamico, cioè da una funzione deterministica.

Mentre le figure classiche della geometria hanno *dimensione* intera (0 per i punti, 1 per le linee, 2 per le superfici, 3 per i solidi) le figure della geometria dei frattali hanno dimensione non intera. Per esempio il triangolo di Sierpinski ha dimensione ln(3)/ln(2) ≈ 1.6.

Non possiamo concludere queste note senza citare il cosiddetto *insieme di Mandelbrot*, una figura celebre e suggestiva che da sola esprime le tesi di Mandelbrot.

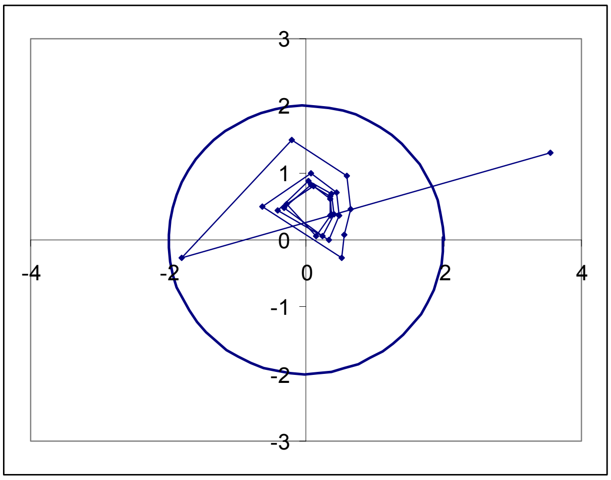
Iniziamo con il costruire il seguente SDD di dimensione due: dato nel piano cartesiano un punto iniziale $P_0$ di coordinate $(x_0, y_0)$, costruiamo una successione di punti (un'*orbita*) $P_1$, $P_2$, … definita dalla seguente legge ricorsiva.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n^2 - y_n^2 + x_0 \\ 2x_n y_n + y_0 \end{bmatrix}.$$

Se si interpreta il punto $P_0=(x_0, y_0)$ come il numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$, la legge ricorsiva assume l'aspetto più semplice

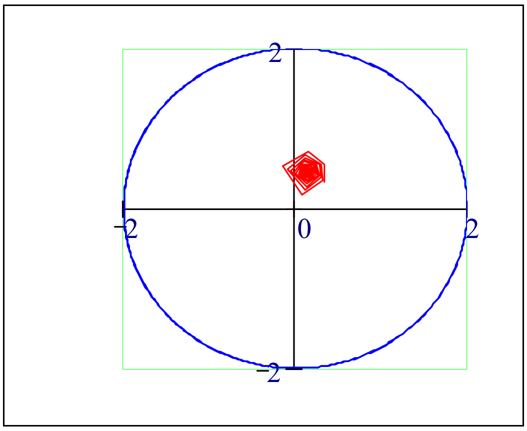
$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0.$$

Si tratta di un SDD bi-dimensionale quadratico; al variare del punto iniziale $P_0$ varia la successione e di conseguenza l'orbita del sistema. Ecco per esempio l'orbita del punto (0.36, 0.36).

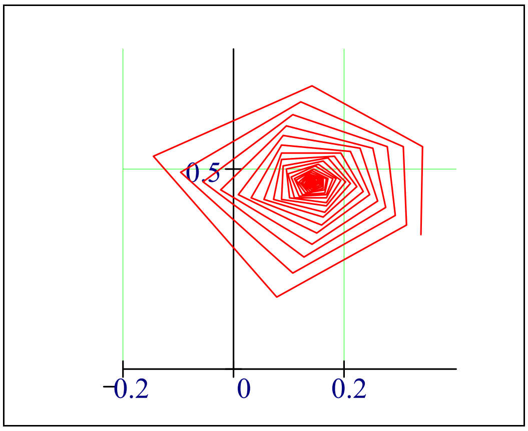



Il cerchio di centro l'origine e raggio 2 è chiamato *cerchio fondamentale*; si dimostra che se $P_0$ non è interno al cerchio fondamentale allora l'orbita diverge rapidamente. Ci interessano dunque solo i punti interni a tale cerchio; l'orbita di un punto interno può essere di due tipi:

- prima o poi l'orbita esce dal cerchio, e quindi diverge: è il caso del punto (0.36, 0.36) mostrato sopra, che esce alla 25-esima iterazione;
- l'orbita non esce mai dal cerchio fondamentale. L'insieme di Mandelbrot è l'insieme dei punti del piano la cui orbita non esce mai dal cerchio fondamentale. Ecco per esempio l'orbita (le prime $10^5$ iterazioni) del punto (0.3354, 0.3327).

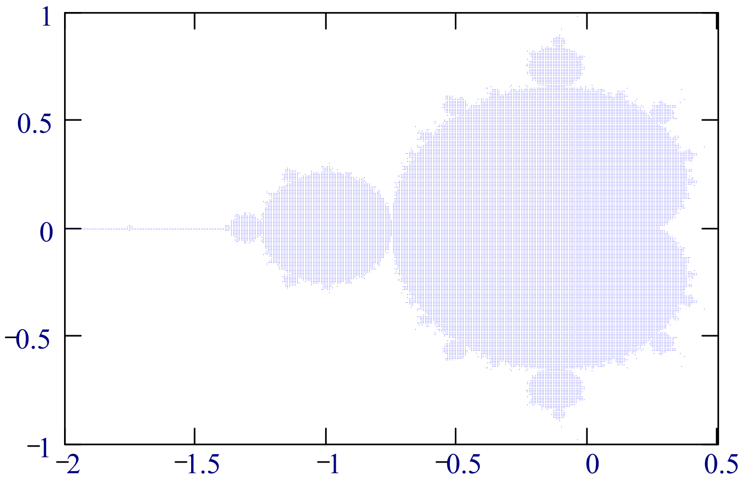



Purtroppo, anche se il problema è apparentemente semplice, non c'è modo di sapere in generale se un punto $P_0$ genera una successione che diverge oppure no: possiamo solo utilizzare il computer per fare esperimenti, per calcolare e rappresentare le orbite di ciascun punto. Per esempio, uno zoom sull'orbita del punto (0.3354, 0.3327) ci mostra nuovi dettagli:




l'orbita non esce dal cerchio fondamentale nelle prime $10^5$ iterazioni, ma forse esce dopo $10^6$ iterazioni, oppure $10^9$, oppure ….

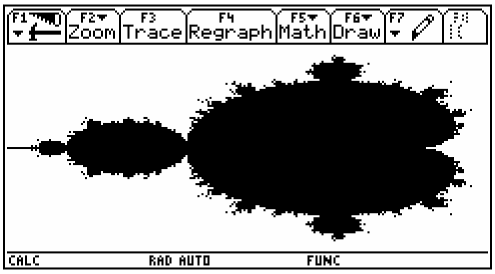
Tutto quello che possiamo fare è simulare l'insieme di Mandelbrot: setacciamo il cerchio fondamentale e, per ogni punto, calcoliamo le prime $N$ iterazioni. Se l'orbita non è uscita dopo $N$ iterazioni, assegniamo d'ufficio il punto all'insieme di Mandelbrot e coloriamo il punto corrispondente. L'insieme che otteniamo è il seguente.



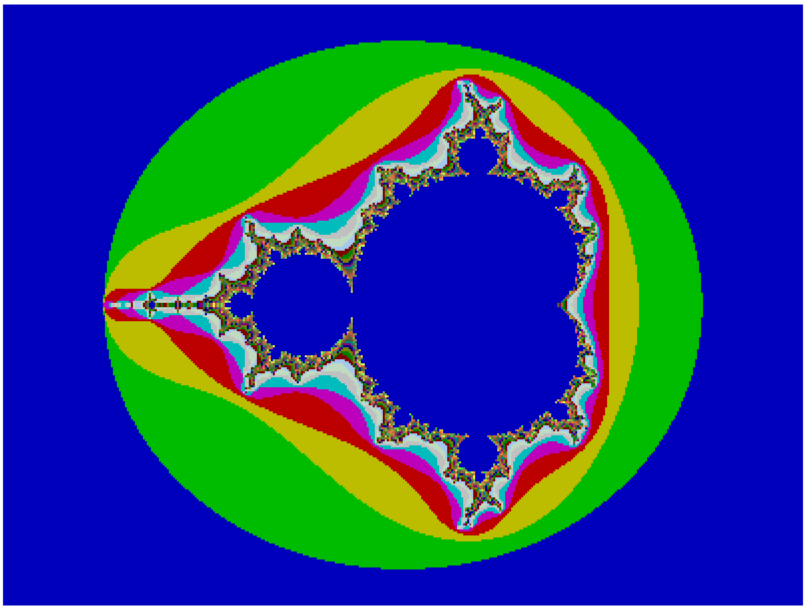

La figura è stata ottenuta con Mathcad, calcolando, per le prime 100 iterazioni, l'orbita dei punti di coordinate

$$x = -2 + 0.01h, \quad y = 0.01k$$

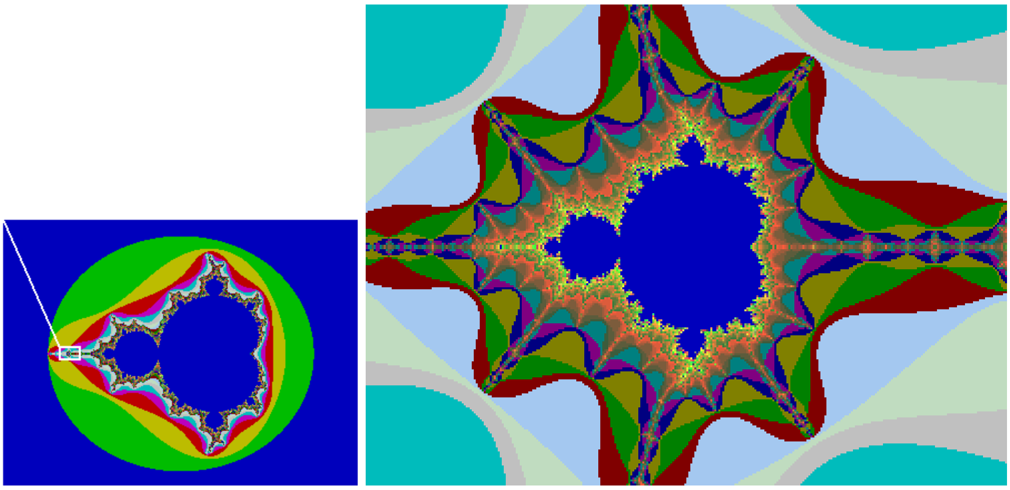
con $h$, $k$ = 0, 1, 2, …, 400 (è sufficiente un doppio ciclo FOR). Il programma è semplice e la stessa figura si può ottenere con la TI-89.




La figura seguente è stata invece ottenuta con il programma *freeware* WinFract [10]. La colorazione della figura, per i punti esterni all'insieme di Mandelbrot e interni al cerchio fondamentale, è stata ottenuta assegnando ciclicamente un colore al numero di iterazioni necessarie affinché l'orbita esca dal cerchio fondamentale.



Winfract consente in particolare di zoomare su porzioni della figura e osservare il riprodursi sempre più in piccolo dell'intera figura (*omotetia interna*).



**Nessuna conclusione**

Anche se i sistemi dinamici discreti sono relativamente giovani nella lunga storia della matematica, si impongono oggi come uno dei campi di ricerca matematica più esplorati, affascinanti, impegnativi. Una caratteristica interessante dal punto di vista didattico è che molti dei problemi che ammettono un modello discreto si enunciano facilmente e sono comprensibili a qualunque livello scolastico ma al tempo stesso la matematica che essi coinvolgono è ricca e profonda e densa di aspetti nuovi e sorprendenti.

Una legge ricorsiva è magica: quando nell'evoluzione di una grandezza si coglie l'aspetto ricorsivo allora tutto si semplifica e si illumina. Quante sono le strette di mano tra $n$ persone? Non lo so, ma se $n$ persone si sono già tutte salutate con $s_n$ strette di mano e arriva il signor $n+1$, questi deve salutare tutti gli altri:

$$s_{n+1} = s_n + n.$$

Poiché $s_2 = 1$ il gioco è fatto.

Qualcuno obietterà che la legge ricorsiva è più debole della legge generale. In un certo senso è vero: per arrivare a $s_n$ devo passare per tutti i precedenti; ma se so passare dallo stadio $n$ allo stadio $n+1$ allora in qualche modo ho colto il *germe* e posso dimenticarmi della complessità del problema.

I SDD hanno il pregio di mostrare, anche con immagini e oggetti geometrici bellissimi, la relazione stretta tra caso e caos: se scelgo a caso il punto di partenza, anche in un bacino strettissimo, posso avere evoluzioni del tutto differenti.

I SDD si prestano in modo naturale ad essere esplorati con uno strumento automatico di calcolo, e ne giustificano un uso intelligente e significativo dal punto di vista dell'apprendimento; si pensi ad esempio ai riferimenti assoluti e relativi delle formule di Excel. I SDD, attraverso l'uso di un calcolatore, consentono la *simulazione* di processi ed eventi, anche di processi continui (si pensi al semplice algoritmo di Eulero per le equazioni differenziali), e sollevano (finalmente) il problema dell'affidabilità e della coerenza di uno strumento di calcolo numerico.

I SDD hanno soprattutto il pregio di mostrare una matematica in cui spesso si deve rispondere "non lo so", o addirittura "non lo posso sapere". A distanza di più di 70 anni dai teoremi di Gödel possiamo rassegnarci all'idea che i nostri studenti studieranno e impareranno cose diverse da quelle che abbiamo studiato e imparato noi.

## Bibliografia e siti


[1] M. Borelli, *L'equazione logistica: ordine e caos*, Quaderni Dip. di Matematica Univ. di Trieste

[2] I. Ekeland, *A caso*, Bollati Boringhieri

[3] I. Ekeland, *Il caos*, Il Saggiatore Flammarion

[4] R. Guy, *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag

[5] P. Leslie, *The Use of Matrices in Certain Population Mathematics*, Biometrika 33: 183-212,
http://www.jstor.org/view/00063444/di992294/99p00855/0

[6] B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali. Forme, caso e dimensione*, Einaudi

[7] D. Ruelle, *Caso e caos*, Bollati Boringhieri

[8] E. Salinelli, F. Tomarelli, *Modelli dinamici discreti*, Springer

[9] I. Stewart, *Dio gioca a dadi?*, Bollati Boringhieri

[10] WinFract, *winf1821.zip*,
http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html