Matematica dinamica

Michele Impedovo
Università Bocconi - Milano

Summary. *In the teaching and learning of mathematics exists **dynamic geometry**. Can there be also dynamic arithmetic, dynamic algebra, dynamic calculus? Why not? Here are some ideas, using the new TI-Nspire system.*

La domanda

Nonostante l'estrema lentezza con cui cambia l'insegnamento della matematica (Impedovo 2006), l'idea di ***geometria dinamica*** si è in qualche modo consolidata nella scuola italiana, per merito di un software come *CABRI* che, a livelli differenti di competenze, approfondimenti, stimoli e complessità, viene oggi utilizzato nella scuola secondaria, sia di primo, sia di secondo grado.
Un'azione che si impone lavorando con questo software è il cosiddetto "test del trascinamento": *costruire un quadrato* significa costruire una figura che mantenga le proprietà del quadrato comunque si spostino i punti liberi di muoversi. In questo modo l'immagine concettuale che viene veicolata è non solo (o addirittura non tanto) la figura in sé quanto la rete di relazioni tra gli oggetti che compongono la figura stessa. Uno studente che sa costruire un quadrato con *CABRI* ha davvero capito che cos'è un quadrato.

Bene, e allora perché non estendere l'idea di *dinamico* ad altri settori dell'insegnamento della matematica?
Perché non pensare ad un'***aritmetica dinamica***, un'***algebra dinamica***, ad una ***analisi dinamica***, e così via?
Forse questo è un modo per mettere in pratica le ancora attuali raccomandazioni di Enriques su un *insegnamento dinamico* della matematica (Enriques 1921).

L'idea generale

Mi sono posto questa domanda lavorando con il nuovo software *TI-Nspire* della Texas Instruments. Si tratta di un sistema integrato, in un duplice senso. Innanzitutto il sistema integra diversi ambienti che fino ad ora erano rimasti separati:

- un ambiente di calcolo simbolico e numerico;
- un ambiente grafico e geometrico in cui il piano euclideo di Cabri si integra con il piano cartesiano e le curve definite da funzioni $y = f(x)$;
- un foglio elettronico;
- un ambiente di testo;
- un ambiente di analisi statistica.

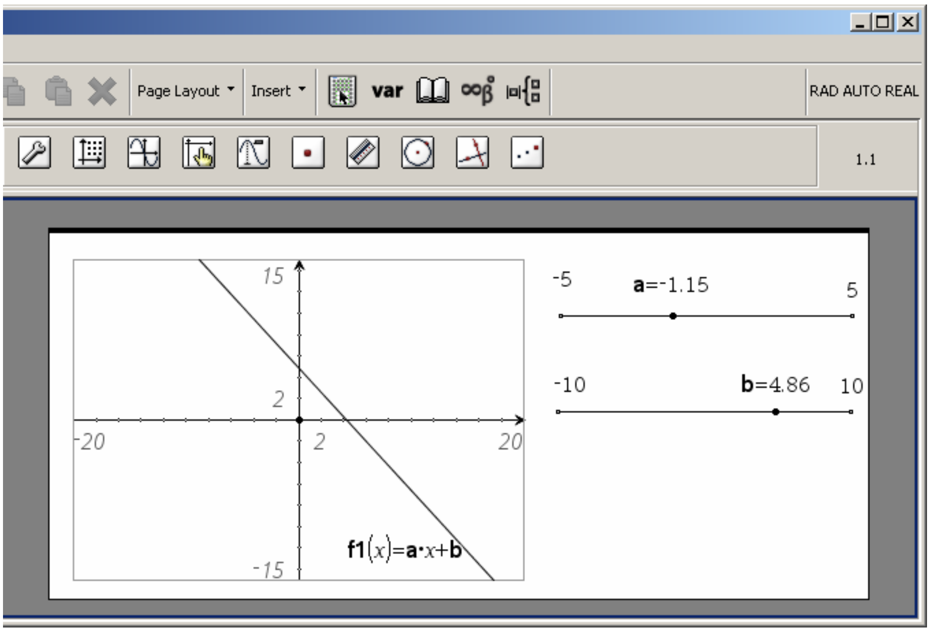
Inoltre il sistema funziona in modo parallelo e perfettamente compatibile sia su computer sia su calcolatrice (che è meglio chiamare "palmare", calcolatrice è ormai un termine riduttivo).
Nel seguito utilizzerò e documenterò gli esempi proposti mediante il software per computer.
L'idea generale è la seguente:

1) si costruisce un **cursore** (*slider*), cioè un punto mobile su un segmento, la cui ascissa varia tra due valori assegnati agli estremi del segmento;
2) si assegna l'ascissa del punto mobile ad una certa variabile (TI-Nspire consente, in qualsiasi ambiente, di assegnare valori numerici a variabili invocate dall'utente);
3) si collega il valore di tale variabile ad un oggetto di una data costruzione; il valore della variabile è l'*input* di una funzione, che produce un *output* che varia con continuità muovendo il cursore.

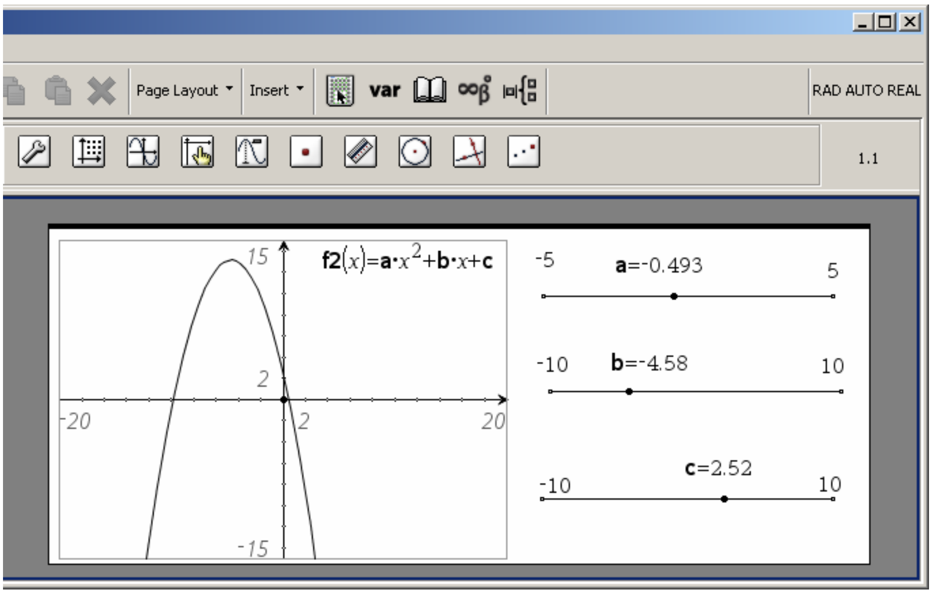
Il modo migliore di comprendere il meccanismo è quello di illustrarlo attraverso esempi.

Alcuni esempi

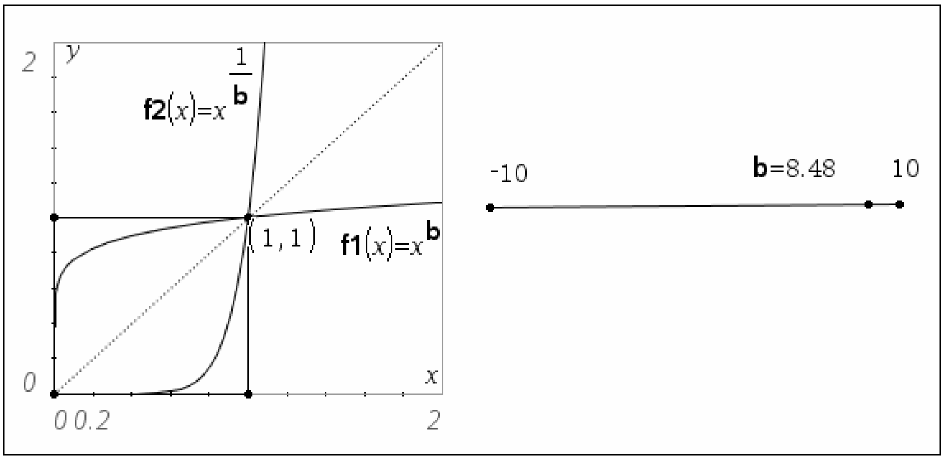
Naturalmente la pagina scritta di un articolo su una rivista è quanto di meno *dinamico* esista; meglio sarebbe illustrare queste proposte direttamente su web, ma confido nella fantasia del lettore per immaginare in modo dinamico le costruzioni che seguono.
Iniziamo da un esempio semplicissimo e spesso frequentato dai software didattici (vedi ad esempio *Graphic Calculus* di David Tall): si costruiscono due cursori, ad esempio a tra -5 e 5, b tra -10 e 10; si definisce la funzione
$f1(x) := ax+b$

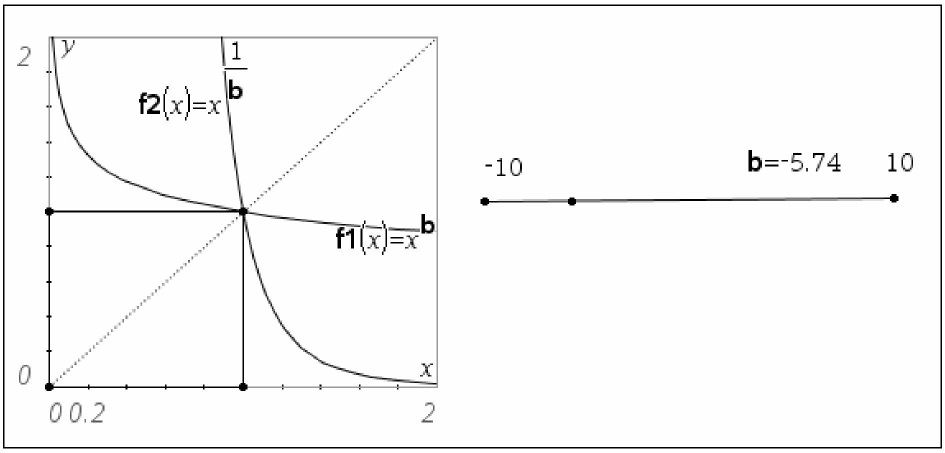


Muovendo i due cursori si osserva il comportamento del grafico di una funzione lineare al variare della pendenza e dell'intercetta.
In modo del tutto analogo si può fare con la funzione quadratica
$f2(x) := ax^2+bx+c$



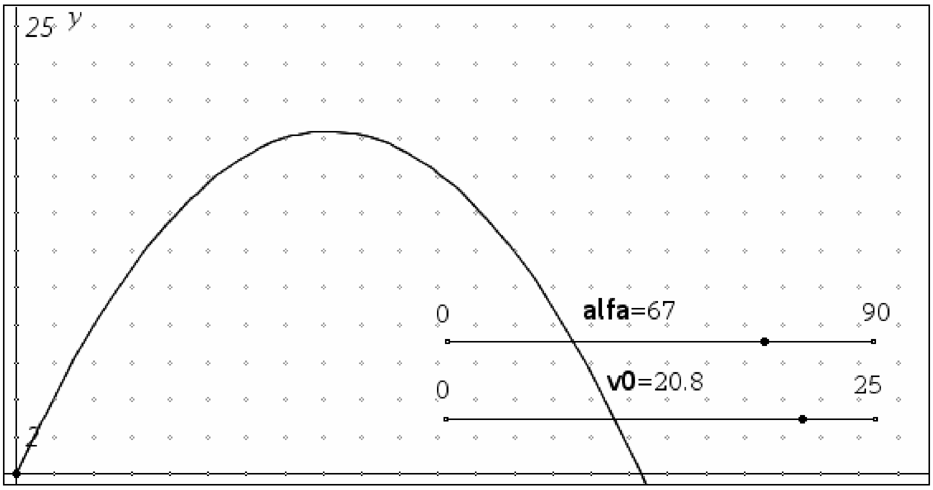
In generale si possono mostrare famiglie di funzioni dipendenti da certi parametri. Le funzioni potenza
$f(x) := x^b$
si prestano in modo particolare ad una presentazione dinamica: si può mostrare in contemporanea il comportamento simmetrico delle funzioni x^b e $x^{1/b}$, per b positivo o negativo.



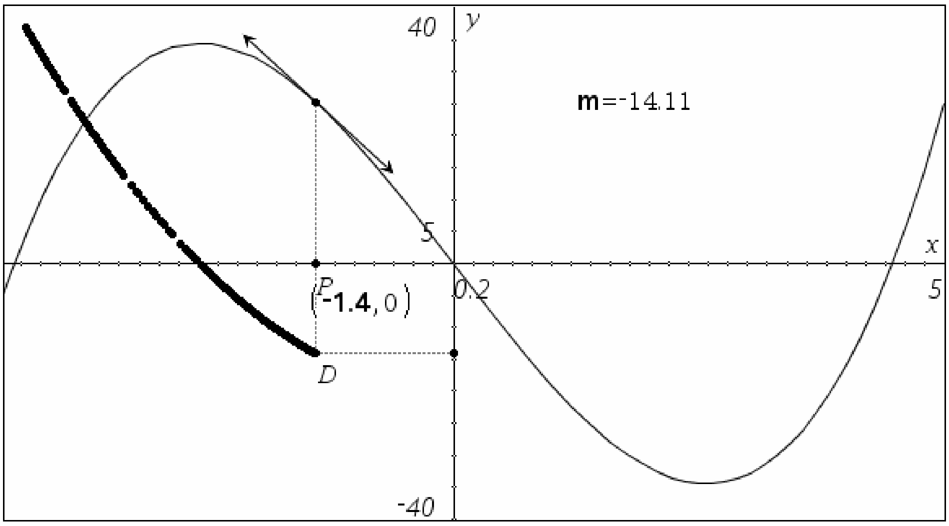


Seguendo questo schema si possono mostrare facilmente le traiettorie del moto parabolico al variare dell'angolo di tiro α (in gradi, nella figura seguente) e della velocità iniziale v_0 (in m/s): è sufficiente impostare la funzione parametrica

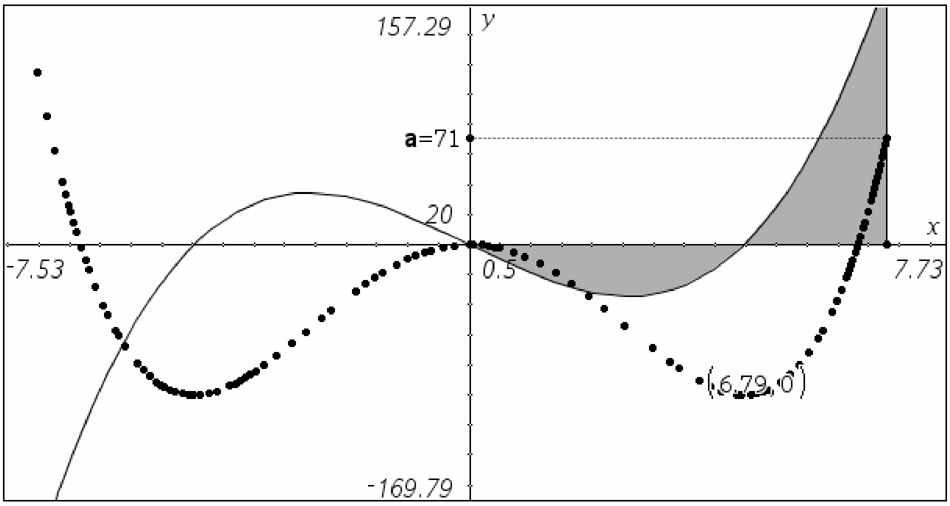
$x(t) = v_0\cos(\alpha)t$
$y(t) = v_0\sin(\alpha)t - 4.9t^2$



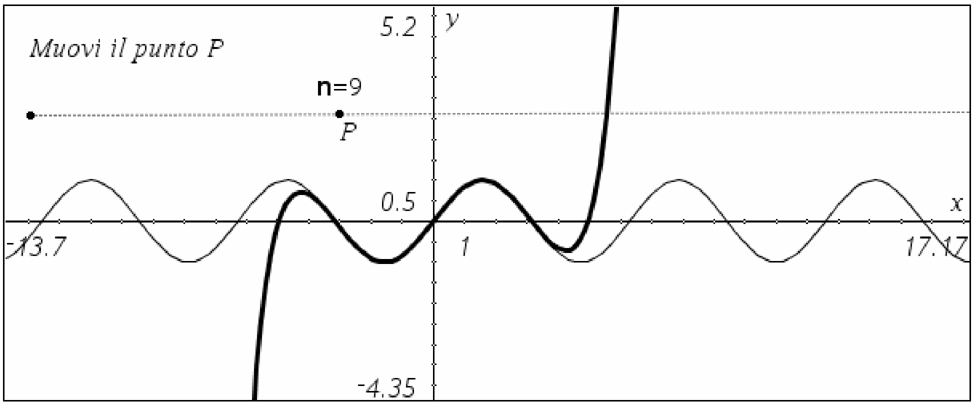
Che cosa c'è di più dinamico dell'idea di derivata? Data una funzione $f(x)$ e un punto P sull'asse x vogliamo mostrare come varia la pendenza locale di f al variare di P. TI-Nspire possiede, tra gli oggetti-base che si possono definire, la retta tangente ad una funzione definita nel piano cartesiano; di questa retta è possibile misurare la pendenza m. Nel foglio seguente si muove il punto P e si mostra la retta tangente, la sua pendenza m e il punto D di ordinata m che lascia la traccia della funzione derivata $f'(x)$.



In modo analogo possiamo costruire la funzione integrale.



Un'altra semplice applicazione consiste nell'animare i polinomi di Taylor di grado *n* di una data funzione con un dato centro. Muovendo il cursore, la variabile *n* ad esso associata descrive i numeri naturali 0, 1, 2, … e viene visualizzato il grafico di $f(x) := \sin(x)$ e del corrispondente polinomio di Taylor centrato in 0 di grado *n*.



Animare numeri

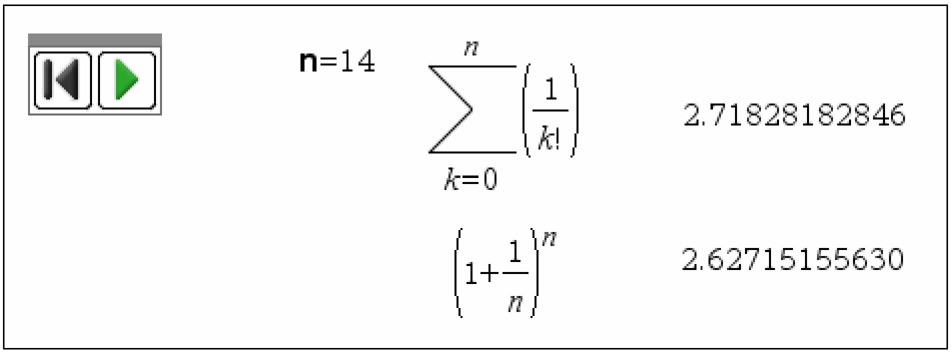
Lo strumento dell'animazione può essere applicato anche a numeri. Esempio: come sappiamo, sia la successione

$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

sia la successione delle somme parziali della serie esponenziale

$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

convergono al numero di Eulero $e = 2.7182818284\ldots$; ma mentre la successione converge assai lentamente, la serie converge con rapidità tale da stabilizzare le prime 11 cifre decimali già per $n = 14$. La figura seguente è tratta da un foglio di lavoro in cui sono state definite e calcolate entrambe le successioni, in funzione di un parametro n che viene animato cliccando sul tasto play.



Mentre n cresce si "vede" la rapidità di convergenza: nella serie si vedono le successive cifre decimali stabilizzarsi rapidamente, tanto che per $n = 14$ il numero sulla destra in alto non cambia più, mentre quello in basso a destra continua a rotolare, ad arrancare faticosamente senza riuscire a stabilizzare la seconda cifra decimale nemmeno quando n è arrivato a 100.

Per altri esempi e, in particolare, per un percorso sistematico sui sistemi dinamici discreti, si veda (Impedovo, 2003).

Strumenti e concetti

Se cambiano gli strumenti operativi con i quali si esplorano i problemi, cambiano in qualche modo anche gli oggetti matematici, muta la gerarchia delle priorità concettuali, cambia la rappresentazione e l'immagine degli oggetti stessi (Paola, 2004). Per esempio: può darsi che la parola "funzione" risvegliasse a bruciapelo (in noi che abbiamo studiato matematica in tempi antichi, senza strumenti elettronici) l'immagine della sua espressione analitica; personalmente la prima cosa che mi veniva in mente (e quindi la mia immagine concettuale) era qualcosa come "x^2" o "ln(x)".Oggi mi viene in mente una curva rossa su una griglia verde disegnata dal mio software preferito sullo schermo del computer. È ozioso e sghembo chiedersi se era meglio allora. La matematica è cambiata perché sono cambiati gli strumenti con i quali la si insegna, con i quali si costruisce, si esplora, si fa ricerca. Allora non è male che la ricerca didattica percorra strade nuove, in cui le possibilità computazionali e grafiche dei moderni computer siano modulate ad un insegnamento capace innanzitutto di mostrare la bellezza della matematica, cioè del nostro pensiero razionale.

Bibliografia

F. Enriques, Insegnamento dinamico, Periodico di matematiche, s. IV, I, 1921, 6 - 16

Impedovo, M. (2003), Sistemi dinamici discreti, *Progetto Alice*, 12, III, 523-582

Impedovo, M. (2006), Rinnovare i piani di studio di matematica, *Nuova Secondaria*, anno XXIII, 6, 47-54

Paola, D. (2004), Insegnamento - apprendimento tecnologico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27A - B n. 6, 671 - 704."