Rinnovare i piani di studio di matematica

Michele Impedovo

Quando la formazione dello studente è vista nella prospettiva di fornire gli strumenti concettuali per avere una preparazione di base ampia ed un forte spirito critico diventano utili, come strumenti adatti all'esplorazione e alla formulazione di congetture, gli strumenti di calcolo automatico. Nella ricca serie di esemplificazioni che seguono è possibile verificare quanto esse siano efficaci e al tempo stesso aderenti a contesti reali, ricchi di spunti e di possibili approfondimenti.

Mentre in tutta Europa e persino in Paesi tradizionalmente più arretrati del nostro (ad esempio Portogallo, Grecia, Croazia, Turchia) è in corso da anni un progetto di integrazione del curriculum di matematica con l'utilizzo di strumenti di calcolo automatico (software numerici, simbolici, grafici, calcolatrici), in Italia si prosegue a vietare le calcolatrici grafiche all'Esame di Stato del Liceo Scientifico. Il curriculum è sostanzialmente lo stesso da oltre un secolo e non si preannunciano per ora strategie di rinnovamento.

Anche la ricerca italiana in didattica della matematica, che pure eccelle in ambito internazionale, non sembra porsi problemi di sorta; continuiamo ad occuparci, con dotte dissertazioni, di contenuti ormai obsoleti e ignoriamo il rinnovamento dei contenuti alla luce della rivoluzione elettronica.

È difficile accettare di insegnare cose diverse da quelle che abbiamo studiato e imparato noi; eppure dobbiamo compiere scelte sensibili in questa direzione. Una commissione dell'UMI (Unione Matematica Italiana), della quale ho fatto parte, ha recentemente prodotto una proposta di curriculum (vedi *Matematica 2003* al sito UMI *http://www.dm.unibo.it/umi*) per la scuola secondaria. La parola d'ordine di questo lavoro è stata «la matematica per il cittadino». Che cosa significa?

Significa: preoccupiamoci di costruire un curriculum per *tutti* gli studenti, e soprattutto per quelli che non proseguiranno con studi scientifici. Preoccupiamoci della spendibilità culturale della matematica che insegniamo. Preoccupiamoci di concorrere all'obiettivo di formare una preparazione scientifica di base e una coscienza critica.

In questo ordine di idee vediamo tre temi che attualmente vengono ignorati o trattati marginalmente nelle scuole italiane (anche al liceo scientifico) e che invece potrebbero costituire un ottimo punto di partenza per il rinnovamento del curriculum:

1. le variazioni delle grandezze;
2. l'avvio al pensiero probabilistico;
3. l'avvio al pensiero multidimensionale.

Non abbiamo alcuna intenzione di lanciare vuoti proclami, per cui ci limiteremo ad illustrare esempi di percorsi didattici con l'utilizzo delle tecnologie. Sfrutteremo soprattutto il foglio elettronico, che oggi è a disposizione di qualunque insegnante e qualunque studente.

Le variazioni delle grandezze

Una grandezza y (per esempio la temperatura, la posizione di un corpo in moto, il valore di un titolo,...) varia al variare di una grandezza x (per esempio il tempo): analizzare, comprendere e descrivere i modelli fondamentali di variazione

- i modelli lineari $y = a+bx$;
- i modelli esponenziali $y = ab^x$;
- i modelli potenza $y = ax^b$

costituisce una competenza indispensabile per il cittadino.

Un lavoro didattico in questa direzione può essere avviato già dalla scuola media.

Modelli discreti

Una variazione può essere descritta in *modo discreto:* la grandezza x assume i valori x_0, $x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x$, $x_0+3\Delta x$, ... e per ciascun valore di x osserviamo e registriamo il corrispondente valore di y. L'oggetto matematico che serve è la *successione:* l'apparato teorico necessario è molto semplice e si riduce all'analisi della *successione delle differenze* prime e seconde.

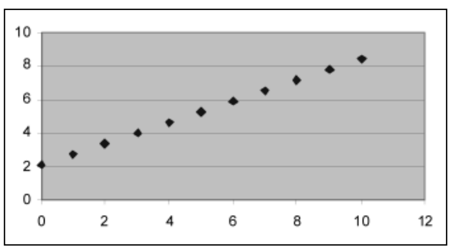
Esempio 1

La tabella seguente illustra il costo (in euro) di una telefonata da rete mobile a rete fissa internazionale in funzione della durata (in minuti). Che relazione c'è tra costo e durata?

t (min)	0	1	2	3	4	5
C (euro)	2.15	2.78	3.41	4.04	4.67	5.3

t (min)	6	7	8	9	10
C (euro)	5.93	6.56	7.19	7.82	8.45

Il primo approccio a questo genere di problemi consiste nel tracciare il grafico dei punti osservati.



L'andamento è palesemente lineare. Valutiamo la sequenza delle differenze e osserviamo che è costante.

t (min)	0	1	2	3	4	5
C (euro)	2.15	2.78	3.41	4.04	4.67	5.3
delta C	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63

t (min)	6	7	8	9	10
C (euro)	5.93	6.56	7.19	7.82	8.45
delta C	0.63	0.63	0.63	0.63	

Qualunque studente (qualunque cittadino) deve saper riconoscere, in questa tabella, un andamento lineare: il costo fisso di chiamata è 2.15 € e ogni minuto in più costa 0.63 € in più; questi due numeri sono rispettivamente l'*intercetta* e la *pendenza* della corrispondente funzione lineare. Il modello funzionale (con le unità di misura adottate) è

$$C(t) := 2.15 + 0.68t.$$

Se la successione delle *differenze* è positiva allora abbiamo una crescita, se è negativa una decrescita (così come, nel continuo, se la *derivata* è positiva la funzione è crescente).

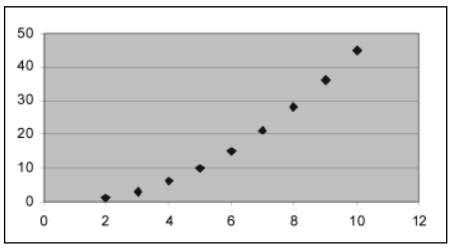
Esempio 2

Quante strette di mano devono darsi n persone?

Iniziamo a compilare una tabella empirica, dove abbiamo indicato con $s(n)$ il numero di strette di mano tra n persone.

n	2	3	4	5	6	7
s(n)	1	3	6	10	15	21

n	8	9	10
s(n)	28	36	45



La tabella è stata costruita nel seguente modo: $s(2)$ e $s(3)$ sono contati in modo esplicito. Quanto vale $s(4)$? Possiamo immaginare che arrivi la quarta persona, dopo che le prime tre si sono già salutate; per completare il giro la quarta persona deve dare la mano alle altre tre. La quinta deve dare la mano alle altre 4, e così via.

Qualunque studente (qualunque cittadino) deve saper riconoscere, in quella tabella, un andamento che non è lineare: la successione delle differenze non è costante, ma è crescente.

n	2	3	4	5	6
s(n)	1	3	6	10	15
delta(s)	2	3	4	5	6

n	7	8	9	10
s(n)	21	28	36	45
delta(s)	7	8	9	

Di che relazione si tratta? Si osserva che Δs è crescente linearmente (con pendenza 1) e dunque $\Delta(\Delta s)$ è costante.

n	2	3	4	5	6
s(n)	1	3	6	10	15
Δ(s)	2	3	4	5	6
Δ(Δ(s))	1	1	1	1	1

n	7	8	9	10
s(n)	21	28	36	45
Δ(s)	7	8	9	
Δ(Δ(s))	1	1		

Le uniche successioni che godono di questa proprietà, cioè di avere le differenze seconde costanti (non nulle), sono le successioni quadratiche. La dimostrazione è molto semplice.

$$f(n) := an^2+bn+c$$
$$f(n+1)-f(n) = 2an+a+b.$$

Nel nostro problema la pendenza delle differenze prime è 1 e l'intercetta è $^{-}1$, dunque $a = 1/2$ e $b = {^{-}1/2}$. La soluzione del problema delle strette di mano è

$$f(n) := \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

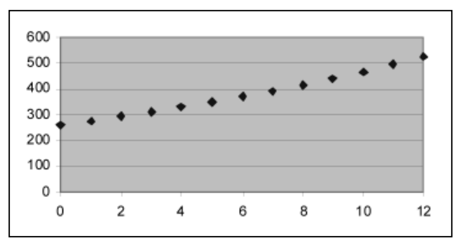
In generale le successioni polinomiali di grado n hanno le differenze n-esime costanti (non nulle). In altri termini: per una successione polinomiale di grado n la successione delle differenze è un polinomio di grado $n-1$.

Esempio 3

La tabella seguente mostra le frequenze delle note musicali della quinta ottava, dal Do 4 al Do 5.

Nota	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa
n	0	1	2	3	4	5
Freq (Hz)	262	277	294	311	330	349

Nota	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si	Do
n	6	7	8	9	10	11	12
Freq (Hz)	370	392	415	440	466	494	523



Si può verificare che la successione delle differenze di qualunque ordine non è costante: non si tratta di una successione polinomiale. Se il «motore» di una successione lineare è la somma di una costante al valore precedente

$$a_{n+1} := a_n + b,$$

di modo che la legge generale è

$$a_n := a_0 + nb$$

il motore di una successione esponenziale è il *prodotto* di una costante (positiva) per il valore precedente:

$$a_{n+1} := a_n\, b,$$

e la legge generale è

$$a_n := a_0 b^n.$$

Allora ciò che si conserva in una successione esponenziale non è la differenza ma il rapporto. La successione dei rapporti è costante, ed è la base della successione esponenziale.

Nota	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si	Do
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Freq (Hz)	262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494	523
R(Freq)	1.057	1.061	1.058	1.061	1.058	1.060	1.059	1.059	1.060	1.059	1.060	1.059	

Nei limiti dell'approssimazione delle frequenze all'unità di misura (Hertz), il rapporto tra ogni termine e il precedente è costante e vale circa 1.06: ad ogni semitono la frequenza aumenta circa del 6%. Mentre una successione lineare è generata da un aumento *assoluto* costante (o una diminuzione, se la pendenza è negativa), una successione esponenziale è generata da un aumento *relativo* costante (o una diminuzione, se la base è compresa tra 0 e 1).
Nel nostro esempio la base b è quel numero che permette, in 12 semitoni, di raddoppiare la frequenza, cioè

$$a_0 b^{12} = 2a_0 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[12]{2}.$$

La legge generale della successione è perciò di questo tipo:

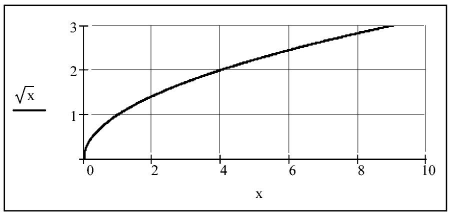
$$a_n := 262 \cdot 1.059^n.$$

Le successioni lineari e le successioni esponenziali costituiscono, per quanto detto, le due più semplici e naturali relazioni tra grandezze: aumento assoluto, aumento percentuale. Può un cittadino ignorare questi fatti?

Modelli continui

Una variazione può essere descritta in *modo continuo:* la grandezza x assume tutti i valori di un intervallo reale e al variare di x in questo insieme continuo varia la grandezza y. L'oggetto matematico che serve è la *funzione:* l'apparato teorico necessario comprende la *derivata.* La teoria matematica è più complessa, ma fornisce anche informazioni più ricche. La derivata si può introdurre agevolmente in forma numerica, mediante approssimazioni successive della pendenza *locale* di una funzione.

Esempio 4
La funzione $f(x) := \sqrt{x}$ ha un grafico interessante: la sua pendenza locale va diminuendo al crescere di x.



In qualunque punto x_0 possiamo approssimare la pendenza locale della funzione con la pendenza di una retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$, dove $x_1 := x_0+h$; ponendo h via via più vicino a 0, si ottengono approssimazioni via via migliori della derivata di f in x_0. La tabella seguente mostra i valori della pendenza di tali rette in $x_0 := 4$ per $h := 0.1, 0.01, 0.001, ...$; si osserva che tali valori si avvicinano via via a 0.25.

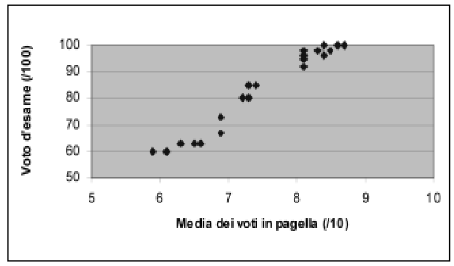
x	h	f(x)	f(x+h)	(f(x+h)-f(x))/h
4	0.1	2	2.02484567	0.248456731
	0.01		2.00249844	0.249843945
	0.001		2.00024998	0.249984377
	0.0001		2.00002500	0.249998438
	0.00001		2.00000250	0.249999844
	0.000001		2.00000025	0.249999984

È sufficiente modificare la cella che contiene x_0 per aggiornare l'intero foglio. Per esempio la pendenza locale in 9 si avvicina indefinitamente a 1/6.

x	h	f(x)	f(x+h)	(f(x+h)-f(x))/h
9	0.1	3	3.01662063	0.166206258
	0.01		3.00166620	0.166620396
	0.001		3.00016666	0.166662037
	0.0001		3.00001667	0.166666204
	0.00001		3.00000167	0.16666662
	0.000001		3.00000017	0.166666662

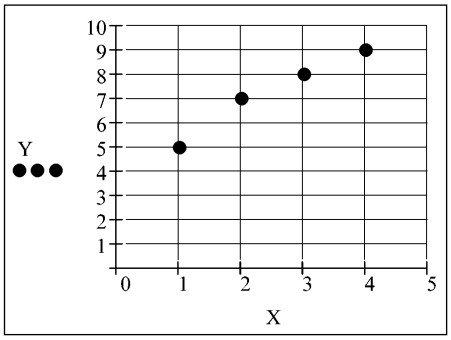
In questo modo si possono fornire congetture sensate su quale sia la derivata di $\sqrt{x}$ al variare di x, cioè quale sia la *funzione derivata*.
Fino ad ora abbiamo svolto esempi *deterministici,* in cui si suppone che esista una relazione simbolica tra le due grandezze, e ci si ingegna per *scoprirla*.
Lasciamo ora il certo per l'incerto.

Esempio 5
Consideriamo il grafico seguente, che fornisce il voto all'Esame di Stato rispetto alla media del voto in pagella al II quadrimestre per gli studenti di una quinta liceo scientifico.



Anche se i punti non sono allineati, possiamo dire che sono *statisticamente allineati:* ipotizziamo cioè una relazione che, fatta salva la casualità insita nelle diverse prestazioni d'esame, sia *sostanzialmente* di tipo lineare. Chi aveva una media bassa ha un voto basso e viceversa; non ci sono eccezioni. Sorge spontanea la domanda:
«Qual è la miglior funzione lineare che approssima i dati?»
Comprendere il senso di questa domanda: ecco il vero obiettivo didattico. Ecco un caso in cui la domanda è molto più importante della risposta. La risposta potrebbe servire, chissà, ad abolire l'Esame di Stato.
Spesso la cosa più importante in un processo di apprendimento è capire il problema, la domanda; il rischio maggiore di un processo didattico è insegnare a rispondere (anche correttamente) a domande che non ci si è posti e di cui non si è compreso il senso.
Ecco un percorso didattico per introdurre, come applicazione delle funzioni quadratiche, il concetto di *retta dei minimi quadrati.*
Una mattina entrate in classe e, senza alcuna preparazione preliminare, date il seguente problema, da svolgere a piccoli gruppi.

Qual è la miglior retta che «passa» per i punti (1,5), (2,7), (3,8), (4,9)?



È un problema che si può dare già nella classe seconda. Solitamente gli studenti non hanno dubbi sul significato della consegna: non posseggono né richiedono una definizione di «miglior retta» ma si mettono al lavoro con impegno ed escogitano le strategie più disparate e curiose: straordinario!

Se si introduce il concetto di deviazione standard per una variabile statistica, non è difficile definire la miglior retta come la funzione lineare che minimizza la somma dei quadrati degli scarti.

Per il problema precedente (in classe seconda) si può introdurre la funzione

$$f(a, b) := (a+b-5)^2+(a+2b-7)^2+$$
$$+(a+3b-8)^2+(a+4b-9)^2$$

che esprime, in funzione dei parametri incogniti a e b la somma dei quadrati degli scarti del modello lineare $x \to ax+b$ dai dati osservati.

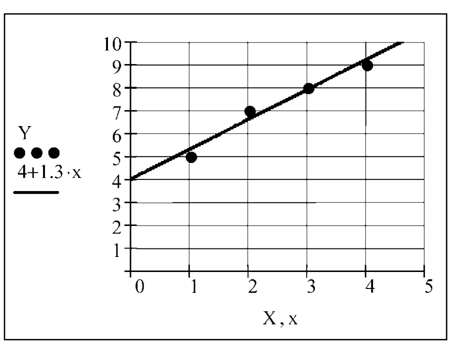
Se pensiamo a fissato, f è una funzione quadratica di b, che dunque assume valore minimo nel vertice:

$b = (158-20a)/60$.

In modo analogo per a:

$a = (58-20b)/8$.

Risolvendo il sistema lineare si ottiene $a = 4$, $b = 1.3$ e $y = 4+1.3b$.



Risolvere questo problema è importante perché, risolto *una volta* con carta e penna, ci consente d'ora in avanti di utilizzare le tecnologie: la cosa più importante è capire che cosa si è trovato.

Se torniamo ai dati dell'esame, e ci affidiamo ad Excel, con i comandi

=PENDENZA(intervalloY; intervalloX)

=INTERCETTA(intervalloY; intervalloX)

scopriamo che la miglior funzione lineare per quei dati è

$$x \to 16.4x-40.$$

Se confrontiamo questa funzione lineare con la ovvia

$$x \to 10x$$

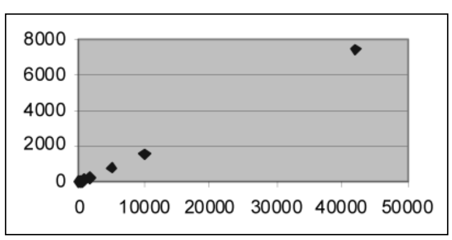
che dovrebbe trasformare decimi in centesimi, siamo persino in grado di commentare (negativamente) il lavoro di valutazione svolto dalla commissione d'esame.

La ricerca della *miglior funzione lineare* che approssima i dati ha una portata concettuale notevole e apre nuove prospettive per una preparazione scientifica di base. I prossimi esempi ne illustrano possibili applicazioni.

Esempio 6

I dati seguenti mostrano gli attuali (settembre 2005) record mondiali maschili di atletica leggera nelle discipline olimpiche di corsa, dai 100 metri alla maratona.

lungh. (m)	tempo (s)
100	9.77
200	19.32
400	43.18
800	101.11
1500	206.00
5000	757.35
10000	1577.53
42195	7440.55



Il grafico può sorprendere: i tempi sembrano disporsi linearmente rispetto alle distanze, come se si potesse correre la maratona alla stessa velocità media dei 100 m. Il fatto è che le ascisse dei punti non sono distribuite in modo uniforme, e il grafico è poco leggibile. Ipotizziamo, più realisticamente, che i tempi si possano descrivere mediante un modello potenza

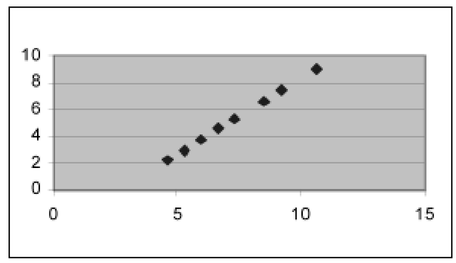
$$y = ax^b$$

con $b > 1$. Se così fosse, da $y = ax^b$, passando ai logaritmi, ricaveremmo

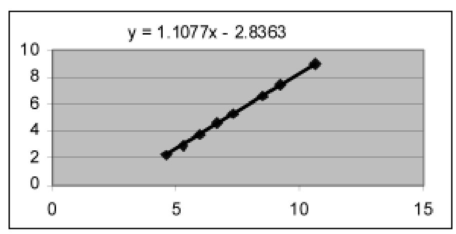
$$\ln(y) = \ln(ax^b)$$
$$\ln(y) = \ln(a)+b\ln(x)$$

e cioè il logaritmo dei tempi si comporterebbe linearmente rispetto al logaritmo delle distanze, con pendenza b e intercetta $\ln(a)$. Confrontiamo allora $\ln(y)$ con $\ln(x)$.

ln(lungh.)	ln(tempo)
4.605	2.279316
5.298	2.961141
5.991	3.765377
6.685	4.616209
7.313	5.327876
8.517	6.629825
9.210	7.363616
10.650	8.9147



I dati sembrano effettivamente ben allineati. La retta di regressione si può calcolare direttamente con «Aggiungi linea di tendenza» di Excel.



Dunque un modello credibile per i record di corsa è

$$tempo = 0.05864 \cdot lunghezza^{1.1077}.$$

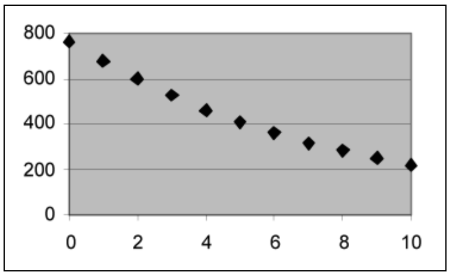
Il record sulla mezza maratona (20 km) dovrebbe allora essere circa 3407 s, cioè 56′48″.

Esempio 7

I dati seguenti riportano la pressione atmosferica media in funzione dell'altezza sul livello del mare.

Il grafico (e le informazioni sulla grandezza fisica in esame) lasciano pensare

h (km)	p (mmHg)
0	760
1	674
2	596
3	526
4	462
5	405
6	360
7	318
8	281
9	248
10	219



ad un andamento esponenziale, cioè del tipo

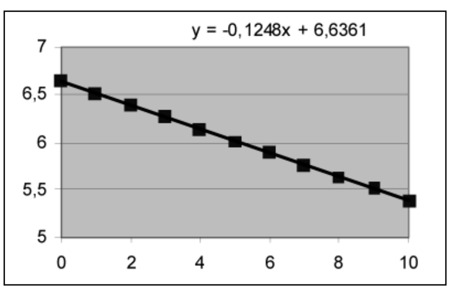
$$y = ab^x.$$

Se così fosse, passando ai logaritmi risulterebbe

$$\ln(y) = \ln(a) + x\ln(b)$$

cioè si rileverebbe una relazione lineare tra x e $\ln(y)$, di pendenza $\ln(b)$ e intercetta $\ln(a)$. Proviamo allora a tracciare il grafico del logaritmo della pressione in funzione dell'altezza.

h (km)	ln(p)
0	6,633318
1	6,51323
2	6,390241
3	6,265301
4	6,135565
5	6,003887
6	5,886104
7	5,762051
8	5,638355
9	5,513429
10	5,389072



La regressione lineare fornisce il modello esponenziale

$$\textit{pressione} = 762 \cdot 0.883^{\textit{altezza}}.$$

La pressione diminuisce circa del 12% per ogni aumento di 1 km dell'altezza.

Avvio al pensiero probabilistico e statistico

Fin dagli anni 80 l'allora Ministro della Pubblica Istruzione (Franca Falcucci) iniziò a porre l'esigenza di inserire nel curriculum di matematica elementi di calcolo delle probabilità e di statistica. Da allora sono passati vent'anni e poco o nulla è cambiato; gli insegnanti di matematica, anche per mancanza di una specifica preparazione (sia didattica sia disciplinare), hanno reagito a quelle proposte con prudenza se non con diffidenza.

Ora occorre recuperare rapidamente il terreno perduto rispetto ad altre scuole europee. D'altra parte le università, con la riforma delle lauree triennali, chiedono sempre più spesso una preparazione su questi temi (un esame di statistica è previsto persino nel corso di laurea in psicologia). I mattoni del pensiero probabilistico (per esempio la probabilità condizionata, l'indipendenza stocastica, le variabili aleatorie e le loro distribuzioni) non si padroneggiano da un giorno all'altro: occorre rifletterci a lungo e più volte, a partire dalla scuola primaria e a livelli di complessità crescente.

Oggi in Italia lo studente universitario si trova in pochi mesi a dover dominare oggetti e relazioni del tutto nuove, sulle quali, non avendo mai riflettuto, difficilmente riuscirà a formarsi una rete di conoscenze e di strumenti critici soddisfacenti.

L'insegnamento della probabilità si presta in modo particolare ad avvalersi di strumenti automatici di calcolo: la simulazione di eventi al calcolatore è uno strumento di forte impatto cognitivo. E che dire della statistica? In un certo senso è il calcolatore stesso che, liberando dall'onere del calcolo, legittima l'analisi statistica come strumento di pensiero.

Negli esempi che seguono intendiamo per *simulazione* il metodo di risoluzione di un problema che consiste nell'utilizzare un generatore di numeri casuali per ripetere un gran numero di volte lo stesso esperimento e controllarne gli esiti.

Esempio 8

Qual è la probabilità di ottenere 8 dalla somma di tre dadi?

Un primo approccio a questo problema può sfruttare una simulazione. Generiamo 1000 terne di numeri casuali interi compresi tra 1 e 6, calcoliamo la somma di ciascuna terna e controlliamo quante volte, su 1000 esperimenti, la somma è 8. Con Excel la funzione CASUALE(), senza argomenti, genera un numero casuale uniformemente distribuito tra 0 e 1. Quindi il comando

=TRONCA(6*CAUSALE())+1

simula il lancio di un dado. Possiamo così «lanciare» tre dadi 1000 volte e calcolarne la somma. Immaginiamo la tabella seguente con 1000 righe.

n	I dado	II dado	III dado	somma
1	3	5	4	12
2	1	6	2	9
3	2	6	5	13
4	4	1	2	7
5	2	2	1	5
6	5	5	4	14
7	5	2	3	10
8	4	4	6	14
9	5	1	1	7
10	5	3	2	10
11	2	1	2	5
12	2	4	3	9

Le uscite possibili sono 3, 4, ..., 18. Il comando

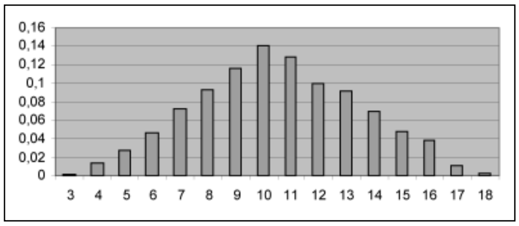
= CONTA.SE(intervallo;condizione)

consente di contare le frequenze di tutte le uscite.

uscite	fr. ass.	fr. rel.
3	4	0,004
4	11	0,011
5	21	0,021
6	43	0,043
7	66	0,066
8	100	0,1
9	125	0,125
10	122	0,122
11	112	0,112
12	111	0,111
13	107	0,107
14	89	0,089
15	48	0,048
16	27	0,027
17	11	0,011
18	3	0,003
somma =	1000	1

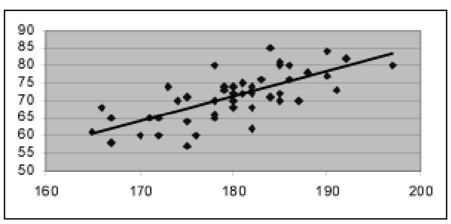
Possiamo ipotizzare che la probabilità di fare 8 con tre dadi sia circa del 10%.

Il grafico delle frequenze relative mostra una simulazione del profilo della distribuzione.



Questo problema ammette una soluzione teorica non proprio banale: la «formula» per la probabilità di avere *s* nella somma di 3 dadi è abbastanza complessa e non merita di essere scritta.
L'approccio della simulazione ha caratteristiche di generalità e per questo può candidarsi, nel curriculum di matematica, a strumento di indagine che ha la stessa dignità (e maggior peso didattico) di tante «formule». Se non altro per non lasciare agli studenti l'idea che in matematica ogni problema abbia la sua formula, e che fare matematica sia mera applicazione di ricette opportune scelte in un database culinario codificato e immutabile.

Esempio 9
Il grafico seguente mostra i pesi di un gruppo di studenti maschi in funzione dell'altezza.



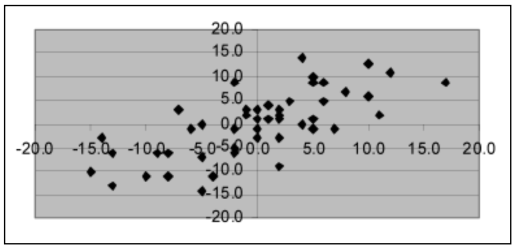
Con i comandi di Excel
=MEDIA(Intervallo)
=DEV.ST(Intervallo)
si calcolano subito la media e la deviazione standard di altezze (in cm) e masse (in kg).

	media	dev. standard
altezza (cm)	180	7
massa (kg)	71	7

Ora guardate me, che sono un po' massiccio: altezza 187 cm, peso 85 kg. Sono più alto e più pesante della media dei miei studenti.
Sono più alto o più pesante?
La media e la deviazione standard ci servono per uniformare altezze (x) e pesi (y), per introdurre una sorta di metrica sul piano altezze-masse: vediamo come.
Innanzitutto consideriamo le differenze

$$x-\mu_x$$
$$y-\mu_y$$

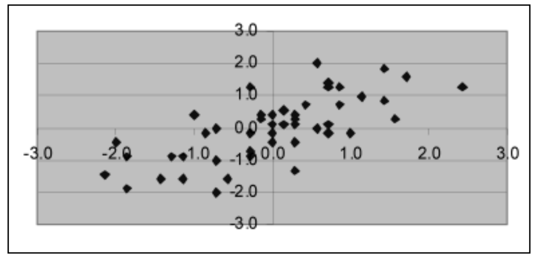
(dove μ_x e μ_y sono rispettivamente la media delle altezze e la media delle masse) che sostituiscono alle grandezze in questione la loro differenza rispetto alla media.



Nel primo e nel terzo quadrante si ritrovano gli studenti «allineati» con la retta di regressione, che sono rispettivamente più alti e più pesanti oppure meno alti e meno pesanti. Negli altri due quadranti si ritrovano le «eccezioni»: studenti più alti e meno pesanti della media, oppure meno alti e più pesanti della media.
È un modo più raffinato di analizzare il grafico. Osservate che la distribuzione dei punti è la stessa: è cambiata solo l'origine.
Così io mi trovo nel primo quadrante: sono alto 7 cm più della media e peso 14 kg più della media. Alcuni studenti dicono: 14 è maggiore di 7 dunque sei più pesante; il ragionamento è ingenuo, ma interessante. È sufficiente mostrare che le unità di misura in gioco (cm e kg) sono arbitrarie, e se misurassimo l'altezza in millimetri il giudizio andrebbe capovolto.
Qual è l'unità di misura più corretta? È la deviazione standard! La domanda più corretta non è «quanti cm più della media» ma «quante deviazioni standard più della media?».
Dividiamo le grandezze $x-\mu_x$ e $y-\mu_y$ per le rispettive deviazioni standard σ_x e σ_y:

$$\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$$

$$\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$$



Abbiamo, per entrambe le grandezze, operato una trasformazione lineare, la più tipica (e più usuale) delle trasformazioni lineari: abbiamo ora tutti i punti contenuti nel rettangolo $[-3, 3]\times[-3, 3]$. Questo significa che tutte le misure rilevate in questo esempio non distano più di tre deviazioni standard, 3σ, dalla media.
Così arriva la brutta notizia: io sono 1σ più alto e 2σ più pesante. Sono, ahimé, più pesante che alto rispetto ai miei studenti.

Avvio al pensiero multidimensionale

Un vettore a più dimensioni è la naturale generalizzazione del numero e consente di descrivere, con un solo oggetto, sistemi complessi. I discorsi fatti per lo studio delle variazioni di grandezze possono essere estesi al caso in cui le grandezze (in input o in output) siano vettori; dunque gli oggetti matematici utili sono *successioni di vettori* e *funzioni di vettori*.
Praticamente in tutti i corsi di laurea a indirizzo scientifico sono richieste conoscenze anche approfondite di algebra lineare; il modello lineare $x \to ax+b$ trova una sua immediata generalizzazione nel modello lineare a più dimensioni $\mathbf{x} \to \mathbf{Ax+b}$, dove $\mathbf{A}$ è una matrice e $\mathbf{b}$ un vettore (così come l'equazione numerica $ax=b$ trova una sua immediata generalizzazione nell'equazione vettoriale $\mathbf{Ax=b}$). Tale generalizzazione è importante perché fornisce un contesto relativamente semplice (ma al tempo stesso potente) per l'analisi delle variazioni di grandezze a più dimensioni: spesso, in assenza di ulteriori informazioni, il modello lineare fornisce, almeno localmente, una descrizione più che soddisfacente dei dati.

Esempio 10

Una popolazione occupa una vasta area urbana in cui si distingue un «centro» e una «periferia».

Si stima che ogni anno il 20% dei residenti in centro sposti la propria residenza in periferia, mentre solo il 2% dei residenti in periferia va ad abitare in centro. Se inizialmente ci sono 2000 abitanti in centro e 1000 abitanti in periferia, qual è l'evoluzione a lungo termine della distribuzione abitativa?

Ecco un modello fortemente semplificato: il numero di abitanti totale (3000) è stabile nel tempo, non ci sono emigrazioni o immigrazioni, le percentuali di fuga dal centro e dalla periferia sono costanti nel tempo, e così via.

Si tratta di analizzare una successione di vettori $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(1)$, $\mathbf{x}(2)$, ..., ciascuno dei quali descrive il numero di abitanti in centro e in periferia agli anni 0, 1, 2, ...

Conosciamo lo stato iniziale del sistema

$$\mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix} c(0) \\ p(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

e sappiamo costruire la distribuzione al tempo t+1 se è nota la distribuzione al tempo t:

$$\mathbf{x}(t+1)=\begin{bmatrix} c(t+1) \\ p(t+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8c\ (t)+0.02p(t) \\ 0.2c\ (t)+0.98p(t) \end{bmatrix}.$$

Con Excel è molto semplice calcolare le componenti del vettore.

t	c(t)	p(t)
0	2000	1000
1	1620	1380
2	1323.6	1676.4
3	1092.4	1907.6
4	912.1	2087.9
5	771.4	2228.6
6	661.7	2338.3
7	576.1	2423.9
8	509.4	2490.6
9	457.3	2542.7
10	416.7	2583.3

Come si vede il numero di abitanti in centro diminuisce rapidamente e altrettanto rapidamente aumentano gli abitanti della periferia. Quale sarà l'evoluzione?

Quasi tutti azzardano l'ipotesi apparentemente più convincente: la popolazione del centro tenderà ad estinguersi e tutti i 3000 abitanti si sposteranno in periferia. Mostriamo allora la distribuzione per t da 40 a 50.

40	272.8	2727.2
41	272.8	2727.2
42	272.8	2727.2
43	272.8	2727.2
44	272.8	2727.2
45	272.8	2727.2
46	272.7	2727.3
47	272.7	2727.3
48	272.7	2727.3
49	272.7	2727.3
50	272.7	2727.3

No, il popolo del centro non si estingue: si stabilizza a circa 273 abitanti. Tutti gli altri si spostano in periferia. Da dove vengono questi strani numeri? Il risultato dipende dalla distribuzione iniziale?

Ecco domande che *producono* apprendimento. Allo studente basterà modificare i valori iniziali per vedere come varia l'evoluzione. La tabella seguente mostra l'evoluzione per una distribuzione iniziale di 100 abitanti in centro e 2900 in periferia.

t	c(t)	p(t)
0	100	2900
1	138	2862
2	167.6	2832.4
3	190.8	2809.2
4	208.8	2791.2
5	222.9	2777.1
6	233.8	2766.2
7	242.4	2757.6
8	249.1	2750.9
9	254.3	2745.7
10	258.3	2741.7
11	261.5	2738.5
12	264.0	2736.0
13	265.9	2734.1
14	267.4	2732.6
15	268.6	2731.4
16	269.5	2730.5
17	270.2	2729.8
18	270.8	2729.2
19	271.2	2728.8
20	271.5	2728.5

Come si vede la popolazione del centro ora cresce, stabilizzandosi come prima a 273, mentre decresce quella della periferia. Il risultato non cambia *qualunque* sia la distribuzione iniziale. Qual è il *vettore di equilibrio* verso cui tende il sistema? Non abbiamo difficoltà a riconoscere che se il sistema partisse dall'equilibrio rimarrebbe fermo: dobbiamo allora chiederci per quale distribuzione iniziale

$$\mathbf{x}(0):=\begin{bmatrix} c \\ p \end{bmatrix}$$

risulta ancora

$$\mathbf{x}(1)=\begin{bmatrix} c \\ p \end{bmatrix}$$

il che comporta che il sistema non si muoverà mai più da quei valori iniziali. Chiediamo in definitiva di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 0.8c+0.02p=c \\ 0.2c+0.98p=p \\ c+p=3000 \end{cases}.$$

Le prime due equazioni sono equivalenti (il sistema è *chiuso*) e la soluzione simbolica è

$$c=\frac{3000}{11}\approx 272.7$$

$$p=\frac{30000}{11}\approx 2727.3\ .$$

Sotto c'è parecchia matematica, tanto che si può affrontare questo problema a diversi livelli di complessità. Si possono far cadere le ipotesi semplificatrici: per esempio le percentuali di fuga possono variare nel tempo, possiamo tener conto dei tassi di natalità e di mortalità della popolazione, delle emigrazioni e delle immigrazioni, delle nuove costruzioni per abitazione, e così via.

Esempio 11

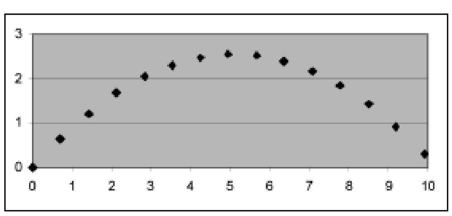
Un sasso viene lanciato a 45° con una velocità iniziale di 10 m/s. Qual è la traiettoria?

Qui il vettore contiene, al variare di t in modo continuo, le coordinate $x(t)$, $y(t)$ del punto rispetto ad un sistema di riferimento con centro nel punto iniziale. Le componenti di tale vettore sono, come è noto

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} 10\cos(45°)t \\ 10\sin(45°)t-\frac{1}{2}gt^2 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 7t \\ 7t-5t^2 \end{bmatrix}$$

dove $g\approx 9.8\,m/s^2$ è l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre. La tabella seguente mostra la posizione del punto a intervalli di 0.1 s.

t	x(t)	y(t)
0	0	0
0.1	0.707	0.658
0.2	1.414	1.218
0.3	2.121	1.680
0.4	2.828	2.044
0.5	3.536	2.311
0.6	4.243	2.479
0.7	4.950	2.549
0.8	5.657	2.521
0.9	6.364	2.395
1	7.071	2.171
1.1	7.778	1.849
1.2	8.485	1.429
1.3	9.192	0.911
1.4	9.899	0.295
1.5	10.607	-0.418



Il grafico di Excel ci restituisce una sorta di «foto stroboscopica» del moto: le istantanee sono scattate ogni decimo di secondo. Conciliare registro grafico e registro numerico è di grande supporto

all'astrazione e alla comprensione del problema.
Osservando la tabella e il grafico si scoprono parecchie proprietà:
• il sasso tocca terra dopo circa 1.4 s;
• ha raggiunto un'altezza massima di circa 2.5 m;
• le fasi ascendente e discendente sono simmetriche;
• la velocità è massima all'inizio del moto (i punti sono più lontani) e, simmetricamente, quando tocca terra;
• la velocità è minima nel punto di massima elevazione (i punti sono più vicini);
• .....
Manipolando la tabella possiamo calcolare la velocità media in ciascun intervallo, possiamo analizzare il fenomeno a intervalli di un centesimo di secondo, o un millesimo, e così ci avviciniamo al concetto di velocità istantanea, e così via.

Verso la conquista del sapere matematico

Sui tre temi considerati, che costituiscono il «corridoio» dell'ipotetica casa della matematica (cioè il percorso principale, dal quale si può accedere alle «stanze» degli approfondimenti) sta lavorando in questi mesi un gruppo di insegnanti, con lo scopo di mettere a punto un vero e proprio manuale in formato elettronico, liberamente scaricabile dalla rete (vedi il Corso di Matematica in *www.matematica.it/paola*).
Ogni insegnante può cercare problemi ovunque, l'unico limite è la sua fantasia: da ciascun problema può generarne altri, a diversi livelli di generalizzazione e di complessità.
Può partire da un problema la cui risposta sia un numero e salire di generalità passo-passo fino a svelare risultati teorici che gli studenti possono intuire e scoprire da soli. Solo in questo modo può sorgere la richiesta di una dimostrazione.
La conquista del sapere matematico deve necessariamente passare per un percorso di esperienza e di esplorazione, che si trasforma progressivamente in sapere teorico e padronanza concettuale.

Michele Impedovo
Università Bocconi, Milano