Nuove tecnologie e nuova scuola: quali opportunità per una didattica "sensata" della matematica?

Domingo Paola
Liceo scientifico "Issel" di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di matematica Università di Genova
e-mail paola.domingo@mail.sirio.it

Abstract

In questo lavoro propongo una riflessione sull'uso delle nuove tecnologie, in particolare delle calcolatrici numeriche, grafiche e simboliche, per un insegnamento - apprendimento della matematica che sia *sensato*, ossia ragionevole perché maggiormente legato agli aspetti empirici e percettivi di quanto non sia attualmente. Le riflessioni vengono proposte all'interno di un quadro teorico di riferimento che pone particolare attenzione al ruolo di mediazione giocato dagli strumenti nel processo di acquisizione e costruzione di conoscenza, all'interazione sociale e al fatto che ogni reale costruzione di significato non può che partire dall'esperienza corporea e ritornare a essa, in quanto l'allontanamento precoce o anche solo definitivo dall'esperienza e dagli aspetti percettivi rischia di creare ostacoli inutili a chi apprende e, soprattutto, rischia di inibire l'attività di costruzione di significati.
Vengono proposti diversi esempi di attività da effettuare con le calcolatrici sia a livello di scuola di base (elementare e media), sia a livello di scuola secondaria.

Premessa

L'aggettivo *sensata*, che compare nel titolo, va inteso nell'accezione di *ragionevole*, in quanto maggiormente legata ai *sensi* o, meglio, agli aspetti percettivi ed empirici, di quanto non sia attualmente, in particolare nella scuola secondaria. Perché un tale approccio alla matematica dovrebbe essere più ragionevole e didatticamente più efficace di altri approcci che sono maggiormente orientati a evidenziare gli aspetti formali della matematica? Le seguenti parole di George Lakoff e Rafael Núñez mi consentono non solo di fornire una prima risposta alla domanda posta, ma anche di dichiarare parte del quadro di riferimento teorico per le mie idee e posizioni relativamente all'apprendimento - insegnamento della matematica:
"La matematica, così come noi la conosciamo, dipende dalla natura del nostro cervello e dalla nostra esperienza corporea" [1] (Lakoff & Núñez, 2000, p.XVI). Più in generale, la costruzione dei concetti non è attività che riflette qualche realtà esterna, trascendente la natura umana, ma è intrinsecamente dimensionata dalla natura del nostro corpo e del nostro cervello attraverso il sistema senso motorio. Ogni reale costruzione di significato non può quindi che partire dall'esperienza corporea e ritornare a essa quando ciò sia necessario: l'allontanamento precoce o anche solo definitivo dall'esperienza e dagli aspetti percettivi rischia di creare ostacoli inutili a chi apprende e, soprattutto, rischia di inibire l'attività di costruzione di significati.
Il compito che mi propongo è quello di portare argomentazioni a sostegno della tesi che le nuove tecnologie offrono occasioni per consentire a chi apprende vere e proprie *esperienze matematiche* e, in tal senso, offrono la possibilità di realizzare una didattica *sensata* della matematica.
Ci sono almeno altre due considerazioni che suggeriscono l'opportunità di superare antichi pregiudizi e di utilizzare le nuove tecnologie sistematicamente nella prassi didattica:

1. le nuove tecnologie, come ogni strumento, incorporano sapere e possono quindi costituire importanti mediatori nel processo di acquisizione di conoscenza, offrendo all'insegnante l'opportunità di costruire ambienti di apprendimento adeguati alle esigenze degli studenti e agli oggetti di studio;
2. il processo di costruzione del sapere non può prescindere da dinamiche di interazione sociale[2]: in questo senso la classe è pensata come una comunità nella quale il sapere viene costruito, comunicato, discusso e condiviso, grazie anche all'attenta azione dell'insegnante.

Gli esempi d'uso delle nuove tecnologie che nel seguito presento sono ispirati a quadri di riferimento pedagogici che prestano particolare attenzione all'interazione sociale in classe e al ruolo di mediazione offerta dagli strumenti nei processi di insegnamento-apprendimento. Ritengo che tali esempi possano

---

[1] La traduzione è mia

[2] Si tratta chiaramente di un'opinione, che però trova conforto in alcune ricerche delle neuroscienze. In particolare, alcuni studi hanno rilevato la presenza di neuroni, detti neuroni mirror, che scaricano nella stessa maniera, sia quando un soggetto vede un'azione, sia quando la esegue. L'aspetto più interessante è che questi neuroni non scaricano se l'azione vista è compiuta da una macchina. Questo fatto induce a ipotizzare che la comprensione dell'azione dipenda da un meccanismo che mappa sullo stesso substrato neurale ciò che è osservato e ciò che è eseguito, purché ciò che è osservato sia eseguito da un essere simile a chi osserva (Gallese, 2001). Secondo quest'ipotesi la comprensione sarebbe basata sulla possibilità di stabilire un'equivalenza motoria tra ciò che fanno gli altri e ciò che fa l'osservatore. Ritengo che ciò costituisca un significativo argomento a supporto delle posizioni psicopedagogiche che attribuiscono particolare importanza all'interazione sociale nel processo di acquisizione e costruzione della conoscenza.

orientare verso un uso delle nuove tecnologie in cui gli studenti siano a tutti gli effetti protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza e i docenti siano in grado di assumere, a seconda delle esigenze, il ruolo di chi progetta l'azione didattica, oppure quello di chi garantisce la condivisione del sapere in classe, di chi suggerisce linee di ricerca o, ancora, quelli di coordinare le discussioni in classe, osservare il lavoro nei piccoli gruppi, aiutare lo studente nella ricerca delle informazioni e via dicendo.
Nel documento della commissione UMI per il riordino dei cicli, (Commissione UMI per il riordino dei cicli, 2001) si indicano tre tipiche modalità di utilizzazione delle nuove tecnologie che appaiono particolarmente adatte per attività di insegnamento - apprendimento in campo matematico:

a) uso di strumenti di calcolo e di software specifici come strumenti nella progettazione e realizzazione di ambienti di apprendimento efficaci per lo sviluppo di conoscenze articolate in campo matematico.
b) Uso delle risorse informative disponibili sulla rete Internet o su specifici software ipermediali per lo sviluppo di ricerche specifiche su contenuti oggetto di studio o per eventuali complementi e approfondimenti degli stessi. Costruzione di prodotti ipermediali su particolari argomenti oggetto di studio.
c) Uso di risorse comunicative di rete per favorire la comunicazione con compagni ed insegnanti per scopi di confronto, riflessione e condivisione di conoscenze matematiche e per lo sviluppo di una pratica didattica basata su attività di tipo collaborativo o cooperativo.

Gli esempi che porterò rientrano nella prima delle tre modalità sopra elencate.

Nuove tecnologie nei primi anni della scuola di base: le calcolatrici tascabili

È piuttosto singolare che in un mondo nel quale potenti calcolatori vengono utilizzati sistematicamente e diffusamente, la scuola presenti ancora forti resistenze all'uso di strumenti di calcolo in attività didattiche. Nella scuola elementare e, talvolta, nella scuola media si vieta l'uso delle calcolatrici numeriche; nella scuola secondaria si vieta l'uso delle calcolatrici grafico - simboliche, lasciando invece allo studente la libertà di scegliere se utilizzare o meno la calcolatrice numerica. Il risultato è che la calcolatrice, sia essa numerica, grafica o simbolica raramente viene fatta oggetto di studio sistematico e di attività didattica durante i corsi di matematica. L'insegnante perde così preziose occasioni come

- l'opportunità di mettere lo studente a confronto con il sapere incorporato nelle calcolatrici
- la possibilità di osservare le reazioni degli studenti di fronte agli output dello strumento
- utilizzare le calcolatrici per costruire ambienti di apprendimento nei quali gli studenti possano effettuare osservazioni, esplorazioni dinamiche, ambienti che favoriscano la produzione di congetture e preparino alla successiva fase della loro validazione (ossia di confutazione mediante esibizione di controesempi o di dimostrazione), evitando di recidere la necessaria continuità cognitiva tra fase di produzione di una congettura e, nel caso essa sia valida, fase di costruzione della sua dimostrazione.

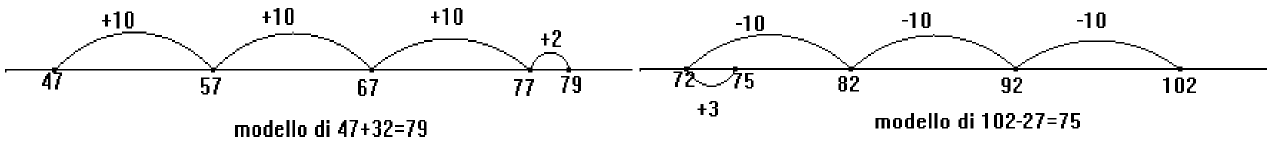
Ecco qualche esempio di attività che, già nei primi anni della scuola di base, potrebbe essere proposta ai bambini utilizzando le calcolatrici numeriche. Si fanno le due seguenti ipotesi:

- che ci si rivolga a bambini che hanno già imparato a contare e ad eseguire addizioni tra due addendi contando, in successione, le unità del secondo addendo a partire da quelle del primo
- che i bambini, attraverso attività in campi di esperienza scolastici ed extra - scolastici (abaco, monete, letture di contatori, …) abbiano un'idea di come si rappresentano i numeri naturali nel sistema di numerazione posizionale decimale.

<u>Addizioni di un numero naturale con 10 o con multipli di 10</u>

Si potrebbe iniziare con il chiedere ai bambini di utilizzare la calcolatrice per esplorare che cosa succede addizionando a un numero di una cifra, poi a un numero di due cifre e, infine, a un numero di tre cifre, 10 oppure multipli di 10.
L'attività dei bambini, in piccoli gruppi di lavoro, dovrebbe essere quella di *raccogliere dati*, così come si fa in un esperimento, utilizzando la calcolatrice come strumento di rilevazione e, quindi, come sorgente di informazioni. Ci si aspetta che, contestualmente all'attività di raccolta, se ne avvii una di osservazione e interpretazione delle regolarità che emergono dall'insieme dei dati raccolti. Ciò dovrebbe favorire la produzione di ipotesi relativamente alle regole che descrivono il funzionamento delle addizioni di un numero naturale con 10 o con un multiplo di 10. Le congetture prodotte dovrebbero poi essere oggetto di una discussione matematica orchestrata dall'insegnante, alla presenza di tutta la classe, nel senso precisato da Bartolini Bussi e collaboratori (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995) e giustificate con argomentazioni adeguate all'età dei bambini e alle loro conoscenze.

Alcune delle conclusioni potrebbero poi essere utilizzate per il cosiddetto "calcolo mentale rapido", magari utilizzando, come strumento di giustificazione di certe tecniche, anche la retta numerica.
Per esempio, il fatto che per calcolare 47 + 32 si possa calcolare 47+10+10+10+2, contando 57, 67, 77, 78, 79, oppure che per eseguire la differenza 102 - 27 si possa calcolare 102 - 10 - 10 - 10 +3 , contando 92, 82, 72, 73, 74, 75, può essere giustificato ricorrendo ai seguenti modelli (che, ovviamente non sono né gli unici, né, in assoluto, i migliori possibili per eseguire le operazioni indicate):



<u>Le tabelline della moltiplicazione</u>
È noto che alcuni bambini incontrano notevoli difficoltà nella memorizzazione delle tabelline della moltiplicazione; non penso sia didatticamente pericoloso suggerire ai bambini di farsi aiutare dalla calcolatrice per costruire essi stessi le tabelline. L'attività, richiedendo di impostare un calcolo, leggere e trascrivere il risultato dovrebbe aiutare i bambini non solo a memorizzare le tabelline, ma anche a osservare regolarità nella costruzione di ogni tabellina e, in generale, a utilizzare la tavola pitagorica come ambiente da osservare, nel quale scoprire regolarità e come strumento per la risoluzione di semplici problemi nei numeri naturali, del tipo "determina, se esiste, in numero che moltiplicato per 3 dà 18". Per inciso, attività sulle tabelline possono essere proposte anche con studenti più maturi, per avviare al linguaggio algebrico, come strumento per rappresentare e dimostrare regolarità numeriche. Per esempio, è possibile osservare sulla tavola pitagorica che la differenza fra i quadrati di due numeri successivi è uguale alla differenza tra il doppio del numero maggiore e 1:
$2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$; $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 7$; in generale si può quindi scrivere $n^2 - (n-1)^2 = 2 \cdot n - 1$, che, tra l'altro, è un modo di dimostrare che la differenza tra i quadrati di due numeri naturali consecutivi è un numero dispari.
<u>Quoziente e resto</u>
Un'altra attività che può essere proposta con la calcolatrice numerica è la determinazione, per tentativi, del quoziente e del resto di una divisione fra numeri naturali. Per esempio, si può chiedere ai bambini di determinare il più grande numero che moltiplicato per 3 dà un prodotto non maggiore di 25; si chiede infine di determinare la differenza tra 25 e il prodotto così ottenuto.
In generale, si chiede ai bambini, dati due numeri naturali a e b di determinare il più grande numero q tale $bq \leq a$ e, in seguito, di determinare r tale che $r = a - bq$. q e r sono il quoziente e il resto della divisione di a per b: in questo caso il problema posto e l'attività di esplorazione con la calcolatrice dovrebbero aiutare i bambini a costruirsi i concetti di quoziente e resto. È proprio l'attività di risoluzione di problemi che porta all'emergere del significato degli oggetti matematici come unità culturali che evolvono nel tempo, con la pratica e l'esperienza matematica (Chevallard, 1992; Godino & Batanero, 1999).
Si potrebbe andare avanti per esempio con attività di scoperta di regolarità nelle moltiplicazioni per 10, 100, 1000, da utilizzare poi nel calcolo mentale rapido, ma mi fermo qui, perché spero di essere riuscito a dare un'idea di che cosa intendo con attività matematiche *sensate* effettuate con l'ausilio della calcolatrice numerica nei primi anni della scuola elementare. Aggiungo solo che lo strumento calcolatrice utilizzato nel modo suggerito induce pratiche di calcolo che potrebbero e dovrebbero sostituire quelle tradizionali basate sulle procedure delle operazioni "in colonna". Tra l'altro sono convinto che queste ultime siano didatticamente inopportune; infatti, se il loro scopo è quello di velocizzare e rendere più sicure le procedure di calcolo, allora tanto vale utilizzare la calcolatrice, che è molto più veloce e, con un po' di concentrazione, molto più "sicura". Se, invece, lo scopo delle procedure di calcolo "in colonna" è quello di aiutare gli studenti a utilizzare e comprendere le proprietà delle operazioni o di allenare le loro giovani e duttili menti, allora è molto più opportuno richiedere che le operazioni vengano svolte in riga, come suggerito dal seguente esempio:
$13 \cdot 15 = (10+3) \cdot (10+5) = 10 \cdot (10+5) + 3 \cdot (10+5) = 3 \cdot (10+5) + 10 \cdot (10+5) =$
$= 3 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 15+30 + 50 + 100 = 45 + 150 = 195$Si noti che la corrispondente procedura "in colonna" nasconde le proprietà utilizzate nel calcolo, in particolare quella distributiva, che è invece evidente ed esplicita nel calcolo in riga

	1	5	x
	1	3	=
	4	5	
1	5		
1	9	5	

Le nuove tecnologie negli ultimi anni della scuola di base: calcolatrici grafiche e sensori di posizione

Oggi è relativamente facile disporre di strumenti che offrono agli studenti la possibilità di rendere concreti, attraverso forti esperienze a livello percettivo, concetti particolarmente delicati e raffinati come quelli della cinematica. Mi sto riferendo alle calcolatrici grafiche collegate a un sensore di posizione: con tale strumentazione, lo studente, movendosi, può direttamente osservare, sul visore della calcolatrice, la traccia della variazione della sua posizione nel tempo rispetto a un fissato sistema di riferimento. Per esempio, lo studente può rendersi conto che la pendenza del grafico della traccia osservata aumenta all'aumentare della velocità con cui si muove, oppure che l'avvicinarsi all'origine del sistema di riferimento genera un grafico in "discesa", ossia decrescente e così via. Si tratta di esperienze proponibili a studenti relativamente giovani, che frequentano gli ultimi anni della scuola media o i primi anni della scuola secondaria. Io stesso ho effettuato, con studenti di terza media e di primo anno di scuola superiore, nell'ambito di un progetto di continuità in matematica, esperienze di questo tipo (Paola, in stampa). Mi limito dare un'idea dell'esperienza effettuata in una terza media, rimandando all'articolo sopra citato per eventuali approfondimenti.

Dopo aver suddiviso gli studenti in gruppi composti da quattro o cinque alunni, sono state effettuate, nell'ordine, le seguenti attività:

1. a turno, ciascun coordinatore di ogni gruppo si è mosso rispetto al sensore, osservando la traccia del proprio movimento proiettata su un muro dell'aula grazie a un view screen posto su una lavagna luminosa e collegato alla calcolatrice. La consegna prevedeva che anche gli altri studenti osservassero attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula.[3]
2. Gli studenti si sono riuniti nei gruppi di lavoro per riflettere e discutere su quanto avevano fatto o visto fare. La consegna era quella iniziare ad avanzare ipotesi (o di confrontare quelle eventualmente già pensate individualmente durante la precedente attività) sul come e perché il movimento era legato al grafico osservato sul muro.
3. A turno, tutti gli alunni che nella prima attività si erano limitati semplicemente a osservare il movimento dei coordinatori dei gruppi di lavoro, sono stati chiamati a compiere essi stessi il movimento. Inizialmente, però, il sensore non è stato messo in funzione: la consegna prevedeva che i compagni di gruppo (eventualmente anche di altri gruppi) disegnassero un grafico tempo-posizione. Subito dopo, lo stesso movimento prima eseguito, veniva riprodotto con il sensore in funzione, in modo che i compagni di gruppo (e altri studenti che eventualmente avessero voluto provare a rispondere alla consegna) potessero confrontare la traccia ora disegnata sul muro con il grafico tempo-posizione prima prodotto.
4. Gli studenti si sono nuovamente riuniti in gruppi di lavoro per rispondere a domande specifiche riguardanti l'interpretazione di alcune caratteristiche grafiche delle tracce osservate sul muro (per esempio dovevano spiegare che cosa suggerisce un segmento orizzontale, uno obliquo, oppure un tratto di curva e così via…)
5. A turno, i coordinatori di ciascun gruppo sono stati invitati a muoversi, con il sensore in funzione e con la traccia proiettata alle loro spalle, in modo tale che essi, al contrario dei compagni, non potessero osservare la traccia prodotta dal proprio movimento. I coordinatori dovevano descrivere verbalmente, al tempo stesso, i propri movimenti e le caratteristiche significative della traccia proiettata sul muro e visibile a tutti gli altri studenti. I compagni di gruppo dovevano prendere nota di eventuali errori commessi dal coordinatore per poi discuterne al termine dell'esperienza.
6. A turno, tutti gli studenti dovevano cercare di riprodurre, con il proprio movimento, un grafico tempo-posizione generato dalla calcolatrice.

[3] Nell'ipotesi avanzata nella nota 2, gli studenti che hanno osservato dal banco, dovrebbero essere stati messi in condizioni cognitive simili a quelle degli studenti che hanno effettivamente eseguito i movimenti.

7. A turno, ciascun coordinatore si è mosso e i compagni di gruppo hanno riportato, sul proprio quaderno, la traccia proiettata sul muro durante il movimento del coordinatore. Al termine del movimento, il coordinatore, utilizzando una specifica funzione fornita dalla calcolatrice, ha rilevato un certo numero di coppie di dati "tempo-posizione". I dati i raccolti sono elaborati in classe dagli studenti, con l'aiuto l'insegnante, in successive lezioni.

A me sembra che il mondo dei sensori apra prospettive nuove e al tempo stesso stimolanti e interessanti per un insegnamento - apprendimento della matematica che sia *sensato*, nell'accezione precisata nella premessa di questo lavoro. Tali strumenti, infatti consentono di introdurre e accompagnare l'attività cognitiva con esperienze fortemente legate al livello percettivo, creando in tal modo la premessa necessaria per ogni attività di astrazione, che è quella di diventare realmente esperti di diversi domini di conoscenze.

Le nuove tecnologie nella scuola secondaria: i software di geometria dinamica e i CAS

Per ragioni di limiti di spazio accenno solo a un esempi di attività che è possibile effettuare nella scuola secondaria utilizzando le nuove tecnologie. Chi fosse interessato a un discorso più sistematico e approfondito può far riferimento ai testi di Michele Impedovo e di Sergio Invernizzi, Maurizio Rinaldi e Andrea Sgarro citati in bibliografia (Impedovo, 1999; Invernizzi, Rinaldi & Sgarro, 2000) e ricchi di intelligenti suggerimenti per chi desideri utilizzare sistematicamente le calcolatrici grafico - simboliche nella didattica della matematica.

L'esempio che desidero proporre riguarda un'attività svolta in Cabri géomètre, un ambiente di geometria dinamica che ora viene messo a disposizione anche in alcune calcolatrici grafico - simboliche. L'attività che presento è solo una di quelle che fanno parte di un progetto di avvio al sapere teorico e, in particolare, alla dimostrazione, costruito dal gruppo di ricerca didattica di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello e sperimentato in diverse scuole[4].

Agli studenti è stato presentato il seguente problema[5]:

Ariele ha trovato una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:

vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2. Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?[6]

In genere, gli studenti ai quali abbiamo proposto il problema, iniziano con il costruire una figura che verifica le condizioni imposte dal problema stesso. In seguito trascinano con il mouse i punti P,Q,M; quest'azione consente loro di effettuare la prima osservazione, che si situa a livello *percettivo*: *se* P e Q si muovono, *allora* T si muove, mentre *se* M si muove, T non si muove. Si noti che quest'osservazione, non semplice da effettuare in ambiente carta e matita, è alla portata di qualunque studente, grazie all'uso di Cabri e, in particolare alla funzione di trascinamento[7]. Forse, anche grazie a queste esplorazioni e osservazioni, gli studenti riescono ben presto a passare dal livello percettivo a quello *relazionale*: poiché se si muove M, allora T non si muove, gli studenti concludono che T è indipendente da M. Ciò equivale a dire che il problema può essere risolto: l'esplorazione effettuata in Cabri ha portato gli studenti a convincersi che il problema può essere risolto e si tratta di una convinzione di ben altro valore rispetto a quella che in genere raggiungono studenti che affrontano il problema solo in ambiente carta e matita ("se l'insegnante lo ha proposto, allora vuol dire che si può risolvere, altrimenti non lo avrebbe proposto"). Dopo essersi convinti che il problema è risolvibile, gli studenti iniziano in genere una ricca e diversificata esplorazione, nella quale

---

[4] Per chi desiderasse maggiori informazioni sul progetto, suggerisco la lettura dei lavori di Arzarello e collaboratori (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 1999), di Paola e Robutti (Paola & Robutti, in stampa) e di Paola (Paola, 2000), citati in bibliografia.

[5] Si tratta di una riformulazione di un problema presentato e risolto da George Gamow nel libro *Uno, due tre ... infinito*, pubblicato in Italia nel 1952 da Arnoldo Mondatori. Per una discussione più approfondita del problema proposto agli studenti, si veda anche il mio lavoro "L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche", di prossima pubblicazione sugli atti dei seminari della Mathesis di Torino.

[6] Ho precisato inizialmente che l'approdo sull'isola era unico e ben individuato; ciò ha consentito di eliminare ambiguità nel riferimento alla "sinistra" e alla "destra" e di rendere unica la posizione del tesoro.

[7] Per qualche considerazione più dettagliata su questa funzione si rimanda all'articolo di Arzarello e collaboratori (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 1999).

utilizzano, per validare congetture, gli strumenti "misura di un segmento" e "misura di un angolo" che Cabri mette a disposizione. Durante questa esplorazione spesso gli studenti si soffermano su casi particolari e fanno a tutti gli effetti attività matematica. In genere tutti gli studenti si accorgono che T appartiene all'asse del segmento PQ; qualcuno scopre che T è il centro di uno dei due quadrati costruiti su PQ. Prima o poi tutti i gruppi concludono che, *qualunque sia* la posizione di M, T è determinato. Questa affermazione si situa a un livello diverso non solo dal livello *percettivo*, ma anche da quello *relazionale*; mi sembra che si possa dire che si situa a livello *logico*: poiché T è indipendente da M, allora qualunque sia M, T può essere determinato. Per tale motivo, quando Ariele giunge sull'isola, anche se non trova il melo, può partire da un qualunque punto e seguire, da quel punto, le indicazioni suggerite dalla mappa: ciò gli garantirà di trovare il tesoro T.
Il passaggio alla dimostrazione avviene per contratto didattico: nelle classi in cui si è proposto il problema è stata inibita la funzione della dimostrazione per *convincere* e si è invece evidenziata la funzione della dimostrazione per *spiegare perché*. Si può dire che la convinzione della validità di una congettura sia una condizione necessaria per dimostrare, ossia per spiegare *perché* quella proprietà vale. Con un contratto didattico di questo tipo Cabri diventa uno strumento prezioso per motivare alla dimostrazione: Cabri infatti aiuta a convincersi della correttezza della congettura e quindi aiuta al formarsi della condizione necessaria per passare alla dimostrazione. Anche se pochissimi studenti riescono in genere ad arrivare alla dimostrazione, vorrei porre in evidenza due fatti molto interessanti:

- tutti gli studenti, anche i più deboli, sono coinvolti in attività matematiche non banali, affrontate in un ambiente favorevole alla comunicazione e alla condivisione delle conoscenze;
- gli studenti che riescono a produrre una dimostrazione cercano di utilizzare, durante l'attività di ricerca e costruzione della dimostrazione, osservazioni effettuate durante la fase di esplorazione in Cabri. Ciò suggerisce che possa esistere una continuità cognitiva tra la fase di esplorazione e osservazione, che porta a formulare congetture, e quella di costruzione di una dimostrazione delle congetture prodotte.

Alcune ricerche in didattica della matematica hanno evidenziato come spesso gli studenti che lavorano con calcolatrici simboliche non riescano a rispondere secondo le attese dei propri insegnanti (Mariotti, 2001, p. 10-14). Ci sono, però, due aspetti dei quali tenere conto:

- i sistemi di manipolazione simbolica sono stati pensati per assistere persone che hanno già sviluppato forti competenze nel linguaggio matematico e non sono costruiti per aiutare i principianti a sviluppare abilità nella comunicazione e nell'attività matematica (Winslow, 2000; Paola, 2001);
- l'uso di una tecnologia, anche buona, non garantisce di per sé innovazione né miglioramento nell'insegnamento - apprendimento della matematica: perché ciò avvenga sono necessari adeguati ambienti di apprendimento che richiedono la progettazione e la realizzazione di opportune modalità di lavoro.

È possibile fornire ragioni ben più articolate per spiegare gli insuccessi dell'uso dei manipolatori simbolici nella didattica della matematica rilevati da alcune ricerche. Se si conviene, con Rabardel e Verillon (Verillon & Rabardel, 1995), che si debba distinguere tra artefatto (cioè l'oggetto materiale, con le sue proprie caratteristiche fisiche e strutturali, costruito per usi specifici) e strumento (l'artefatto insieme alle sue modalità di utilizzazione, così come sono viste e interpretate da un utente), allora l'artefatto diventa strumento solo quando il soggetto riesce ad appropriarsene, utilizzandolo per i propri scopi. In base a questa prospettiva, non ci si deve meravigliare che gli studenti incontrino difficoltà nel lavorare con un artefatto complesso e raffinato come, per esempio, un sistema di manipolazione simbolica: è assai probabile che gli schemi di utilizzazione dell'artefatto messi in opera dagli studenti non siano in accordo con quelli attesi dall'insegnante, dal che segue l'insuccesso. Ovviamente è compito del docente individuare ambienti di apprendimento e attività che consentano di favorire una *genesi strumentale* che comporti l'evoluzione dell'artefatto "manipolatore simbolico" in strumento e che consenta di produrre negli studenti i comportamenti attesi. Queste considerazioni suggeriscono che è facile rimanere delusi dall'utilizzazione delle nuove tecnologie nella didattica della matematica se non si ha il coraggio e la volontà di modificare la didattica della matematica tenendo conto dei nuovi problemi e delle diverse potenzialità che si hanno in un ambiente in cui si faccia uso di strumenti come le calcolatrici simboliche.
Come ha scritto Maria Alessandra Mariotti (Mariotti, 2001), i moderni sistemi di manipolazione grafico - simbolica e gli ambienti di geometria dinamica portano a rivisitare le relazioni tra astratto e concreto e il processo di costruzione del significato, proprio perché mettono a disposizione dell'utente oggetti computazionali che, con una sorta di ossimoro, potrebbero essere chiamati "concrete astrazioni". Si pensi, per esempio, a come può essere introdotto, con una calcolatrice grafico - simbolica, il concetto di tangente a

una funzione in un suo punto, zoomando più volte la funzione nel suo punto di tangenza (Invernizzi, Rinaldi & Sgarro, 2000, 49 e segg.).

Conclusioni

Spero di esser riuscito a dare un'idea delle potenzialità didattiche dell'uso delle nuove tecnologie e, in particolare, delle calcolatrici numeriche, grafiche e simboliche. Al tempo stesso penso che sia chiaro che, se si vuole sperare di utilizzare tutte le potenzialità offerte da questi strumenti è necessario che gli insegnanti superino antichi pregiudizi e facciano sistematicamente uso di questi strumenti nell'attività didattica evitando di demandare agli studenti l'apprendimento dell'uso delle calcolatrici. Soprattutto, gli insegnanti devono avere il coraggio di innovare profondamente l'attuale prassi didattica, adeguandola alle diverse esigenze e alle potenzialità che le nuove tecnologie mettono a disposizione. Ciò richiede un atto di volontà e di coraggio non comuni, ma necessari, come suggestivamente ha scritto Michele Impedovo: " Occorre molto coraggio per cambiare metodi, regole e contenuti di tradizione ormai secolare, in matematica soprattutto. Occorre molto coraggio per accettare che i nostri studenti sapranno in futuro cose diverse da quelle che noi abbiamo studiato e imparato. Occorre molto coraggio per spezzare consuetudini didattiche che hanno ormai il sapore di veri e propri tabù. Soprattutto in matematica" (Impedovo, 2000).

Bibliografia

Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O.: 1999, Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 22B n. 3, 209 – 233.

Bartolini Bussi, M.G., Boni, M. & Ferri, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n.21 NRD di Modena, Comune di Modena.

Chevallard, Y: 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche antropologique, *Recherches en Didactique des Matématiques*, 12(1), 73-112.

Commissione UMI per il riordino dei cicli: 2001, Le nuove tecnologie nelle attività di insegnamento - apprendimento della matematica, *Notiziario UMI*, n.3.

Gallese, V.: 2001, Azioni, rappresentazioni ed intersoggettività: dai neuroni mirror al sistema multiplo di condivisione, *Sistemi Intelligenti*, n.1, 77-102.

Godino J.D. & Batanero C.: 1999, *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*, Pitagora Editrice Bologna, trad. it. dell'articolo comparso sulle *Recherches en didactique des Mathématiques*, 1994 vol 14, n. 3 p. 325-355 a cura di Angel Balderas Puga.

Impedovo, M.: 1999, *Matematica e computer algebra*, Sprinter & Verlag, Milano.

Impedovo, M.: 2000, La matematica nella scuola di tutti: percorsi didattici e ipotesi di rinnovamento, 2° Congresso Nazionale *ADT* Matematica e Scienze Sperimentali nella scuola riformata:che cosa cambia con le nuove tecnologie, http://matematica.uni-bocconi.it/

Invernizzi, S., Rinaldi, M. & Sgarro, A.: 2000, *Moduli di matematica e statistica*, Zanichelli, Bologna.

Lakoff, G: & Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics comes from*, Basic Books, New York.

Mariotti, M.A.: 2001, Influence of technologies advances on students' math learning, in English, L., Bartolini Bussi, M.G., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erbaum Associates.

Paola, D., : 2000 Le definizioni: dalla parte degli studenti, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 23°-B n.6, 561-600

Paola, D. : 2001, Le tecnologie nella riforma dei cicli, nella ricerca e nella prassi didattica. Nuove prospettive e antichi pregiudizi, conferenza congresso ADT, Cattolica, 5-7 ottobre 2001.

Paola, D. : (in stampa) L'uso di nuove tecnologie per l'introduzione ai concetti della cinematica, *Didattica delle Scienze*.

Paola, D. & Robutti, O: (in stampa), La dimostrazione alla prova, nella collana *Quaderni del ministero - Documenti di lavoro*, Lugo di Romagna.

Verillon, P. & Rabardel, P.: 1995, Cognition and Artifacts: a Contribution to the Study of Tought in Relation to Intrumented Activity, *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.

Winslow, C.: 2000, Linguistic aspects of computer algebra system in higher mathematics education, in Nakahara & Koyama (eds), *Proceedings of PME 24*, Hiroshima, v. 4, 281-288