TI-Nspire ispira gli studenti? Analisi di una sperimentazione

Ferdinando Arzarello
Dipartimento di Matematica Università di Torino

Domingo Paola
Liceo scientifico Issel di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova.

Abstract
Questo lavoro propone una iniziale riflessione sull'efficacia di TI-Npsire nell'insegnamento – apprendimento della matematica attraverso un confronto fra lo svolgimento di uno stesso problema in ambiente Cabri per una seconda classe di liceo scientifico PNI e in ambiente TI-Nspire per una prima classe di liceo scientifico PNI.
Le prime analisi dei dati sperimentali, che abbiamo ottenuto con osservazioni in classi che partecipano a un progetto di ricerca internazionale, suggeriscono che un uso mirato di TI-Nspire possa: (a) favorire l'insorgere in classe di nuove pratiche che hanno positive conseguenze sia sui processi di costruzione di significato, sia sull'atteggiamento degli studenti nei confronti dell'attività matematica; (b) favorire l'insorgere di comportamenti multimodali degli studenti caratterizzati da ritmi diversi rispetto a quelli prodotti con altri software interattivi e più consonanti con le modalità tipiche di agire dei giovani; (c) favorire un avvio precoce e sensato al linguaggio simbolico della matematica; (d) fornire un approccio ai concetti della matematica più equilibrato, relativamente alle differenti modalità di rappresentazione dei concetti stessi, rispetto a quanto permesso da altri software.

1. Il progetto di ricerca

TI-Nspire è un software didattico per la matematica prodotto dalla Texas, che mette a disposizione degli utenti quattro ambienti: un "Notes" con poche funzioni, ma semplice e funzionale per la scrittura di brevi appunti; un foglio grafico, per la geometria dinamica e per operare sui grafici di funzioni, simile a quello messo a disposizione da Cabri Géomètre, ma con alcune differenze importanti di cui parleremo; un foglio elettronico con minori funzionalità rispetto a Excel, ma che dà la possibilità di lavorare simbolicamente sui dati e sulle formule immesse; una calcolatrice numerico – simbolica simile a quella implementata sulla TI-89.
I quattro ambienti sono offerti allo stesso livello del menu: a nostro avviso è una scelta progettuale particolarmente adeguata ai fini didattici, in quanto evita di dare preventive indicazioni di priorità a uno fra i diversi registri di rappresentazione degli oggetti matematici. Inoltre gli ambienti numerico, simbolico e grafico sono fortemente integrati fra loro: modificando il valore di una variabile in un foglio, gli altri fogli si aggiornano automaticamente. Il software è disponibile sia sul PC, sia su palmari facilmente collegabili al PC. La scelta di progettare un software che funzionasse allo stesso modo e con la stessa interfaccia grafica sia su PC che sul palmare è al tempo stesso un limite e una potenzialità di TI-Nspire. È ovvio, infatti, che la limitata capacità di memoria del palmare rispetto al PC limiti la potenza di calcolo rendendo problematiche attività che richiedono ingenti risorse di memoria (per esempio esplorazioni relative ai numeri primi o attività sui codici crittografici a

chiave pubblica); analogamente l'impossibilità di utilizzare diversi colori sul visore del palmare rende meno attraenti e chiare pagine grafiche contenenti tracce di diverse funzioni. Al tempo stesso, però, la perfetta identità dell'interfaccia del software nel passaggio dal PC al palmare garantisce di minimizzare il rischio di uno spaesamento degli studenti nel passaggio da uno strumento all'altro.
Le considerazioni presentate e discusse in questo lavoro si basano su attività didattiche condotte nell'anno scolastico 2006 – 2007 in una classe di seconda liceo scientifico che segue un corso PNI e in una classe di prima liceo scientifico, sempre a sperimentazione PNI, coinvolta in un progetto internazionale di ricerca teso a studiare potenzialità e limiti dell'uso di TI-Nspire nell'insegnamento – apprendimento della matematica[1].

2. Un problema classico[2]

Il seguente problema è stato proposto a studenti di una classe di seconda liceo scientifico PNI che avevano la possibilità di utilizzare Cabri géomètre e a una classe di studenti di prima liceo PNI che avevano la possibilità di utilizzare TI-Nspire:

> *Nella Repubblica di Zumbak ci sono due villaggi A e B che distano rispettivamente 4 km e 7 km dalla stessa sponda di un fiume molto stretto e profondo. Grazie a un progetto di cooperazione internazionale, i loro rappresentanti decidono di costruire un sistema di conduzione dell'acqua costituito da una tubatura rettilinea che parte dal villaggio A, raggiunge un punto del fiume e da qui riparte, sempre in linea retta, per raggiungere il villaggio B. Ciò consente di portare l'acqua nei due villaggi.*
> *Si vuole individuare il punto, sulla sponda del fiume, che minimizzi la lunghezza totale della tubatura.*

La consegna, per ambedue le classi, prevedeva:

a) una prima fase, della durata di circa cinque minuti, di riflessione individuale, senza uso di software o di carta e matita;
b) una seconda fase, della durata di dieci minuti, di discussione in piccoli gruppi (a coppie per gli studenti della classe prima, in gruppi di tre – quattro per gli studenti della classe seconda) sulle strategie risolutive pensate durante la prima fase. In questa fase era possibile utilizzare la carta e la matita, ma non gli strumenti informatici;

---

[1] Per testare la validità di tale software la Texas Instrument ha promosso ricerche e sperimentazioni in diverse parti del mondo, dall'Europa agli Stati Uniti, all'Australia. La ricerca in Italia, che è iniziata nell'autunno 2006 in una prima Liceo Scientifico con sperimentazione PNI (docente: Domingo Paola) e in una quarta Liceo Scientifico con sperimentazione PNI (docente: Pierangela Accomazzo), è coordinata da Ferdinando Arzarello. Nel momento in cui questo articolo viene scritto (Settembre 2007), gli studenti hanno usato solo i PC e non ancora i palmari (che verranno utilizzati, insieme al PC, nell'a.s. 2007-2008). Al lavoro partecipano, oltre ai due insegnanti sperimentatori, anche Ornella Robutti, Cristina Sabena e due laureande magistrali in matematica dell'Università di Torino, Lorella Allais e Silvia Damiano. Per la sperimentazione nell'a.s. 2006 – 2007 è stata utilizzata una versione "pre – production" di TI-Nspire.

[2] La formulazione che abbiamo proposto del testo di questo classico problema è di Primo Brandi e Anna Salvadori (progetto *Matematica e realtà*), se si eccettua la sostituzione della "repubblica Democratica del Congo" con l'immaginaria Repubblica di Zumbak (in onore di un bell'esercizio proposto nel libro di analisi matematica per il triennio delle scuole secondarie di secondo grado, scritto da Prodi e Magenes).

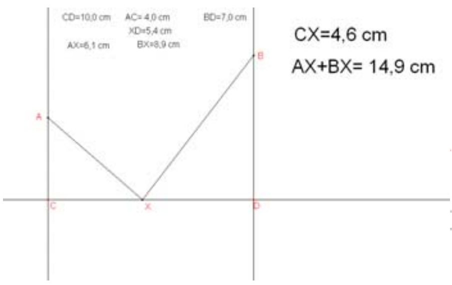
c) una terza fase, della durata di un'ottantina di minuti circa, per lavorare (in coppia per gli studenti di prima e in piccoli gruppi per quelli di seconda) con gli strumenti informatici disponibili (TI-Nspire per gli studenti di prima; Cabri, Excel e TI-InterActive! per quelli di seconda) per risolvere il problema e per consegnare un documento finale all'insegnante.

Durante la terza fase di lavoro e solo in essa era consentito interagire con l'insegnante per chiarimenti e confronti (Laiolo & Paola, 2007).

Qui ci occupiamo di descrivere, per le due classi, solo la terza fase risolutiva, quella con lo strumento informatico, soffermandoci, in particolare, su alcuni momenti del lavoro e sull'uso di particolari funzioni dei due software, allo scopo di avviare un confronto fra le modalità di lavoro degli studenti con i due software. Le strategie risolutive di seguito proposte sono quelle avanzate da buoni risolutori, ma quasi nessuno studente ha incontrato particolari difficoltà ad attuarle autonomamente in problemi simili che in seguito sono stati proposti.

<u>Lavoro in Cabri</u>

Gli studenti effettuano la costruzione, verificando se regge al test del trascinamento (ossia se, trascinando gli oggetti liberi, la figura continua a rappresentare bene il problema proposto). La fase di esplorazione a livello percettivo (in genere massicciamente presente in problemi di questo tipo, quando si inizia a lavorare direttamente in Cabri) è limitata. Nelle due precedenti fasi di lavoro, infatti, gli studenti hanno già avuto modo di comprendere che la lunghezza delle due tubature varia al variare del punto scelto per prendere acqua dal fiume. Quindi dopo una velocissima verifica effettuata trascinando il punto posto sul segmento che rappresenta il fiume, passano a effettuare tutte le varie misure, come suggerisce la figura 1. Trascinando il punto X gli studenti osservano che variano sia la misura CX che individua la posizione di X sul segmento CD, sia la lunghezza da minimizzare, $AX + BX$. È quindi naturale per gli studenti riconoscere che la lunghezza da minimizzare può essere considerata una funzione della lunghezza di CX. Gli studenti, nel muovere X, tengono d'occhio il numero che indica la lunghezza $AX + BX$ in modo da stimare la posizione del punto di minimo. La ricerca è molto approssimativa e lascia quasi immediatamente il posto al disegno del grafico della variazione della lunghezza di $AX + BX$ in funzione della lunghezza di CX. Gli studenti inseriscono gli assi cartesiani e, con lo strumento "luogo" o con lo strumento "traccia", ottengono il grafico desiderato (fig. 2).



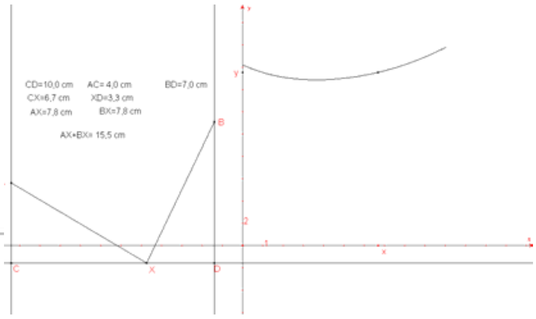


figura 1 figura 2

In seguito, dietro esplicita richiesta dell'insegnante, gli studenti cercano di giustificare *perché* il minimo si trova nella posizione che sono riusciti a stimare con il lavoro in Cabri. Relativamente a questa fase di lavoro diciamo solo che gli studenti hanno utilizzato diversi strumenti: carta e matita o la calcolatrice di TI-InterActive! per lavorare sul piano simbolico (per determinare, attraverso il teorema di Pitagora, la relazione che lega la lunghezza di $AX + BX$ a quella di CX); Excel (una volta trovata la relazione che lega la lunghezza di $AX + BX$ a quella di CX) per lavorare su quello numerico. Alcuni suggerimenti dell'insegnante, relativamente a una costruzione geometrica utile a trovare la posizione di X su CD che rende minima la lunghezza di $AX + BX$, sono stati discussi e ben recepiti in due gruppi di lavoro e, nella successiva lezione, presentati e discussi collettivamente in classe (in quell'occasione si è anche fornita a tutti gli studenti la dimostrazione della correttezza della costruzione suggerita, completando e affinando le argomentazioni discusse dai due gruppi di lavoro cui sopra si è fatto riferimento).

<u>Lavoro in TI-Nspire</u>

Per gli studenti di prima liceo l'esplorazione iniziale nell'ambiente TI-Nspire, anche dopo le prime due fasi di lavoro, è di carattere essenzialmente percettivo. Dopo aver chiamato A e B i punti corrispondenti ai due villaggi e P il punto del fiume dove l'acqua viene pescata dal sistema di tubature, gli studenti spostano il punto P e vedono che $PA + PB$ varia. Non c'è riferimento al piano cartesiano: sono al livello puramente figurale del disegno. In questa esplorazione – osservazione gli studenti si accorgono, talvolta grazie al suggerimento del docente, che il punto P deve essere cercato sul segmento HK, dove H e K sono le proiezioni di A e B sulla retta. Qualche studente scrive il testo $PA + PB$ e poi, con lo strumento "calcola", ottiene la lunghezza di $PA+PB$. Lo strumento "calcola" innesca una transizione da un livello quasi puramente percettivo a uno relazionale: il numero che esprime la lunghezza di $PA + PB$ è legato alla variazione di P. C'è quindi una relazione tra la variazione del numero e il movimento di P (fig. 3). Qualche studente afferma esplicitamente che $PA+PB$ è la variabile dipendente, dimostrando di intravedere ormai la relazione funzionale che lega $PA+PB$, ossia la lunghezza da minimizzare, a un'opportuna variabile indipendente. In genere, però, gli studenti incontrano qualche difficoltà a individuare un'adeguata variabile indipendente. Qualcuno suggerisce P, ma poi non sa procedere. Qualche studente dice AP, qualcuno PB. Altri studenti suggeriscono che la variabile potrebbe essere HP o KP, ma non riescono ad assegnare una misura a tali segmenti, perché non ricordano che in TI-Nspire il segmento deve essere definito, prima di poterlo misurare. È l'insegnante che suggerisce di creare un segmento HP per poi misurarlo, in modo da poter considerare $PA+PB$ funzione di HP.

Questo suggerimento porta gli studenti a utilizzare il menu "attiva variabili" creando le due variabili: **HP** e **lunghezza** (fig. 4). Ciò suggerisce che essi abbiano ben chiaro l'obiettivo di determinare una relazione funzionale che esprima la lunghezza da minimizzare in funzione di un'altra opportuna grandezza.

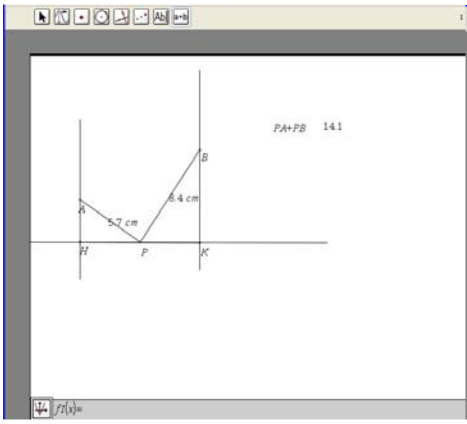


fig. 3

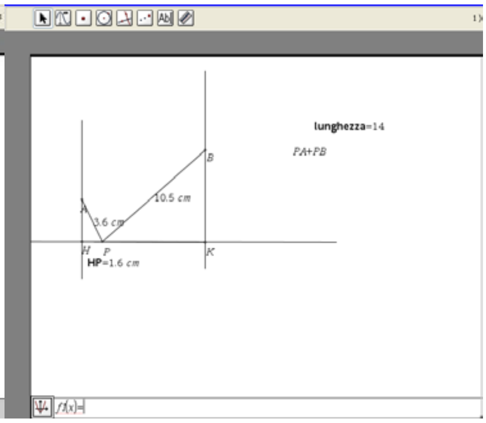


fig. 4

A questo punto gli studenti:

a) aprono il foglio di calcolo di TI-Nspire predisponendolo alla cattura automatica dei dati (la prima colonna viene predisposta per la raccolta dei valori di **HP**; la seconda per la raccolta dei valori di **lunghezza**);

b) avviano, nel foglio grafico, un'animazione automatica del punto *P*.

Una volta raccolti i dati della variazione di **HP** e di **lunghezza**, gli studenti costruiscono altre due colonne; nella prima calcolano le differenze prime della variabile **lunghezza** e nella seconda le differenze seconde[3] (fig. 5).

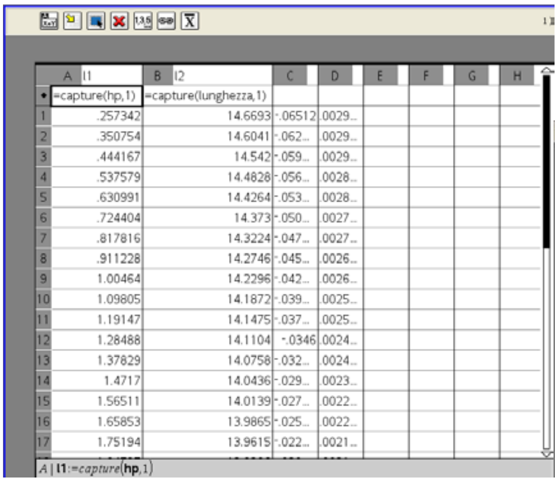
Senza ricorrere ancora al disegno del grafico della funzione che lega la variazione di **lunghezza** alla variazione di **HP**, gli studenti sono ora in grado di avere un'idea della crescenza e della concavità della funzione, semplicemente osservando i segni delle differenze prime e seconde; inoltre sono in grado di trovare con buona approssimazione la posizione di *P* per cui la lunghezza è minima[4].

Il passaggio al grafico, per vedere realmente ciò che già hanno immaginato osservando le differenze prime e seconde, è il passo finale che gli studenti compiono autonomamente (fig. 6).

---

[3] La tecnica delle differenze prime e seconde per lo studio delle variazioni di grandezze è stata oggetto di studio fin dall'inizio dell'anno scolastico ed era quindi già posseduta dagli studenti.

[4] Il valore minimo può essere facilmente individuato osservando i valori della colonna B della figura 5.



	A l1	B l2	C	D	E	F	G	H
•	=capture(hp,1)	=capture(lunghezza,1)						
1	.257342	14.6693	-.06512	.0029...				
2	.350754	14.6041	-.062...	.0029...				
3	.444167	14.542	-.059...	.0029...				
4	.537579	14.4828	-.056...	.0028...				
5	.630991	14.4264	-.053...	.0028...				
6	.724404	14.373	-.050...	.0027...				
7	.817816	14.3224	-.047...	.0027...				
8	.911228	14.2746	-.045...	.0026...				
9	1.00464	14.2296	-.042...	.0026...				
10	1.09805	14.1872	-.039...	.0025...				
11	1.19147	14.1475	-.037...	.0025...				
12	1.28488	14.1104	-.0346	.0024...				
13	1.37829	14.0758	-.032...	.0024...				
14	1.4717	14.0436	-.029...	.0023...				
15	1.56511	14.0139	-.027...	.0022...				
16	1.65853	13.9865	-.025...	.0022...				
17	1.75194	13.9615	-.022...	.0021...				

A | l1:=capture(hp,1)

fig. 5

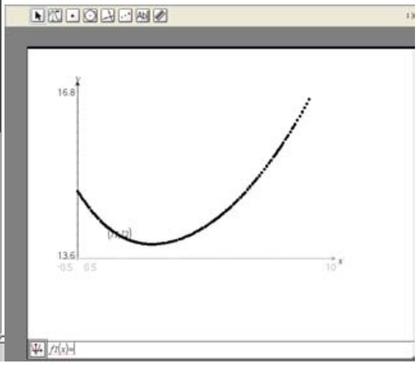


fig. 6

Infine l'insegnante cerca di spingere gli studenti a una giustificazione – spiegazione di quanto osservato. *Perché* il punto *P* si trova proprio in quella posizione? Si tratta di una questione di carattere teorico: *perché* accade così? La domanda non è del tutto sorprendente per molti studenti. Ha senso chiedersi perché accadano tutte quelle cose che hanno visto o, meglio, perché accadano tutti quegli eventi che le risorse di TI-Nspire hanno permesso di vedere. Il perché assume quindi questo senso: e se non avessimo avuto TI-Npsire, come avremmo fatto? Ragioni di spazio impediscono di descrivere questa ulteriore ricerca, avviata dall'insegnante, ma seguita attivamente dagli studenti, in particolare per quel che riguarda il problema preso in considerazione, durante la successiva lezione di discussione collettiva guidata dall'insegnante.

3. I quadri di riferimento teorici per la nostra ricerca

Qualunque ricerca che riguardi i processi di insegnamento – apprendimento in ambienti che fanno uso di nuove tecnologie si trova ad affrontare questioni molto complesse, che hanno bisogno di diversi approcci e attenzioni. È necessario avere quadri di riferimento che consentano di studiare e interpretare le dimensioni istituzionali, culturali, cognitive e didattiche dei processi di insegnamento – apprendimento in ambienti in cui si fa uso sistematico delle nuove tecnologie ed è anche necessario tenere presente la dimensione strumentale del processo di insegnamento – apprendimento introdotta dall'uso di software che mettono a disposizione rappresentazioni ricche e sofisticate degli oggetti matematici. Per interpretare i dati sperimentali che otteniamo attraverso osservazioni di attività didattiche, spesso video registrate, in modo da poter essere più volte riviste, abbiamo fatto riferimento ai seguenti quadri di riferimento teorici:

a) l'approccio *antropologico*, sviluppato da Yves Chevallard (Chevallard, 1999), che assume una prospettiva istituzionale dell'attività matematica: la matematica viene vista come un'attività sociale umana, praticata e diffusa nelle e dalle istituzioni. Tale attività può essere descritta in termini di *praxeologie*. Il termine, utilizzato da Chevallard, vuole evidenziare la necessità di considerare sia le pratiche, sia i discorsi teorici collegati all'esecuzione di un particolare compito (*praxis* + *logos* =

praxeologia). Eventuali cambiamenti nelle *praxeologie* possono indurre significative modificazioni nel significato degli oggetti matematici coinvolti nelle attività (Paola, 2004; 2005; 2006).

b) L'approccio *strumentale* che si ispira all'*ergonomia cognitiva* di Rabardel e Verillon (Verillon & Rabardel, 1995) e che pone come centrale il processo di *genesi strumentale* per descrivere il processo con cui un artefatto (cioè l'oggetto materiale, con le sue proprie caratteristiche fisiche e strutturali) diventa un vero e proprio strumento (l'artefatto insieme alle sue modalità di utilizzazione, così come sono viste, interpretate e attuate da un utente). Il processo si articola secondo due direzioni. La prima va dallo strumento al soggetto; viene detta *instrumentation* e produce un cambiamento nel soggetto: l'artefatto viene gradualmente integrato nella struttura cognitiva di chi lo utilizza. Questo processo richiede adattamento, perché produce cambiamenti nelle rappresentazioni mentali, nelle azioni che si compiono e nei modi in cui tali azioni si realizzano. La seconda direzione, detta *instrumentalisation* agisce verso l'esterno: l'artefatto viene utilizzato per agire adeguatamente nel contesto di lavoro allo scopo di eseguire compiti specifici, anche con modalità che non necessariamente erano state previste all'atto della costruzione.

c) Il paradigma di apprendimento *multimodale*, che deriva dalle scienze cognitive (vedere Wilson, 2000, per una sintesi di varie posizioni) e che nasce all'interno delle teorie dell'*embodiment*. Tali teorie portano a un radicale cambiamento nello studio della formazione dei concetti, che non vengono più analizzati sulla base di "modelli formali astratti del tutto scollegati alla corporeità e alle regioni del cervello che governano le interazioni del corpo con l'ambiente" (Gallese & Lakoff, 2005, p.455), ma tenendo in particolare considerazione il carattere intrinsecamente multimodale con cui gli esseri umani effettuano esperienze e costruiscono conoscenze. Le attività e le esperienze che si realizzano in un ambiente di insegnamento – apprendimento che fa uso di nuove tecnologie hanno carattere tipicamente multimodale. Ciò è vero, in particolare, "quando gli studenti lavorano a coppie o a piccoli gruppi intorno a un computer. In tali casi sia gli studenti sia l'insegnante usano una varietà molto ampia di risorse semiotiche: verbali, gestuali, grafiche, ecc. Tutte queste componenti intervengono attivamente nei processi di apprendimento. In particolare TI-Nspire amplifica la multimodalità delle risorse semiotiche usate per la sua specificità multirappresentazionale" (Arzarello, in stampa).

Abbiamo inoltre cercato di elaborare un modello unitario nel quale tenere conto delle diverse dimensioni culturali, cognitive e strumentali per formulare e studiare specifici problemi di ricerca relativamente all'uso di software nell'insegnamento – apprendimento della matematica. Questo modello è il cosiddetto *Spazio di Azione Produzione e Comunicazione* (d'ora in avanti SAPC), formulato da Ferdinando Arzarello (Arzarello, 2006; Arzarello & Olivero, 2005; Arzarello & Robutti, in stampa). Lo SAPC fornisce una sorta di lente unificante da cui osservare, descrivere e analizzare ciò che accade in classe (gesti, sguardi, segni, comunicazioni e produzioni scritte e orali) secondo il paradigma della multimodalità, prendendo in considerazione gli aspetti istituzionali e culturali (come suggerito dal paradigma dell'ATD) e studiando la genesi strumentale nelle sue direzioni di *instrumentation e instrumentalization* (come suggerito dall'approccio strumentale).

Le componenti dello SAPC sono quindi il corpo, il mondo fisico, gli strumenti e il contesto culturale e istituzionale. Quando gli studenti svolgono attività matematiche, queste componenti (ma anche altre, come quelle emozionali – affettive, che lo SAPC non prende esplicitamente in considerazione) prendono parte attiva al processo di insegnamento – apprendimento, interagendo sistematicamente. Queste interazioni possono essere individuate e analizzate osservando il lavoro degli studenti, la mediazione dell'insegnante e l'uso di strumenti.

4. Un confronto fra le due diverse procedure risolutive

Proponiamo ora un confronto tra le strategie risolutive attuate dagli studenti delle due classi per affrontare il problema proposto (in ambiente Cabri per la classe seconda e in ambiente TI-Nspire per la classe prima). Tale confronto verrà condotto secondo le linee suggerite dai tre quadri di riferimento teorici prima presentati, usando la lente unificante messa a disposizione dallo SAPC.

Dal punto di vista dell'approccio strumentale, è possibile osservare alcune tipiche azioni di *instrumentation* sia in TI-Nspire, sia in Cabri. Per esempio, in TI-Nspire abbiamo:

a) Il test del trascinamento, utilizzato per testare la correttezza di una costruzione;
b) la raccolta automatica dei dati, che è interiorizzata dagli studenti con lo scopo di ottenere informazioni sulla crescenza e sulla concavità della funzione, quindi per avere informazioni sul grafico con un'analisi della variazione dei valori della funzione condotta a livello numerico;
c) l'uso dello strumento "calcola";
d) la dichiarazione delle variabili.

In Cabri, invece, sono tipiche azioni di *instrumentation*:

a) Il test del trascinamento, utilizzato per testare la correttezza di una costruzione;
b) il trasporto di lunghezze sugli assi del sistema di riferimento cartesiano allo scopo di ottenere grafici di funzioni;
c) l'uso di animazioni al fine di osservare la variazione di numeri che esprimono misure di lunghezze (nella risoluzione del problema prima presentato, però, nessuno studente l'ha utilizzata).

Possiamo dire che, sia in Cabri, sia in TI-Nspire, le azioni osservate sono state davvero interiorizzate dagli studenti, che sembrano avere adeguato le proprie concezioni in seguito alla considerazione delle risorse messe a disposizione dallo strumento.

Naturalmente queste azioni strumentali, inserite nell'ambiente di insegnamento – apprendimento in cui gli studenti lavorano, inducono *praxeologie* che, secondo il quadro di riferimento dell'ATD, devono essere attentamente studiate. I nostri dati sperimentali affermano che alcune *praxeologie* che si osservano in TI-Nspire sono significativamente diverse da quelle messe in opera in Cabri, anche in presenza di un progetto didattico molto simile (almeno per quel che riguarda le finalità, i contenuti proposti e alcune metodologie di lavoro). Uno dei motivi di questa diversità è che in Cabri il piano grafico è assolutamente prioritario rispetto a quello numero e simbolico. In TI-Nspire i diversi registri (grafico, numerico e simbolico, oltre a quello del linguaggio naturale permesso dal blocco di appunti) sono, per scelta progettuale, allo stesso livello del menu. Come si è visto, gli studenti che hanno utilizzato Cabri hanno lavorato soprattutto sul piano grafico: la misura delle grandezze geometriche è stata finalizzata a ottenere informazioni sul grafico della funzione oggetto di studio. Invece gli studenti che hanno utilizzato TI-Nspire hanno lavorato anche sul piano numerico e il grafico è stato un coronamento del lavoro. La funzione, come oggetto matematico, è accessibile mediante le sue rappresentazioni numeriche, grafiche e simboliche.

Sia Cabri, sia TI-Nspire consentono, più o meno bene, in modo più o meno naturale, di utilizzare le differenti rappresentazioni, con la differenza, a nostro avviso, che in Cabri le rappresentazioni grafiche fanno la parte del leone, nel senso che mettono in ombra le altre. Pimm, a questo proposito, scrive: "*The* notion of function is actually subtly different, depending on whether it is accessed through algebraic forms, graphs or numerical tables. […] I suspect that the linking of representation is never neutral: one will predominate and will, in consequence of this privileged position, lose much of its own representational status. My candidate is the graph. […] human attention is usually caught by movement. The graphical window is likely to be the winner among different displays. I predict the algebraic forms will come to be seen as merely descriptive, suggesting that the meaning is the screen graphical representation, rather than maintaining two different independent but linked representations"[5].
Pimm suggerisce di fare attenzione a quegli strumenti che danno eccessivo spazio a uno dei registri di rappresentazione rispetto ad altri: potrebbero indurre gli studenti a confondere una rappresentazione (per esempio il grafico) con l'oggetto matematico (la funzione).
In Cabri l'ambiente numerico si "riduce" alla misura, alla calcolatrice, al "numero" e alla tabella. Ci sono anche aspetti dinamici molto interessanti: per esempio i "numeri" ottenuti con la calcolatrice che variano al variare delle variabili da cui dipendono e la cui velocità di variazione (quando si effettua un'animazione) risente del modo in cui la funzione cresce o decresce. Si tratta, però, di osservazioni che richiedono molta sensibilità numerica e visiva, anche se possono essere educate attraverso un'azione costante e dedicata da parte dell'insegnante (di *instrumentation*). Inoltre l'ambiente numerico di Cabri non consente di effettuare alcune operazioni di strutturazione, organizzazione e manipolazione dei dati che un foglio di calcolo invece permette. Le *praxeologie* indotte da Cabri, se non opportunamente e attentamente controllate dall'insegnante, portano quindi a un rischio significativo di confondere l'oggetto matematico (la funzione) con una delle sue rappresentazioni (il grafico), e quindi rischiano di non far convergere i sensi degli studenti verso il sapere istituzionale relativo all'oggetto matematico.
Vediamo che cosa accade con la cattura dati di TI-Nspire. La funzione di trascinamento automatico, che in Cabri porta alla variazione di un numero, in TI-Nspire porta alla creazione di tabelle di valori che possono essere organizzate e su cui si possono eseguire operazioni (calcoli delle differenze prime, seconde e rapporti) che consentono di avere già una risposta, sul piano numerico (con le tecniche delle differenze finite), al problema di determinare le caratteristiche dell'andamento della funzione. Queste informazioni numeriche, altamente strutturate e organizzate e, quindi, trasparenti a un'esplorazione delle caratteristiche della funzione, possono poi essere tradotte in grafico mediante uno scatterplot. TI-Nspire consente quindi di recuperare importanza e dignità all'aspetto numerico che, inevitabilmente, in Cabri

[5] "Il concetto di funzione è insidiosamente diverso, a seconda che vi si acceda attraverso il registro algebrico, grafico o numerico. […] Io sospetto che il legame con le rappresentazioni non sia neutrale: una sarà predominante e, in conseguenza di questa posizione privilegiata, perderà gran parte della sua funzione di rappresentazione. Il mio candidato è il grafico […] l'attenzione degli esseri umani è in genere catturata dal movimento. La finestra grafica è la vincente tra diverse visualizzazioni. Io penso che le forme simboliche saranno percepite come puramente descrittive, suggerendo che il significato consista nella rappresentazione grafica prodotta sullo schermo, piuttosto che mantenere due rappresentazioni differenti e indipendenti, ma collegate fra loro".

viene un po’ trascurato. Con una metafora, forse un po’ spinta, si può dire che in Cabri il numerico è visto dal buco della serratura, mentre TI-Nspire spalanca un vero e proprio portone di ingresso nel mondo numerico.
La raccolta automatica dei dati messa a disposizione da TI-Nspire introduce nell’attività matematica una nuova dimensione che potremmo chiamare *quasi – empirica*. La cattura automatica dei dati, infatti, non consente solamente di compiere esplorazioni: la possibilità di esplorare una situazione geometrica tenendo sotto osservazione come variano le grandezze caratteristiche è propria di molti altri software, per esempio di Cabri, attraverso varie modalità di dragging (Arzarello & al., 2002), ma anche di TI-InterActive! e Graphic Calculus, mediante il movimento di opportuni cursori. In TI-Nspire, però, si ha qualcosa in più: si tratta di un protocollo molto preciso che gli studenti imparano a usare e che è molto simile al modo in cui è possibile acquisire i dati da un ambiente esterno mediante un sensore collegato al computer, organizzandoli tabelle strutturate di dati su cui è possibile operare al fine di individuare regolarità. Nella cattura automatica dei dati è come se si avesse a disposizione una sonda che è in grado di acquisire dati rilevati nell’ambiente virtuale costruito nel foglio geometrico e grafico di TI-Nspire. Da un certo punto di vista, quindi, tale attività è empirica, ma dall’altra concerne la possibilità di studiare variazione di oggetti matematici e non solo grandezze fisiche. Ecco perché abbiamo utilizzato il nome *quasi – empirica* in riferimento a questa particolare dimensione messa a disposizione da TI-Nspire, ispirandoci a Lakatos che si riferì con questo termine a metodi usati in matematica, ma del tutto analoghi a quelli delle scienze sperimentali (Lakatos, 1976).
Questo per quel che riguarda un confronto fra le *praxeologie* indotte dai due software; e per quel che riguarda il confronto con l’ambiente carta e matita? In questo caso ci aiuta una tradizione lunga e consolidata. In carta e matita il grafico è l’oggetto finale, quello che si raggiunge dopo essersi impadroniti di una serie di tecniche di calcolo numerico e simbolico atte a ottenere informazioni relative alla crescenza e alla concavità di una funzione. La lunghezza, la complessità e la difficoltà di questo percorso, sono spesso, per molti studenti, fonte di disorientamento, nel senso che rendono difficile cogliere i forti legami fra le diverse rappresentazioni che, quindi, sono viste più come oggetti a sé, che non come proiezioni di uno stesso referente. Una *praxeologia* tipica della carta e della matita, nel registro numerico, è la raccolta di valori di una funzione in una tabella. La raccolta avviene riga per riga e la tabella viene letta riga per riga, in modo statico, perché l’attenzione è alla coppia di coordinate; in un foglio elettronico, invece, una volta che la variabile indipendente viene fatta variare con passo costante, è facile per l’insegnante indurre una lettura per colonne (della variabile dipendente, delle sue differenze prime e delle sue differenze seconde), molto più dinamica, perché attenta alle variazioni e alle variazioni delle variazioni (si veda anche Slavit, 1997). Nella carta e matita, come già detto, il grafico è l’oggetto finale del desiderio, che si contempla, ma su cui non si opera: non può quindi diventare un vero e proprio oggetto. Negli ambienti grafici messi a disposizione da software come Cabri e TI-Nspire, invece, i grafici possono essere oggetti su cui si inizia a operare molto presto e che consentono di dare significato ai simboli. La carta e la matita è il regno del registro simbolico, perché chi possiede la capacità di utilizzare adeguatamente i simboli della matematica può evitare esplorazioni che in carta e matita sono molto dispendiose e dove, in ogni caso, è impossibile riprodurre la ricchezza delle esplorazioni e delle osservazioni che possono essere effettuate in un ambiente di geometria dinamica o di calcolo numerico e grafico. Proprio in questa potenzialità, per quel che riguarda le esplorazioni, si annida una delle possibili insidie

dell'uso delle nuove tecnologie: quello dello strumento come protesi. Uso Cabri o TI-Nspire, perché potenziano le mie capacità di esplorazione: sembra un atteggiamento sensato e ragionevole, ma nasconde insidie. Infatti l'avere a disposizione strumenti così potenti può indurre a evitare di impegnarsi in attività di esplorazioni mentali dinamiche, volte a prevedere l'evoluzione di una situazione. Si rischia quindi di limitarsi a usare strumenti potenti, come protesi, con la conseguenza inevitabile di atrofizzare capacità molto importanti per il pensiero matematico, come l'esplorazione mentale, l'abilità di manipolare consapevolmente simboli senza l'ausilio di strumenti, la capacità di effettuare anticipazioni, previsioni, di scegliere strategie che minimizzano il numero di dati da acquisire per ottenere informazioni sulla situazione di studio. Ovviamente questo è un rischio che corrono soprattutto gli studenti più in gamba, quelli che non rimarrebbero completamente bloccati di fronte a una situazione problematica in cui sia vietato l'uso dello strumento informatico. Ecco il motivo per cui invitiamo i nostri studenti a riflettere, prima individualmente senza l'ausilio di alcuno strumento, nemmeno della carta e della matita, e poi a condividere in gruppo, solo con la possibilità di usare carta e matita, quanto pensato individualmente, prima di passare all'uso dello strumento informatico[6]. In questo modo tentiamo di integrare quelle *praxeologie*, tipiche dell'ambiente carta e matita, utili a sviluppare il pensiero matematico, con le *praxeologie* tipiche dei nuovi ambienti cercando di ottenere un'interferenza costruttiva.

Per quel che riguarda l'approccio multimodale, ricordiamo solo che:

a) alcune osservazioni del lavoro in classe e una prima analisi dei molti filmati che ormai abbiamo a disposizione portano a ritenere che nelle conversazioni degli studenti mentre risolvono problemi, discutono strategie risolutive o comunicano conoscenze matematiche, vengano sempre più frequentemente prodotti gesti e comportamenti indotti dalle potenzialità di esplorazione dinamica messe a disposizione da questi software. La tesi, che speriamo di corroborare con le prossime osservazioni mirate su questa tipologia specifica di lavoro che abbiamo introdotto recentemente, è che nella fase di esplorazione dinamica mentale individuale alcuni gesti degli studenti riprendano sempre più la tipicità di esplorazioni dinamiche (soprattutto sul piano grafico e geometrico) permesse dagli strumenti informatici in uso in classe[7]. Se questa tesi fosse corroborata da dati sperimentali, si potrebbe dire che lo strumento, invece che essere utilizzato come protesi, in sostituzione dell'arto, avrebbe la funzione di allenare e potenziare il muscolo, consentendo quindi una maggiore funzionalità dell'arto. Fuor di metafora: lo strumento informatico consentirebbe di allenare e potenziare la capacità di effettuare esplorazioni mentali, anticipazioni, previsioni e scelta di strategie risolutive adeguate.

---

[6] Ultimamente abbiamo introdotto, fra la fase di riflessione individuale (in cui non si può utilizzare nemmeno la carta e la matita) e quella di gruppo (in cui non è ancora possibile utilizzare lo strumento informatico), un'altra fase di riflessione individuale in cui sia possibile utilizzare carta e matita.

[7] Pensiamo che ciò potrebbe essere più facilmente rilevato se venisse introdotta anche una fase di discussione di gruppo senza l'uso di alcuno strumento, magari in sostituzione (o prima) di quella individuale in carta e matita.

b) Negli studenti che hanno lavorato in Cabri, abbiamo notato quasi sempre uno stacco significativo tra il lavoro con lo strumento e la redazione del rapporto finale[8]: il lavoro di scrittura iniziava sostanzialmente quando terminava quello di esplorazione, produzione di congetture e loro successiva validazione. In TI-Nspire questo stacco è meno evidente e spesso non esiste quasi. Infatti gli studenti in genere iniziano a scrivere una parte del rapporto, poi tornano a una fase di esplorazione nel foglio grafico o elettronico, quindi ritornano al blocco appunti e così via. Ciò probabilmente accade perché il blocco di appunti è una parte dell'ambiente messo a disposizione da TI-Nspire e come tale viene vissuto dagli studenti.

c) In Cabri il passaggio dal livello empirico, puramente percettivo a quello deduttivo e teorico è mediato da modalità che passano da un controllo ascendente a un controllo discendente[9]. Usualmente il passaggio è caratterizzato da un'abduzione[10], che segnala anche la transizione da un approccio induttivo a uno deduttivo. Generalmente i ritmi secondo i quali avvengono queste transizioni hanno una frequenza molto bassa e richiedono capacità intuitive e osservazioni non banali da parte degli studenti. Il software aiuta, ma il salto da compiere è sempre considerevole. In TI-Nspire, invece, si notano due differenti evoluzioni, entrambe caratterizzate dalla dimensione *quasi – empirica* delle azioni strumentali compiute con questo software e che riguardano i ritmi e le finalità del lavoro. Nel caso dei ritmi, al posto di un lungo tempo di transizione da modalità di controllo ascendente a modalità di controllo discendente, osserviamo in genere la presenza di numerosi episodi, di durata relativamente breve, che aumentano la frequenza di transizione da modalità di controllo ascendente a modalità di controllo discendente. Si pensi, per esempio, al problema della minimizzazione della lunghezza delle tubature: in TI-Nspire la prima fase, puramente percettiva, di esplorazione della situazione mediante il movimento di P (controllo ascendente), è stata seguita dalla misura di $AP + PB$ e dalla dichiarazione esplicita delle variabili dipendente e indipendente (controllo discendente); a ciò ha fatto seguito la cattura automatica dei dati (controllo ascendente) e l'interpretazione delle caratteristiche di crescita e concavità della funzione mediante le differenze prime e seconde (controllo discendente). Per quel che riguarda le finalità, probabilmente anche a causa del contratto didattico, queste brevi fasi contengono generalmente una finalità epistemica che spinge gli

---

[8] Nelle attività che proponiamo in classe vi è sempre la richiesta di produrre una relazione finale in cui vengano descritti i vari passi risolutivi, comprese le discussioni sulle strategie proposte, anche quelle eventualmente abbandonate.

[9] La modalità di controllo è di tipo ascendente (dagli stimoli dell'ambiente al soggetto) quando il soggetto esplora la situazione (per esempio una configurazione geometrica o un grafico sullo schermo), attento a rilevare e interpretare qualcosa che sembra degno di interesse. La modalità di controllo è di tipo discendente (dalle conoscenze del soggetto alla situazione osservata) quando il soggetto esplora la situazione con il ben preciso scopo di validare una congettura che ha formulato in modo più o meno esplicito. Nel primo caso le azioni strumentali hanno una natura e una finalità esplorative (per vedere se accade qualcosa); nel secondo caso hanno finalità di testare una congettura. Per maggiori dettagli, vedere Saada-Robert (1989), Arzarello (2000), Arzarello et al. (2002).

[10] Ossia dalla capacità di riconoscere, nella base di conoscenze disponibili dal soggetto, quali fra esse possono essere utilizzate per spiegare un fatto osservato.

studenti a scrivere brevi note su quello che stanno facendo e sul perché lo fanno. Sintetizzando, ci sembra di poter affermare che il lavoro in Cabri è in genere caratterizzato da un'unica lunga azione epistemica che segna il passaggio dal livello empirico a quello teorico; nel lavoro in TI-Nspire, invece, sembrano instaurarsi varie brevi e diverse azioni *quasi- empiriche* di transizione da fasi di controllo ascendente a fasi di controllo discendente, tutte con finalità epistemiche.

5. Qualche possibile conclusione

È sempre azzardato trarre conclusioni da ricerche appena avviate o che sono in fase di sviluppo; d'altra parte è inevitabile che chi è coinvolto in una ricerca tenti sistemazioni parziali dei risultati sperimentali osservati e che si sono iniziati ad analizzare. Infatti queste prime sistemazioni consentono di iniziare a costruire la struttura teorica che, a sua volta, permette di osservare e interpretare i dati sperimentali più nitidamente, grazie alle lenti della teoria. Il quadro teorico che stiamo iniziando a precisare, quindi, è da una parte un prodotto delle nostre osservazioni; dall'altra dovrebbe consentire di precisare meglio le questioni di ricerca e di individuare e interpretare con maggiore consapevolezza i dati delle future attività sperimentali che proporremo e osserveremo.
Concludiamo questo lavoro ponendo tre domande (che caratterizzano la nostra ricerca e che sono state formulate nell'ambito dei nostri quadri di riferimento teorici) e le tre relative risposte che ci sembra di poter fornire in base alle analisi che fino a ora abbiamo compiuto.

Domanda D1. Come cambiano le praxeologie in seguito all'introduzione di TI-Nspire in classe? In che modo le nuove praxeologie (se si instaurano) favoriscono (od ostacolano) l'apprendimento della matematica da parte degli studenti?
Domanda D2. Quale è il carattere specifico delle azioni strumentali (di instrumentation e di instrumentalisation) in un ambiente di insegnamento - apprendimento in cui viene utilizzato TI-Nspire? Quali azioni strumentali favoriscono (od ostacolano) l'apprendimento della matematica da parte degli studenti? Come viene attivato e gestito il gioco fra azioni epistemiche e pragmatiche per favorire l'apprendimento?
Domanda D3. In che misura TI-Nspire modifica i comportamenti multimodali degli studenti? Come tali comportamenti favoriscono (od ostacolano) l'apprendimento della matematica?

Risposta R1. In classe, attraverso l'uso di TI-Nspire e, in particolare, di specifiche funzioni del software (come per esempio lo strumento "calcola", l'acquisizione automatica dei dati, l'uso simbolico del foglio elettronico), vengono introdotte nuove praxeologie che si rivelano particolarmente adeguate per la comprensione di alcuni concetti della matematica (come quello di funzione, grazie anche alla possibilità di dare pari dignità alle sue differenti rappresentazioni) e a un'introduzione precoce e significativa del linguaggio simbolico della matematica. Al tempo stesso un'introduzione poco meditata e poco consapevole da parte dell'insegnante di strumenti potenti come TI-Nspire potrebbe indurre gli studenti a utilizzarli come protesi che sostituiscono del tutto o quasi le esplorazioni e il lavoro con carta e matita, con il conseguente rischio di atrofizzare, invece che allenare, abilità e capacità di fondamentale importanza nel pensiero matematico.
Risposta R2. Le maggiori e più interessanti novità relativamente alle azioni strumentali indotte dall'uso di TI-Nspire consistono negli strumenti "calcola" e "attiva variabili", che favoriscono il riconoscimento esplicito di una relazione funzionale fra grandezze variabili; nello strumento "cattura automatica di dati" che, con determinati accorgimenti, consente di

utilizzare in modo molto potente e significativo il registro numerico per studiare variazioni di grandezze; nell'uso del foglio di calcolo simbolico. Ci sembra di poter affermare che tutte le azioni strumentali consentite e indotte dall'uso di questi strumenti aiutino l'apprendimento della matematica favorendo, in particolare, la transizione dagli aspetti pragmatici a quelli teorici, attraverso fasi di lavoro quasi – empiriche che hanno una chiara funzione espistemica.

<u>Risposta R3</u>. *Le azioni permesse e indotte da TI-Nspire sembrano dare luogo a ritmi molto più intensi, rispetto a quelli indotti da altri software, relativamente al passaggio da modalità di controllo ascendente a modalità di controllo discendente. La presenza di diverse rappresentazioni allo stesso livello del menu principale sembra inoltre favorire modalità di lavoro simili al multitasking. Infine i carichi cognitivi di lavoro sembrano alleggerirsi proprio grazie alla frammentazione indotta da questa tipologia di lavoro. Tutto ciò sembra essere particolarmente consonante con le modalità di fare esperienza e di comunicare dei giovani d'oggi. È chiaro che può trattarsi di un'interessante opportunità per aiutare i giovani nell'apprendimento della matematica, ma è anche chiaro che si corre il rischio di appiattirsi su queste modalità di lavoro rinunciando a dare ai giovani l'opportunità e la possibilità di imparare a riflettere maggiormente sulle strategie risolutive scelte, a impostare con calma piani di approccio a un problema, ad affrontare ricerche anche in profondità e non solo in ampiezza. Da questo punto di vista la responsabilità dell'insegnante nel pianificare l'ambiente di insegnamento – apprendimento, nello scegliere le attività da proporre e nel guidare gentilmente, ma con fermezza le principali fasi del processo di insegnamento – apprendimento è assai elevata.*

Bibliografia

Arzarello F. (2000). Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production. *Proceedings of PME XXIV*. (vol. 1).

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 66-72.

Arzarello F. & Olivero, F. (2005). Theories and empirical researches: towards a common framework. *CERME 4, Working Group 11*. Barcelona, 17-21 February 2005. Pubblicazione elettronica: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/paperswg11.htm .

Arzarello, F. (2006). Paesaggi matematici e i loro abtanti: percezioni, linguaggi, teorie, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. vol. 29 A-B, pp. 415-454 ISSN: 1123-7570.

Arzarello, F. (in stampa), TI-nspire come ambiente di apprendimento multimodale, *Atti del convegno nazionale di Castel San Pietro Terme*, 2007.

Arzarello, F. & Robutti, O. (in stampa). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm, in: Lyn English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh e D. Tirosh (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (LEA, USA), 2nd revised edition.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques professorales dans la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*19(2), 221-266.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005).The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 21, 1-25.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.

Laiolo, P. & Paola, D. (2007). Using new technologies to help students building the meaning of the concept of function, *CIEAEM 59*, Dogoboko.
Paola, D. (2000). 'Le definizioni: dalla parte degli studenti', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.23-B, 561-600.
Paola, D. (2004). Insegnamento - apprendimento tecnologico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 27A - B n. 6, 671 - 704.
Paola, D. (2005). Usando las tecnologias para una didactica sensata de las matematicas (6 - 12 anos), Nº 039 - *Educación primaria y matemáticas*, 50 - 63.
Paola, D. (2006). Sensing Mathematics in the classroom through the use of new technologies, in *Changes in Society: A Challenge for Mathematics Education*, Proceedings CIEAEM 58, Srnì p.30 - 35 (French version: On sent les mathématiques en class à travers l'usage des nouvelles technologies, p. 36 - 41).
Pimm, D. (1995), *Symbols and meanings in school mathematics*, Routledge, London - New York.
Saada-Robert, M. (1989). La microgénèse de la rapresentation d'un problème, *Psychologie Française*, *34* (2/3), 193-206.
Slavit, D., 1997, An alternate route to the reification of function, *Educational Studies in Mathematics*, **33,** 259–281.
Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity.*European Journal of Psychology of Education*, **10** (1).
Wilson, M. (2002). 'Six views of embodied cognition', *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625-636. [http://ecl.ucsd.edu/EmbCog_Wilson.pdf]