Aspetti paradossali in problemi di probabilità

Domingo Paola, Gruppo di Ricerca e Educazione in Matematica dell'Università di Genova, Dipartimento di Matematica, via L.B. Alberti, 4

Non è raro che pubblicazioni di carattere dilettevole legate alla matematica propongano giochi, quesiti e problemi in cui interviene la nozione di probabilità. Ho l' impressione che la ragione di tale fatto sia da ricercarsi negli aspetti paradossali che molti di questi problemi presentano. L'aggettivo paradossale viene qui utilizzato in senso lato, per caratterizzare un risultato o un'argomentazione inattesi, in quanto contrari all'intuizione o al comune modo di ragionare.

In questa nota presento alcuni esempi di problemi legati alla nozione di probabilità la cui risoluzione viene in genere ritenuta paradossale e propongo l'ipotesi che gli aspetti contrari all'intuizione e al senso comune siano dovuti all'applicazione, più o meno consapevole, di particolari schemi concettuali inadeguati ad un corretto approccio ai problemi proposti.

Le riflessioni che seguono nascono da alcune esperienze ricorrenti nelle attività svolte quale insegnante di scuola secondaria superiore e quale formatore nei corsi del Piano Nazionale Informatica; le conclusioni più significative che mi sembra di poter trarre sono le seguenti:
- le difficoltà nella risoluzione dei problemi proposti sono comuni, anche se ovviamente a livelli differenti, a studenti e insegnanti;
- i paradossi possono costituire un buon veicolo per l'introduzione di argomenti non solo legati alla nozione di probabilità, ma più in generale di carattere matematico, nei corsi di scuola secondaria superiore.

Il problema del compleanno, quello delle parti e il modello proporzionale

Il problema del compleanno può essere così formulato:

in una classe vi sono *n* studenti. Ammettendo di sapere che nessuno degli *n* studenti è nato il ventinove febbraio, si chiede qual è la probabilità che almeno due studenti siano nati nello stesso giorno dell'anno.

Proponete il quesito a qualche vostro amico (che non conosca già la risposta) facendogli innanzitutto notare che:
(a) se gli studenti fossero 366 la probabilità richiesta sarebbe uguale a 1;
(b) se vi fosse un solo studente la probabilità sarebbe uguale a 0.
Infine chiedete al vostro amico quale ritiene essere, fra i seguenti numeri

60 ; 134 ; 15 ; 82 ; 10

quello che meglio approssima il minimo numero *k* di studenti per cui la probabilità di trovarne almeno due che abbiano lo stesso compleanno è maggiore di 0.5.

La maggior parte degli studenti a cui ho proposto il quesito ha scelto il numero 134; qualcuno ha giustificato la scelta dicendo che con 183 studenti la probabilità di trovarne almeno due che siano nati nello stesso giorno dell'anno è 0.5. Chi ha fatto tale precisazione ha utilizzato, per risolvere il problema, la proporzione

$$366 : 1 = x : 0.5$$

ottenendo x = 183 .

La sorpresa è grande quando si fa notare che già con una classe di 23 studenti la probabilità di trovarne almeno due nati nello stesso giorno dell'anno è maggiore di 0.5. Per giustificare quanto affermato basta calcolare la probabilità dell'evento contrario, cioè la probabilità che tutti gli *n* studenti della classe siano nati in giorni diversi. Possiamo procedere così: il primo degli *n* studenti può essere nato in uno qualunque dei 365 giorni dell' anno; il secondo degli *n* studenti può essere nato in uno qualunque dei 364 giorni rimanenti (è sufficiente che non sia nato nello stesso giorno del primo); il terzo studente può essere nato in uno qualunque dei 363 giorni diversi da quelli in cui sono nati il primo e il secondo studente... ; l' *n-esimo* studente può essere nato in uno qualunque dei 365 -(n-1) giorni diversi da quelli in cui sono nati i primi n-1 studenti... Detto *E* l'evento "nessuno degli *n* studenti è nato nello stesso giorno dell' anno" abbiamo che la probabilità di *E* è data da:

$$P(E) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots \cdot (365 - n+1)}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots\ldots \cdot 365}$$

con $0<n<366$

per la regola della probabilità composta per eventi indipendenti.

Quindi la probabilità che almeno due degli *n* studenti siano nati nello stesso giorno dell'anno è data da 1-P(*E*) . Aiutandosi con un foglio elettronico è relativamente semplice costruire una tabella che dia i valori di 1- P(*E*) al variare del numero *n* di studenti: il risultato è sorprendente, dato che, per n = 23, trovare almeno due studenti che hanno lo stesso compleanno è più probabile di ottenere, nel lancio di una moneta non truccata, l'uscita di una delle due facce; mentre per n=80 si ha quasi la certezza di trovare almeno due persone che abbiano lo stesso compleanno.

L'utilizzazione di un modello proporzionale da parte di studenti di scuola media superiore non deve stupire più di tanto, dato che spesso molti problemi che vengono proposti nella scuola media inferiore possono essere risolti con l'ausilio delle proporzioni; è però interessante notare che anche molti insegnanti, se esortati a fornire una risposta immediata (nel senso di non mediata da una fase di calcolo), propendono per il numero più vicino a 183. Forse è ancora di maggiore interesse sottolineare che anche fra Luca Pacioli incorse nello stesso tipo di errore nella risoluzione del *problema delle parti o dei punti*. Questo problema riguarda la suddivisione della posta fra due (o più) giocatori di "ugual valore" (ossia tali che abbiano la stessa probabilità di guadagnare un punto) che sono costretti a interrompere una partita prima che uno dei due giocatori abbia totalizzato il numero di punti necessari a vincere la partita. In riferimento a due giocatori A e B, i dati del problema sono: il numero n di punti che si è stabilito essere necessari per vincere la partita; i numeri a e b di punti che hanno, rispettivamente, A e B al momento dell' interruzione della partita. Tali dati possono essere riassunti con la notazione [n; $a : b$] ove a e b sono numeri naturali minori di n . Nella *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* Pacioli propone il problema [60; 50 : 20], risolvendolo in modo errato: siamo nel 1494. Non si deve supporre che il problema non fosse sufficientemente interessante: all'epoca i giochi d'azzardo, benché proibiti, erano praticati e spesso interrotti dall'intervento dei gendarmi. In tal caso, uno dei giocatori si incaricava di mettere al sicuro l'intera posta e, in seguito, tutti i giocatori si riunivano per dividerla in parti eque. Nonostante l'interesse per il problema e nonostante i tentativi di risoluzione di Cardano, Tartaglia e di Pietro Cataneo, si deve attendere fino alla metà del diciassettesimo secolo per avere una risposta corretta con Pascal e, indipendentemente, con Fermat.

Vediamo ora di utilizzare il modello proporzionale per risolvere il problema [6;5:3], con una posta di 24 danari. Impostiamo la proporzione:

Punteggio totale : punteggio del giocatore A = posta : danari che spettano ad A

ossia, nel nostro caso:

$$8 : 5 = 24 : x$$

da cui si ottiene che, secondo tale modello, un'equa spartizione sarebbe di 15 danari ad A e 9 a B.

Dovrebbe essere evidente che una tale soluzione non è soddisfacente: che cosa accade, infatti, nel caso in cui il gioco venga interrotto sul punteggio di 2 a 0 per A?

$$2 : 2 = x : 24$$

ossia 24 danari ad A e nulla a B !

Il modello proporzionale risulta del tutto inadeguato in questo caso: è evidente che si deve tener conto non solo dei giochi vinti al momento dell'interruzione, ma anche dei giochi mancanti. La soluzione corretta del problema viene raggiunta grazie al calcolo delle probabilità:

sia E_1 l'evento "il giocatore A guadagna un punto";

sia E_2 l'evento "il giocatore B guadagna un punto".

Nell'ipotesi che, al momento dell'interruzione A abbia 5 punti e B 3 e che la partita si giochi al meglio dei 6 punti, la speranza di vittoria di A è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi:

$$E_1 \; ; \; E_2E_1 \; ; \; E_2E_2E_1$$

aventi probabilità che, per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, sono rispettivamente uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. La probabilità che A ha di vincere è quindi data, per la regola sulla probabilità totale per eventi incompatibili, da 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8, per cui un'equa ripartizione dei 24 danari è 21 danari ad A e 3 a B.

Il problema delle buste e la dipendenza dei giudizi di probabilità dalle informazioni su un evento

Abbiamo tre buste all'apparenza indistinguibili; sappiamo che ciascuna di esse contiene due assegni e che le configurazioni possibili possono essere esclusivamente le seguenti:
entrambi gli assegni sono da dieci milioni di lire;
uno dei due assegni è da centomila e l' altro da dieci milioni di lire;
entrambi gli assegni sono da centomila lire.

Facciamo le seguenti operazioni:
(a) estraiamo a caso una busta e da questa uno dei due assegni in essa contenuti;
(b) leggiamo la cifra scritta sull'assegno estratto;
Ci chiediamo qual è la probabilità, nell'ipotesi che l’assegno estratto sia da dieci milioni, che anche l'altro assegno contenuto nella busta estratta sia da dieci milioni di lire.
Presento innanzitutto tre tipi di risposte non corrette, con relativa giustificazione, fornite da insegnanti e studenti; quindi discuto le possibili cause di errore nei differenti approcci alla risoluzione del problema, proponendo due tipi di risoluzione corretta; infine fornisco la risoluzione che fa uso del teorema di Bayes.
I) La maggior parte di studenti e insegnanti a cui ho proposto il quesito afferma che la probabilità è 0.5 giustificando tale affermazione con il fatto che i casi favorevoli sono tre così come i casi sfavorevoli (tre assegni da dieci milioni di lire e tre assegni da centomila lire).
II) Altri insegnanti che hanno risposto 0.5, hanno fornito la seguente giustificazione, senza dubbio più raffinata, anche se non corretta: le tre buste hanno uguale probabilità di essere estratte. Se estraggo un assegno da dieci milioni sono sicuro di non avere in mano la busta contenente i due assegni da centomila lire. Ho quindi due possibilità:
(1) ho estratto la busta contenente i due assegni da dieci milioni di lire;
(2) ho estratto la busta contenente un assegno da dieci milioni e uno da centomila lire.

Poiché le buste hanno la stessa probabilità di essere estratte, la probabilità che anche l'altro assegno sia da dieci milioni di lire è 0.5 .
III) Ecco infine il terzo tipo di risoluzione: l'informazione *l'assegno estratto è da dieci milioni di lire* consente di escludere che la busta scelta a caso contenga due assegni da centomila lire. Lo spazio degli eventi elementari possibili viene quindi modificato rispetto alla situazione iniziale, quando ancora non si è proceduto a effettuare l'operazione (b). La lettura della cifra scritta sull'assegno estratto dà luogo a una nuova situazione in cui vi sono tre soli assegni, di cui due da dieci milioni di lire e uno da centomila lire: due casi favorevoli su tre possibili. La probabilità richiesta è quindi 2/3

situazione iniziale

10 000 000	10 000 000	100 000
10 000 000	100 000	100 000

situazione dopo l'operazione (b)

10 000 000	10 000 000
10 000 000	100 000

con uno dei due assegni da 10 000 000 già estratto.

Ecco alcune ipotesi sulle cause degli errori dei differenti approcci risolutivi.
Chi ha scelto il primo approccio risolutivo sembra ignorare la presenza delle buste, la loro composizione e l'informazione ottenuta con l'operazione (b). In altri termini, se ci chiedessimo qual è la probabilità, scegliendo una busta a caso, di estrarre da essa un assegno da dieci milioni, la risposta corretta sarebbe 0.5; ritenere che tale risposta sia adeguata, senza bisogno di ulteriori considerazioni, anche nel caso in cui si eseguano le tre operazioni (a), (b) vuol dire non tenere nella dovuta considerazione il fatto che il variare dello stato di informazioni che si possiede su un evento o su un insieme di eventi modifica, in generale, il giudizio di probabilità sull'accadere di quell'evento o di quell'insieme di eventi: detto in altri termini, l'estrazione, senza reinserimento, dell'assegno da dieci milioni, ha modificato lo spazio campione degli eventi possibili e di ciò non si può non tenere conto nelle valutazioni di probabilità.
A prima vista può sembrare che chi ha scelto il secondo modo di risoluzione del problema abbia tenuto nel dovuto conto l'informazione data dalla lettura della cifra sull'assegno estratto. Un'analisi più attenta, che fornisce anche un primo modo di risolvere il problema, rivela che l'informazione data dall'operazione (b) non viene utilizzata correttamente. Infatti la probabilità di scegliere una busta con i due assegni

uguali è maggiore della probabilità di scegliere una busta con i due assegni diversi: 2/3 contro 1/3.
Quindi la probabilità di scegliere la busta contenente i due assegni da dieci milioni o la busta con i due assegni da centomila lire è, in totale, 2/3, mentre la possibilità di scegliere la busta con i due assegni diversi è 1/3.
L'operazione (b) ci informa che solo che non abbiamo scelto la busta con i due assegni da centomilalire e, quindi, modifica il nostro giudizio di probabilità relativo all'estrazione di un assegno di un assegno da dieci milioni prima che venissero effettuate le operazioni (a) e (b), ma non può modificare la probabilità che la busta scelta contenga due assegni uguali! Quindi la probabilità che anche l'altro assegno sia da dieci milioni di lire è 2/3. Alcuni insegnanti mi hanno detto di ritenere il risultato paradossale, in quanto, a loro avvsio, l'operazione (b) sembra aver modificato la probabilità che ciascuna busta ha di essere scelta.
Il terzo tipo di risoluzione consente di fornire la valutazione corretta della probabilità richiesta e cerca di tenere conto delle informazioni date dall'operazione (b), ma un semplice controesempio evidenzia la scorrettezza del ragionamento: se alle tre buste ne aggiungiamo una con un assegno da dieci milioni e uno da centomila lire, il terzo approccio risolutivo e la formula di Bayes portano a differenti risultati (rispettivamente 3/5 e 1/2).
L'operazione non lecita, in questo caso, è quella di identificare i possibili assegni rimasti in circolazione con gli eventi elementari possibili e equiprobabili.

Diamo ancora una risoluzione corretta che non fa ricorso al teorema di Bayes: è sufficiente notare che, dopo l'operazione (b), vi sono tre e non due eventi elementari possibili ugualmente probabili e due eventi favorevoli. Infatti, in seguito all'informazione ricevuta con l'operazione (b) gli eventi possibili sono: ho estratto la busta contenente i due assegni da dieci milioni e ho estratto la busta contenenete un assegno da dieci milioni e uno da centomila lire: questi due eventi non sono però equiprobabili, in quanto vi sono due modi distinti di estrarre dalla busta contenente i due assegni da dieci milioni un assegno da dieci milioni, mentre vi è un solo modo di estrarre lo stesso assegno dall'altra busta. Quindi devo prendere in considerazione tre casi possibili (se li voglio equiprobabili) e due favorevoli. La probabilità cercata è, quindi, 2/3.
Si ricorda, per inciso, che D'Alembert nell'edizione del 1754 dell'*Encyclopédie*, alla voce "*Croix ou pile"* incorse in un errore simile, rispondendo a un problema ancora più semplice. Egli affermò che la probabilità di ottenere almeno una volta una testa in due lanci successivi di una moneta non truccata è 2/3, invece di 3/4. D'Alembert considerò come spazio campione {(T,C), (T,T), (C,C)} in luogo di {(T,C), (C,T), (T,T), (C,C)} [3. p. 527].

È interessante notare che ben pochi insegnanti accettano giustificazioni del tipo di quella ora fornita e, in ogni caso, le considerano poco convincenti, in quanto in palese contrasto con il loro approccio al problema; tutti invece si convincono non appena si propone la seguente risoluzione che utilizza il teorema di Bayes.

Siano P(A), P(B), P(C) le probabilità di scegliere, rispettivamente, la busta contenente i due assegni da dieci milioni, la busta contenente un assegno da dieci milioni e uno da centomila lire, la busta contenente i due assegni da centomila lire;

$P(A/10^7)$ la probabilità che anche il secondo assegno sia da dieci milioni di lire nell'ipotesi che la cifra scritta sull'assegno estratto dalla busta scelta a caso sia di dieci milioni;

$P(10^7/A)$ la probabilità che il secondo assegno sia da dieci milioni di lire nell'ipotesi che sia stata scelta la busta contenente due assegni da dieci milioni;

$P(10^7/B)$ la probabilità che il secondo assegno sia da dieci milioni nell'ipotesi che sia stata scelta la busta contenente un assegno da dieci milioni e uno da centomila lire;

$P(10^7/C)$ la probabilità che il secondo assegno sia da dieci milioni nell'ipotesi che sia stata scelta la busta contenente due assegni da centomila lire.

Sotto tali ipotesi abbiamo, per il teorema di Bayes:

$$P(A/10^7) = \frac{P(10^7/A)*P(A)}{P(10^7/A)*P(A)+P(10^7/B)*P(B)+P(10^7/C)*P(C)} = \frac{1*1/3}{1/3+(1/2)*(1/3)+0} = 2/3$$

CONCLUSIONI

Il fatto che la maggior parte degli insegnanti cui ho sottoposto il problema non abbia accettato la prima soluzione e sia invece rimasta soddisfatta dalla risposta ottenuta con l'applicazione del teorema di Bayes dovrebbe indurre a riflettere: per chi insegna matematica l'utilizzazione della formula di Bayes è cosa assolutamente normale, così come la fiducia nelle sue potenzialità per la risoluzione del problema posto. Tutto ciò deriva da un'abitudine al formalismo, acquisita in un lungo e costante esercizio negli anni dell'università e dell'insegnamento; ma da uno studente di un biennio di scuola secondaria superiore si può pretendere altrettanto? Come convincere uno studente che la probabilità richiesta è 2/3 ? Ritengo che non esista una risposta valida in generale a tale quesito, ma mi sembra di poter affermare che proprio la discussione diretta con la classe sulle modalità di risoluzione di un problema di questo tipo possa essere ricca di significative indicazioni per l'insegnante. Si potrebbero proporre varie modalità di approccio alla risoluzione del problema (per esempio la prima soluzione proposta, una verifica empirica diretta fatta su un numero sufficientemente elevato di estrazioni e, infine, la risoluzione con la formula di Bayes) e in seguito discuterne limiti ed efficacia. Sono convinto che un tale lavoro potrebbe

fornire importanti suggerimenti sul peso da attribuire a procedimenti euristici e formali nell'attività didattica.
La questione su quale sia l'approccio didattico più favorevole ad educare al pensiero probabilistico i giovani studenti non è certo di semplice risoluzione; senza entrare nel merito di questioni che sono ancora dibattute a livello teorico e per le quali rimando ai riferimenti bibliografici, mi sembra di poter suggerire, a livello didattico, di non trascurare, tra gli altri possibili, l'approccio soggettivista alla probabilità.

Non sono rari interventi comparsi su riviste per insegnanti di matematica che testimoniano come l'approccio soggettivista alla probabilità sia congeniale agli schemi concettuali degli studenti. Capita, a volte,di andare alla ricerca di motivazioni atte a preparare gli studenti ad accettare modifiche ai loro schemi concettuali, dimenticando che con un approccio differente ai concetti e ai problemi proposti non è necessario richiedere tale sforzo ai discenti. Per esempio, nel caso specifico del problema delle buste, l'approccio soggettivista dovrebbe favorire un'impostazione soddisfacente della soluzione, proprio perché già nella definizione della probabilità sottolinea l'importanza dello stato di informazioni che un soggetto possiede su un evento o su un insieme di eventi.

Riferimenti bibliografici

Per l'esempio relativo al problema dei compleanni:
G. Anichini, *Quanto è probabile avere lo stesso compleanno?*, in Archimede, Gennaio-Marzo 1988, Le Monnier, Firenze pp. 19-28.

Per il paradosso delle buste:
M. Gardner, Ah! Ci sono, Zanichelli, Bologna, 1987

Per le considerazioni sull'utilità di un approccio soggettivista alla probabilità:
N. Cera, *Il concetto di probabilità. Esame dell'evoluzione storica e della sua formalizzazione*, in Induzioni, numero 0, Giardini, Pisa pp.31-37.
B. De Finetti, Teoria della probabilità, vol 1 e vol. 2, Einaudi, Torino, 1970.
R. Scozzafava, *Probabilità soggettiva e grandi rischi*, in Archimede, Gennaio-Marzo, 1988, Le Monnier, Firenze, pp. 30-40.

Per le note di carattere storico:
A.C. Garibaldi, *Sulla preistoria del calcolo delle probabilità*, in Atti del Convegno La Storia delle Matematiche in Italia, Cagliari, 1982, pp.377-384.