Ma esistono gli oggetti della matematica?
Divagazioni di filosofia della matematica

Domingo Paola, Biblioteca di Finale Ligure, 1 Marzo 2004

Prologo

Uno dei più gravi errori di un autore è quello di iniziare una pubblicazione con argomentazioni complesse, difficili o poco chiare. Il prologo dovrebbe essere amichevole e accattivante. A parte queste sei prime righe, incorrerò in questo grave errore. Non so che farci, ma è estremamente difficile dare un'idea del perché si può iniziare a parlare in senso stretto di questioni di filosofia della matematica solo a partire dalla fine dell'Ottocento. Il consiglio che posso dare è quello di saltare il prologo e iniziare a leggere il contributo a partire dal paragrafo 1.

Se, da un lato, è possibile affermare che questioni di filosofia della matematica sono sempre state presenti nella pratica matematica, dall'altro è bene precisare che la filosofia della matematica si struttura e si consolida come campo disciplinare specifico solo verso la fine dell'Ottocento, in particolare con il logico Gottlob Frege, quando si iniziano ad affrontare i problemi che riguardano i fondamenti della matematica e si raggiunge una mole di risultati qualitativi e quantitativi non confrontabile con quanto raggiunto in precedenza.

Correndo l'inevitabile rischio di risultare superficiali, è possibile dire che fino a quel periodo, che va sotto il nome di *crisi dei fondamenti della matematica* (nome assolutamente poco appropriato, visto che si tratta di uno dei periodi più intensi e ricchi di risultati per la ricerca matematica stessa), la ricerca matematica non avverte l'opportunità di riflettere profondamente e radicalmente su se stessa, sugli oggetti e sulle tecniche che la costituiscono. La filosofia che riscontra il maggior successo è quella realistica, il platonismo. Per essa gli oggetti matematici esistono effettivamente, nel mondo delle *Idee*: i matematici sono come geografi dell'invisibile, vagabondi che sono riusciti a liberarsi dalle catene e a volgere gli occhi dove splendono le idee matematiche, gli universali, mentre gli altri uomini continuano a rimanere a osservarne le ombre riflesse sulle pareti delle loro caverne. Ovviamente per i realisti le idee matematiche, in quanto realmente esistenti, sono oggettive; in questo senso il matematico è come un geografo che descrive un territorio, che scopre e non crea. I matematici, per esempio, sembrano poco toccati da una filosofia come il nominalismo, che afferma che gli universali non rappresentano enti reali oggettivi, ma sono semplici parole o nomi. Semmai alcuni di essi sono propensi a sposare l'interpretazione aristotelica del realismo platonico che attribuisce agli oggetti della matematica un'*esistenza astratta*: i numeri non esistono di per sé, ma solo in quanto si riferiscono a qualche particolare entità fisica. Il numero 2 è ciò che rimane quando, da due libri, ho astratto tutte le proprietà fisiche (colore, spessore, parole,…). Nel XVII secolo si fanno largo filosofie razionaliste in matematica, soprattutto con René Descartes. I razionalisti, come Platone, consideravano la facoltà della *ragione* una caratteristica innata della mente umana, mediante la quale si potevano percepire verità a priori, indipendentemente dall'osservazione. Anche in questo caso si tratta di una filosofia essenzialmente realistica, in rapporto agli oggetti della matematica. Il razionalismo fu contestato dal materialismo e dall'empirismo; ma anche molti empiristi, tranne alcune eccezioni eccellenti come Stuart Mill, convenivano che la conoscenza matematica è, in ultima analisi, di tipo analitico e non proviene dall'osservazione. Inoltre la santità e l'assolutezza della conoscenza geometrica rimasero sempre un punto fermo, condiviso da tutti i filosofi: un punto di grande importanza anche per la filosofia kantiana, che propose una sintesi tra le due tradizioni antagoniste, il razionalismo e l'empirismo. La metafisica kantiana può essere vista in stretta continuità con il realismo platonico, ovviamente tenendo conto delle esigenze emerse con il successivo dibattito filosofico. Il giudizio sintetico a priori che Kant introduce proprio come strumento di mediazione tra empirismo e razionalismo e che sembra un ossimoro, trova la sua esemplificazione nelle proposizioni della geometria, certe come quelle analitiche, ma al tempo stesso legate all'esperienza come quelle sintetiche.

La filosofia di Kant costitusce un punto di riferimento di importanza strategica e soddisfa pienamente i matematici, sia per la sua intrinseca continuità con il realismo platonico, sia per l'importanza data alla matematica nella costituzione della conoscenza. Non ci sono motivi per cui la posizione kantiana debba essere messa in discussione: è sensata e dà serenità e tranquillità. Come spesso accade, però, alcune questioni troppo frettolosamente accantonate e alcune sorprese fanno riaffiorare dibattiti e dubbi assopiti: i matematici si trovano in qualche modo costretti a riconsiderare criticamente i fondamenti della loro disciplina e dalla successiva ricerca nascono nuove idee; i risultati sono talmente inattesi che portano a riconsiderare le stesse domande che hanno portato a ottenere quegli stessi risultati. Insomma, la filosofia della matematica nasce e si sviluppa nel periodo dei fondamenti e cambia, alla fine di quel periodo, le domande stesse che le avevano dato vita. È di questo periodo, di quello che va sotto il nome di *crisi dei fondamenti* che vi voglio parlare, anche perché è proprio in questo periodo che si precisa il senso della questione che dà il titolo al mio intervento: *ma esistono gli oggetti matematici*?

1. Perché un quesito sull'esistenza degli oggetti matematici?

In una conferenza tenuta a Oxford negli anni trenta e intitolata *On the Method of Theoretical Physics*, Albert Einstein disse:

Sono convinto che per mezzo di costruzioni puramente matematiche sia possibile scoprire quei concetti che ci danno la chiave per comprendere i fenomeni naturali e i principi che li legano tra loro

era una professione di fiducia nel pensiero formale e nell'attività matematica come strumenti di indagine e di descrizione del mondo che si erano rivelati particolarmente utili quando Einstein, alla ricerca di un adeguato linguaggio per esprimere la teoria della relatività generale, trovò già bella e pronta la geometria riemanniana.

Circa trecento anni prima, nel *Saggiatore*, Galileo Galilei scriveva:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto

queste parole indicavano con grande chiarezza qual era il linguaggio adatto alla descrizione e alla comprensione del mondo; una costruzione razionale del sapere sul mondo non avrebbe potuto essere effettuata senza il ricorso alla matematica.

Il problema è che gli oggetti della matematica non sono direttamente esperibili: chi può affermare di aver mai visto o toccato un punto o una retta o un triangolo? Le teorie matematiche, contrariamente a quelle fisiche, non sono soggette a vincoli esterni; non sono legate ai risultati delle esperienze e degli esperimenti. Una teoria matematica, per essere accettabile, deve garantire esclusivamente vincoli di coerenza logica. È allora sorprendente che la matematica che, per quanto detto, sembra essere solo un prodotto del pensiero, si riveli così adeguata per la descrizione del mondo fenomenico. Chi avrà ragione: coloro i quali sono convinti che gli enti matematici non possano esistere indipendentemente dalla mente umana o chi, invece, pensa che essi possiedano un'esistenza indipendente dal pensiero? Chi ritiene che essi siano solo una creazione dei matematici o chi, invece, afferma che essi sono una scoperta dei matematici? La domanda può apparire oziosa, ma è innegabile che esistono fatti che possono essere portati a sostegno sia dell'una sia dell'altra tesi. Per esempio, esistono teorie matematiche fondate su asserzioni incompatibili con le nostre conoscenze sul mondo: sappiamo che i numeri naturali sono infiniti, ma nel mondo fisico non esiste che un numero finito di componenti elementari. Questo fatto suggerisce che l'esistenza degli oggetti della matematica, così come quella delle opere d'arte, dipenda dal soggetto pensante. D'altra parte è vero che si verifica spesso il caso di matematici di formazione culturale e sociale profondamente diversa, che raggiungono, indipendentemente, gli stessi risultati. Come dice John D. Barrow, è come se *due scrittori diversi producessero due "Amleto" identici* . Tutto ciò suggerisce che gli oggetti della matematica abbiano una qualche base oggettiva, almeno parzialmente indipendente dalla mente umana. In un bel libro, *La ribellione del numero*, Paolo Zellini dà un'interpretazione suggestiva del problema che riguarda l'esistenza degli oggetti della matematica: essi, almeno inizialmente, devono essere considerati come pure creazioni del pensiero, ma con l'andare del tempo, con l'aumentare della complessità delle teorie, sembrerebbero acquisire un'esistenza propria, indipendente dalla mente umana che li aveva generati. Si assisterebbe a una sorta di ribellione di questi oggetti che non obbedirebbero più alle regole che il loro creatore aveva previsto. Vedremo che vi sono buoni motivi per credere che questa sia più di una semplice immagine suggestiva.

Affrontando il problema da un'altra angolazione: da una parte vi è il mondo fenomenico, dall'altro quello delle teorie matematiche; quali relazioni esistono fra questi mondi? La geometria dell'ellisse fu utilizzata da Keplero per descrivere i moti dei pianeti; Einstein utilizzò le geometrie non euclidee per la sua teoria della relatività; Heisenberg applicò la matematica degli spazi di Hilbert per la teoria quantistica e si potrebbero portare molti altri esempi che suggeriscono la fertilità delle idee matematiche per la fisica. D'altra parte vi sono anche casi diametralmente opposti, in cui, cioè, le indagini fisiche hanno suggerito importanti idee matematiche: per esempio la nascita dell'analisi matematica fu dovuta ai tentativi di Newton di risolvere il problema del moto dei corpi; la teoria delle serie di Fourier nacque in seguito agli studi sull'ottica ondulatoria e sulla propagazione del calore.

In altri termini, la domanda che ci poniamo è se l'affermazione di Dedekind (*Noi siamo di razza divina, e possediamo [...] il potere di creare*) corrisponda al vero o se, invece, il matematico, più che un libero creatore non sia altro che un geografo dell'invisibile; e, in questo caso, quale territorio invisibile viene mappato: quello del pensiero, quello di un mondo reale indipendente dal pensiero o, infine, un territorio che è costituito dalle inferenze che la mente compie su un insieme di dati ricavati da osservazioni sul mondo?

2. Presentazione della tesi di fondo della conferenza

Finora ho semplicemente cercato di precisare il senso della domanda implicita nel titolo della conferenza e le risposte fornite non sono il frutto di un'argomentazione, ma si basano esclusivamente sull'esibizione di esempi particolari; è importante, ora, chiarire in che modo si intende procedere per rispondere al quesito. Dirò subito che procederò allo scopo di concludere, mediante opportuna argomentazione, le seguenti tesi:

a) allo stato attuale delle conoscenze, il problema dell'esistenza degli enti matematici non è risolvibile positivamente né negativamente[1];
b) nonostante l'asserzione precedente, il problema dell'esistenza degli oggetti matematici non costituisce un problema per l'attività dei matematici o per quella dei fisici;
c) il dibattito intorno al problema dell'esistenza degli enti matematici ha dato luogo a risultati inattesi, che hanno aperto nuovi orizzonti nell'attività di ricerca matematica.

L'argomentazione verrà condotta partendo dall'analisi di quel periodo che va sotto il nome di "crisi dei fondamenti della matematica", che si è sviluppato intorno ai primi trenta anni del nostro secolo e che, piuttosto che essere considerato un periodo di crisi, deve ritenersi uno dei momenti di maggior fermento nell'attività di ricerca matematica. Si pensi che è proprio in questo periodo che si pongono le basi per lo sviluppo dell'informatica e che si chiariscono le interrelazioni fra logica, matematica e informatica.

La maggior parte dei risultati cui si farà cenno hanno contenuti molto tecnici, poco adatti ad essere presentati al di fuori di un vero e proprio corso sull'argomento; obiettivo di queste note non è certo quello di arrivare, ad esempio, alla dimostrazione del teorema di Gödel, o di costruire le basi per la sua comprensione. L'obiettivo che ci si pone è di costruire, su fatti condivisi dalla grande maggioranza degli specialisti, un'argomentazione che sostenga adeguatamente le tesi cui sopra si è fatto cenno.

La scelta di prestare particolare attenzione alla problematica epistemologica e di affrontare il problema attraverso un'analisi storica della disciplina non è casuale: sono convinto che tale modo di procedere consenta di minimizzare il rischio di incorrere in tesi magari affascinanti, ma particolarmente azzardate. Noi, invece, ci incammineremo su strade più sicure, perché già percorse da molti viaggiatori: spero che il viaggio risulti, in ogni caso, interessante.

3. Un breve cenno alle radici del problema dei fondamenti

Vi sono momenti nella storia di ogni disciplina in cui l'attività di riflessione sulla validità dei risultati raggiunti, sulle loro conseguenze e implicazioni diventa necessaria. I matematici del 1800 dovettero, per esempio, fare i conti con i rudi metodi del calcolo di Newton e Leibniz che poneva questioni di rigore logico non più evitabili. Già nel 1734, quando ormai sia Newton, sia Leibniz erano scomparsi, il vescovo George Berkeley sottoponeva il calcolo di Newton a una rigorosa e impietosa critica. La critica di Berkeley sottolineava come i metodi del calcolo inventati e utilizzati da Newton fossero in palese contraddizione con la matematica e la geometria condivise all'epoca. L'argomentazione di Berkeley può essere esemplificata nel seguente modo: nel calcolo della derivata di $y = x^2$, si considera il rapporto incrementale $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

ove h è un *infinitesimo*, ma, ovviamente, una quantità non nulla (altrimenti come si potrebbe dividere per zero?). Quindi si eseguono i calcoli e si ottiene: $\dfrac{2hx + h^2}{h}$ e, essendo h diverso da zero, $2x + h$

A questo punto si invita a trascurare il termine h, poiché infinitesimo; in tal modo si ottiene che la derivata di $y = x^2$ è $y' = 2x$.

---

1 Si potrebbe dire, seguendo Niels Bohr, che gli asserti sull' esistenza degli enti matematici sono pensieri profondi. Come scrive Enrico Bellone in *Saggio naturalistico sulla conoscenza*, pag. 9, secondo Niels Bohr, *un' espressione chiara può essere pubblicamente controllata in quanto la sua negazione è vera o falsa, mentre un pensiero profondo è tale che la sua negazione è un altro pensiero profondo.*

Tutti noi sappiamo che il risultato è corretto; Newton sapeva che questo modo di procedere gli consentiva di ottenere risultati efficaci; allo stesso tempo come negare validità alla critica di Berkeley che sottolineava come h non potesse essere contemporaneamente diverso da zero (nel momento della semplificazione) e uguale a zero (nel momento in cui veniva trascurato) . Berkeley non accettava l'introduzione nella matematica, regno del rigore logico, di questi infinitesimi, che lui chiamava *ghosts*. Noi sappiamo che per risolvere il problema sollevato da Berkeley c'è voluta la svolta rigoristica dei matematici francesi e tedeschi del 1800, con la costruzione e la precisazione del concetto di limite, che ha avuto appunto lo scopo di conferire rigore ai metodi di derivazione e integrazione utilizzati con successo nell'analisi matematica. L'opera di rigorizzazione prosegue poi con gli studi di Dedekind e Cantor volti alla precisazione del concetto di numero reale, nei termini dei concetti di numero naturale e di insieme di numeri naturali. Proprio il concetto di insieme, che sembrava essere fondante per la matematica, doveva nascondere paradossi che sembravano minare alla base tutta la costruzione della matematica...ma di questo parleremo fra poco.

Parallelamente, nel campo della geometria, si perveniva alla costruzione di sistemi che assumevano, in luogo del quinto postulato di Euclide, o l'inesistenza o la pluralità di parallele condotte da un punto esterno a una retta data e si dimostrava la non contraddittorietà relativa di questi sistemi con la geometria euclidea.

Le profonde trasformazioni che la matematica ebbe nel corso del 1800 - con gli sviluppi dell'algebra, la diffusione delle geometrie non euclidee, i problemi tecnici della teoria degli insiemi - unitamente alla scoperta delle antinomie portarono alla evidenziazione di una serie di questioni fondazionali cui urgeva al più presto dare risposta. Come dice Marco Borga,

" il nucleo delle indagini critiche sui fondamenti, dall'inizio del secolo (ventesimo) agli anni trenta, è costituito dai tentativi posti in atto per liberare la matematica dalle contraddizioni, per restituirle quel fondamento sicuro che si riteneva dovesse possedere e che era stato scosso dalla crisi dei fondamenti".

Ora cercherò di esporre brevemente le soluzioni proposte dalla scuola logicista, da quella intuizionista e da quella formalista al problema dei fondamenti percorrendo un arco di tempo che va dall'inizio del secolo ventesimo al 1931, anno in cui Kurt Gödel enuncia il secondo teorema di incompletezza portando un enorme contributo al problema fondazionale.

4. La scuola logicista: dal programma di Frege alla teoria dei tipi di Russell.

Non si può parlare della scuola logicista senza un doveroso cenno a Gottlob Frege e al suo ambizioso programma.

L'obiettivo di Frege era quello di ridurre i numeri e le loro leggi alla sola logica: in tal senso il suo programma portava alla completa indipendenza della matematica dall'esperienza. In altri termini, come dice Corrado Mangione, Frege "afferma e vuole dimostrare la natura analitica dell'aritmetica; contro, ad esempio, l'allora corrente filosofia kantiana della matematica, secondo la quale i giudizi, le proposizioni della matematica erano sintetici a priori". Secondo Frege l'aritmetica non può fondarsi su nessun termine e su nessun assioma che non sia di natura logica : solo rispettando tale clausola si può aspirare ad una sicurezza fondazionale assoluta, in quanto assoluto è il valore ontologico della logica. Frege introduce il numero naturale per mezzo di due idee puramente logiche: quella di estensione e quella di relazione. È questa la grande scoperta che apre la via alla così detta "logicizzazione" dell'aritmetica.

La concezione di Frege è di tipo platonista; egli stesso afferma:

No. Il matematico non può creare qualcosa ad arbitrio, proprio come non lo può il geografo. Sia l'uno che l'altro possono solo scoprire quel che già esiste, e dargli un nome [ma] come il geografo non crea il mare, mentre ne traccia le coste e mentre dice, per es.- voglio chiamare Mar Giallo la porzione di superficie acquea limitata da queste linee - ; così anche il matematico non può, a rigor di termini, creare nulla con le sue definizioni

Questo non deve far pensare che gli oggetti matematici si presentino a noi come qualcosa di estraneo: essi sono oggetti

che son dati direttamente alla nostra ragione, oggetti che essa può scrutare fin nelle più profonde intimità, poiché le appartengono integralmente. Eppure, malgrado questo loro carattere razionale, anzi proprio a cagione di esso, gli oggetti dell'aritmetica non sono chimere soggettive. Tutt'al contrario: non vi è nulla di più oggettivo che le leggi dell'aritmetica

Proprio per il loro carattere intrinsecamente razionale, i concetti della matematica sono esplorabili, comprensibili, giustificabili, definibili attraverso la logica. La logicizzazione dell'aritmetica vuole fissarne una volta per tutte il vero significato.

La *grande logica* di Frege ha un assetto di tipo assiomatico, con la precisazione di regole di inferenza, con l'esplicitazione dei segni e delle costanti proposizionali (connettivi) e predicative (quantificatori) utilizzati. Gli assiomi devono essere di natura logica e fra essi compare il cosidetto *principio di comprensione* che è un'ulteriore conferma del platonismo di Frege: "ad ogni concetto corrisponde la sua estensione". In altri termini, secondo il principio di comprensione, data una certa proprietà siamo autorizzati a considerare l'estensione di quella proprietà, ossia l'insieme degli elementi che godono della proprietà stessa.

Frege comprendeva la debolezza di tale principio; d'altra parte tutte le proposizioni universali sono deboli dal punto di vista logico: basta un controesempio a refutarle. E il controesempio fu costruito da Bertrand Russell proprio quando la grande opera di Frege veniva consegnata alle stampe. Con un'onestà intellettuale non comune Frege pubblicò nel suo volume la lettera del giovane Russell aggiungendo un'appendice che inizia con le seguenti parole:

A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione. Sono stato messo in questa situazione da una lettera del sig. Bertrand Russell, quando la stampa di questo volume stava per essere finita

Una forma del paradosso di Russell è la seguente:

Si distinguano gli insiemi in <u>normali</u> e <u>non</u> <u>normali</u>. Siano normali gli insiemi che non contengono se stessi come elementi (ad esempio l'insieme dei numeri naturali non è un numero naturale); siano non normali gli insiemi che contengono se stessi come elementi (ad esempio "l' insieme di tutti gli oggetti definibili con undici parole italiane"). Per il principio di comprensione è allora lecito considerare l'insieme E di tutti gli insiemi normali. Il problema è : E è normale o non normale?
Supponiamo che E sia normale. Allora E non si deve contenere come elemento, ma in virtù della sua definizione E appartiene ad E (infatti E è l'insieme di tutti gli insiemi che non si contengono come elementi!) quindi E è non normale. Assurdo! Allora dobbiamo rifiutare l'ipotesi che E sia normale.
Quindi E è non normale. Allora si deve contenere come elemento, cioè E appartiene ad E. In base alla definizione, però, E è l'insieme di tutti gli insiemi che non si contengono come elementi e quindi E (che appartiene ad E) dovrà godere di tale proprietà. Quindi è normale. Di nuovo un assurdo!

Sottolineiamo che l'assurdo si ha se si accetta il principio del terzo escluso, per cui vale (A $\vee$ non (A)).

Conclusione: l'impiego incondizionato della nozione intuitiva cantoriana e fregeana di insieme può condurre a contraddizioni.

Fu lo stesso Russell che, dopo aver determinato il fallimento del programma fregeano, tentò di proseguire il programma di ridurre tutta la matematica alla sola logica. Si trattava di trovare gli opportuni rimedi per evitare quelle contraddizioni presenti nella teoria di Frege.

Secondo Russell

i circoli viziosi in questione nascono dal supporre che una collezione di oggetti possa contenere membri che è possibile definire soltanto per mezzo della collezione stessa presa come un tutto

L'idea di Russell è quella di escludere proposizioni del tipo "x appartiene a x" o " x non appartiene a x". La teoria dei tipi di Russell viene presentata nei tre volumi dei Principia Mathematica scritti in collaborazione con Alfred Whitehead e pubblicati fra il 1910 e il 1913. In essa si afferma che la relazione di appartenenza o di non appartenenza può applicarsi solo fra concetti di tipo differente. In effetti, poiché la teoria dei tipi si proponeva l'obiettivo di eliminare anche antinomie differenti da quella dell'insieme E, Russell appesantì la trattazione introducendo quella che in termine tecnico si chiama teoria dei tipi ramificata. Nonostante gli studi di Russell ebbero una grande influenza sulla logica posteriore, la teoria ramificata dei tipi non ebbe miglior fortuna di quella di Frege, non solo per la pesantezza della trattazione, ma anche perché la natura logica di alcune assunzioni poteva essere messa in discussione. Come afferma Corrado Mangione:

Per quanto nel finito si reiteri la formazione di nuovi tipi, se l'insieme degli individui da cui partiamo è finito si otterranno sempre e solo un numero finito di oggetti del nostro universo del discorso, sicché nel sistema dei Principia non si riuscirebbe a dimostrare nemmeno l'esistenza dei numeri naturali. Per sfuggire a questa fondamentale carenza, Russell e Whitehead, sono costretti ad assumere uno specifico assioma, detto appunto assioma dell'infinito, il quale afferma semplicemente che un tipo qualunque (ad esempio proprio il primo, quello degli individui) contiene infiniti elementi distinti. In questo modo si ottiene il risultato voluto, ma è difficile contrabbandare l'assioma dell'infinito, una proposizione banalmente falsa in ogni universo finito, come una verità logica (cioè, intuitivamente, vera in ogni universo)

5. Brower e la scuola intuizionista

La posizione della scuola intuizionista, che ha in Luitzen Brower il maggior esponente, è diametralmente opposta a quella logicista: Brower (ma già precedentemente Poincaré) rifiuta ogni possibile fondazione della matematica su basi logiche; come dice Sergio Bernini,

le entità della matematica sono costruzioni mentali e l'esistenza di un oggetto matematico altro non è che la reale possibilità che la nostra mente ha, con i suoi mezzi, di costruirlo. La mente, d'altra parte non è esperibile che per introspezione. È solo quindi tramite questa che si può accedere agli enti matematici e alle loro proprietà. Così il grado di affidabilità che per gli intuizionisti va attribuito alle verità matematiche è dell'ordine di quello degli atti di autocoscienza

In queste righe c'è già chiaramente indicato il genere di relazione che lega la matematica alla logica: questa diventa lo strumento per la costruzione di un linguaggio che sia il più adeguato possibile alla comunicazione intersoggettiva dei risultati. La funzione della logica, ben lungi dall'essere fondante, si riduce a quella di mezzo linguistico per descrivere, per comunicare l'attività matematica. Brower sottolineava l'insensatezza del programma logicista, affermando che la logica stessa ha carattere preminentemente matematico:

ad esempio, per capire un sistema di deduzione si deve possedere la nozione di <<iterare un'operazione un numero finito di volte>>, ma questa nozione, riconducibile ai naturali è di ordine matematico, non logico

La differenza tra la matematica intuizionista e quella classica può essere ricondotta, in ultima analisi, alla posizione rispetto alle dimostrazioni di esistenza. La matematica classica accetta ed utilizza come dimostrazione dell'esistenza di un oggetto x la dimostrazione di non(non(esiste x P(x))). La matematica intuizionista richiede, per la dimostrazione dell'esistenza di x una sua costruzione diretta. Per gli intuizionisti non(non(esiste x P(x))) equivale ad affermare solo che "non è impossibile l'esistenza di x", il che è ben diverso dall'esistenza. Ovviamente gli intuizionisti rifiutano le dimostrazioni per assurdo (spesso utilizzate dalla matematica classica), in quanto, in esse, per dimostrare A si dimostra non(non(A)) facendo vedere che non(A) porta un assurdo e poi inferendo che non(non(A)) $\rightarrow$ A: quando A è un teorema esistenziale la dimostrazione per assurdo non fornisce in generale alcun dato per costruire l'oggetto matematico descritto dalla proposizione A. Per tale motivo la dimostrazione per assurdo è considerata dagli intuizionisti inutilizzabile. Anche il principio del terzo escluso viene fortemente criticato da Brower: affermare (A $\vee$ non(A)) significa avere una procedura di decisione che consenta di verificare o A o non (A) e ciò contrasta con l'esistenza di problemi matematici che ancora non si sanno risolvere.

La matematica intuizionista viene poi fondata e costruita sui due seguenti principi:

a) *la nozione di successione dei numeri naturali è un prodotto dell'intelletto umano a partire dall'intuizione primordiale del tempo;*
b) *i numeri naturali, e le entità matematiche in genere, non esistono indipendentemente dalle loro costruzioni mentali.*

La scuola intuizionista, in definitiva, sottopone a una profonda critica la matematica classica: l'uso acritico dell'infinito; il principio del terzo escluso; le tabelle di verità dei connettivi logici; la credenza che esistano proposizioni vere o false indipendentemente dal pensiero umano; l'uso degli assiomi esistenziali... Le conseguenze di questa critica radicale portano ad una matematica profondamente differente; nonostante ciò, soprattutto per merito di un allievo di Brower, Heyting, si sono trovati termini di confronto non banale tra i risultati della matematica classica e quelli della matematica intuizionista.

Come afferma Marco Borga,

tanto il logicismo quanto l'intuizionismo non incontrarono il favore dei matematici, il primo per l'eccessiva complessità tecnica della soluzione proposta e per alcune ambiguità di fondo che caratterizzavano le sue tesi, il secondo perché i matematici non erano disposti a rimettere in discussione così radicalmente l'assetto della loro disciplina. Restava il formalismo hilbertiano, che da un lato rappresentava il coronamento dell'evoluzione ottocentesca del metodo assiomatico, dall'altro appariva meno fuorviante rispetto alla pratica matematica allora corrente

6. La scuola formalista e il programma di Hilbert

Se per Frege il problema era quello di definire i vari enti matematici partendo dai principi della logica; se per Brower il problema era quello di costruire a partire da una ben determinata intuizione gli oggetti della matematica; per Hilbert e la scuola formalista non esiste, o meglio non ha senso parlare di un contenuto specifico, di un'intuizione fondamentale. Si tratta, invece, di costruire una rete che collega enunciati ad enunciati, teorie a teorie: sono le teorie, i sistemi formali le unità del discorso matematico, non i concetti o i costrutti (come, rispettivamente, per i logicisti e per gli intuizionisti). Vista da quest'aspetto la problematica fondazionale acquista il significato di un dibattito sul problema dell'esistenza degli enti matematici. Riguardo a tale problema, la contrapposizione tra formalisti e intuizionisti è evidente e netta: ma non meno netta, seppur meno evidente è la contrapposizione tra formalisti e logicisti. Basta leggere le parole di Frege:

A rigore, solo dimostrando che sotto un concetto cade qualche oggetto, si prova che tale concetto non è contraddittorio. La pretesa inversa (di ricavare l'esistenza di qualche oggetto dal carattere non contraddittorio di un concetto) è un errore [...] Chi condivide tale punto di vista attribuisce a se stesso un potere divino, ritenendo di poter creare, con la sola parola, ciò di cui ha bisogno

e ancora:

attribuisco il nome di assiomi a proposizioni che sono vere, ma che non vengono dimostrate perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale.Il fatto che gli assiomi sono veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono fra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione

e la risposta di Hilbert:

Da quando ho cominciato a riflettere, scrivere e tenere conferenze su quest'argomento, ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di questi assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza". Per Hilbert fondare la matematica, quindi, significa fondare le singole teorie e questo, a sua volta, significa dimostrare la loro non contraddittorietà: il problema della coerenza dei sistemi formali è quindi centrale per la scuola formalista

Come dice Corrado Mangione,

il formalismo hilbertiano non individua un rapporto di priorità fra logica e matematica, ma ne considera uno sviluppo parallelo, nel senso che la traduzione formale di una teoria matematica deve contemplare l'una accanto all'altro, esplicitamente presentati, la componente specificamente matematica e l'apparato logico deduttivo

Il problema della scuola formalista si riduce, quindi, a quello di trovare una dimostrazione di non contraddittorietà per le teorie matematiche. I primi risultati sono incoraggianti: era già noto il risultato di coerenza relativa fra geometrie euclidee e non euclidee; nel 1899 Hilbert riesce a dimostrare che la geometria euclidea è coerente se e solo lo è l'analisi matematica (la geometria euclidea può essere "immersa" nel piano cartesiano dove i punti sono coppie di numeri reali!). Nel 1900 Hilbert tracciò esplicitamente il suo programma : dimostrare la coerenza assoluta dell'aritmetica e poi, attraverso tale risultato dimostrare la coerenza della geometria e, quindi, dell'analisi. Per avere un'idea dei problemi che quest' intento comportava, seguiamo quanto scrive Marco Borga:

Per far questo, una volta data una precisa caratterizzazione matematica del concetto di dimostrazione, il che richiede un'appropriata formalizzazione della teoria, occorre mostrare che è impossibile dimostrare una proposizione e la sua negazione [...]. Per conseguire tale obiettivo, d'altra parte, è chiaro che si devono presupporre delle tecniche dimostrative con le quali operare a livello metateorico. Proprio la scelta di tali tecniche costituisce in un certo senso il problema più delicato, dato che il risultato di non contraddittorietà, eventualmente conseguito, dipende dall'affidabilità di queste

Hilbert propose l'uso dei così detti metodi finitisti che, in senso molto generale, possono essere individuati in un sottoinsieme dei metodi utilizzati dall'aritmetica e che vengono descritti in modo più preciso dalle parole di Herbrand:

[...] si tratta sempre solo con un numero finito e determinato di oggetti e funzioni; queste sono ben definite, permettendo la loro definizione il calcolo univoco dei loro valori; non si afferma mai l'esistenza di un oggetto senza indicare come costruirlo; non si considera mai l'insieme di tutti gli oggetti x di una totalità infinita; e quando si dice che un ragionamento (o un teorema) vale per tutti questi x, questo significa che per ogni x particolare è possibile ripetere il ragionamento generale in questione, che deve quindi essere considerato solo come il prototipo di questi ragionamenti particolari

Se si considera una dimostrazione come una successione finita di formule in cui il termine finale è la formula da dimostrare e i termini intermedi sono assiomi o formule già dimostrate, allora le dimostrazioni stesse diventano oggetti matematici e possono venir studiate da un'apposita teoria: la teoria della dimostrazione. La fondazione cessa quindi di essere una ricostruzione entro un sistema unico di tutta la matematica; il problema fondazionale si trasforma nello studio delle varie teorie formalizzate e precisamente nella dimostrazione della loro consistenza. Il nucleo dall'approccio formalista sta, inoltre, nella distinzione tra linguaggio oggetto (quello delle teorie) e metalinguaggio (quello della matematica finitista in cui si individuano i metodi per dimostrare la consistenza delle teorie).

L'idea di Hilbert, per dimostrare la consistenza di un sistema formale per l'aritmetica, chiamiamolo ARI, è la seguente:

a) *si tratta di dimostrare che in ARI non è possibile derivare ((A) /\ non(A));*
b) *dalla logica proposizionale è noto che ((A) /\ non(A)) → (B) con (B) formula qualunque;*
c) *da ((A) /\ non(A)) e da b) segue, per modus ponens, (B), ossia in un sistema incoerente è possibile dimostrare qualunque formula;*
d) *il problema della non contraddittorietà, per quanto detto in c), si può quindi ricondurre al problema di dimostrare che in ARI esiste almeno una formula non dimostrabile (ad esempio* 1=0*).*

Il programma di Hilbert, nonostante le grandi speranze, era destinato a fallire: nel 1931 Kurt Gödel enuncia il secondo teorema di incompletezza che afferma l'impossibilità di dimostrare la coerenza dell'aritmetica con metodi finitisti.

I matematici continuano a lavorare anche dopo Gödel e, se possibile, più e meglio di prima: prendono idee e spunti dalle varie scuole che così diventano pressoché indistinguibili nella prassi matematica, tanto che un formalista come Von Neumann sembra più intuizionista di un intuizionista come Heyting e viceversa.

Il problema dei fondamenti posto dalle varie scuole con estrema chiarezza si risolve, come spesso accade, senza vinti né vincitori: gli enti matematici, qualunque cosa essi siano o non siano rispondono in modo diverso da quanto ci si aspettava. Chi pensava di poter ridurre la matematica in un territorio ben delineato, dai confini rassicuranti deve ritrarsi: fortunatamente gli oggetti matematici si rivelano ricchi di sorprese e dico fortunatamente, perché se è vero che sono oggetti costruiti dal nostro pensiero si può congetturare una sorta di inesauribile creatività del pensiero umano... e non è poco!

Per quanto riguarda il dibattito sull'esistenza degli enti matematici, che ha caratterizzato così profondamente il periodo della crisi dei fondamenti della matematica, il migliore commento è una "favoletta" di un logico, Bas Van Frassen:

C'erano una volta due mondi possibili, Oz e Id. Questi mondi erano molto simili, e, per la verità, molto simili al nostro mondo. In particolare i loro abitanti avevano elaborato esattamente la matematica e la logica matematica che noi abbiamo oggi. Le differenze principali erano due: in Oz gli insiemi esistevano veramente, mentre in Id non esisteva alcun ente astratto; tuttavia in Id i matematici e i filosofi erano quasi universalmente platonici, mentre in Oz essi rifiutavano, quasi universalmente, di credere che esistessero enti astratti.
E vissero tutti felici e contenti

7. Fino a Gödel (cenni).

Elenco alcuni importanti risultati in prospettiva fondazionale ottenuti prima del secondo teorema di incompletezza di Gödel. In seguito voglio tentare di tracciare le linee generali dello spirito della dimostrazione del secondo teorema di incompletezza di Gödel.

1915: teorema di Lowenheim-Skolem che dice che, se un insieme di formule della logica dei predicati del primo ordine ha un modello, allora ha un modello numerabile (per modello si intende una struttura costituita da un insieme non vuoto D detto dominio, e da un'interpretazione dei termini e dei predicati del linguaggio in D, ossia una specificazione dell'elemento di D designato da ogni termine e della proprietà di [o relazione tra] elementi di D designata da ogni predicato). Il teorema di Lowenheim-Skolem ci dice che le teorie non sono categoriche, ossia non riescono a caratterizzare univocamente gli oggetti di cui si vorrebbe parlare. Per fare un esempio: si conoscevano già insiemi non numerabili e teorie su di essi (i numeri reali): per gli assiomi di tali teorie abbiamo modelli diversi da quelli che intendevamo.

1920: Post dimostra la decidibilità, la validità, la completezza semantica e la consistenza del calcolo proposizionale.
Per decidibilità del calcolo proposizionale si intende che esiste un metodo completamente meccanico per decidere in un numero finito di passi se una qualunque formula del calcolo proposizionale è o no un teorema.
Per validità si vuole intendere che ogni teorema del calcolo proposizionale (ogni formula derivata dagli assiomi mediante l'applicazione delle regole di inferenza) è una tautologia.
Per completezza semantica si intende che ogni tautologia è un teorema. In altri termini, a livello di calcolo proposizionale verità e dimostrabilità coincidono, sono equivalenti.
Per consistenza si intende che nel calolo proposizionale si può dimostrare che non è possibile derivare (A /\ non (A)).

1930: Gödel dimostra la completezza semantica del calcolo dei predicati (nel 1936 Church dimostrerà che la logica dei predicati del primo ordine è indecidibile) che risulta godere, infine, delle proprietà di coerenza,validità, completezza, ma non di decidibilità.
Infine , nel 1931, Gödel dimostra il primo e il secondo teorema di incompletezza per l'aritmetica su cui ora ci soffermeremo.

Prima di procedere si noti che prima del 1931 il solo teorema di Skolem sembrava minare alla base il programma di Hilbert. Gli altri si potevano considerare risultati più che confortanti.
L'idea di Gödel è quella di utilizzare una proposizione analoga a quella del *mentitore* ("Questa proposizione è falsa"): in particolare fa vedere che il potere espressivo del sistema formale dell'aritmetica è tale da rendere esprimibile l'enunciato che denoteremo con G:

Questo enunciato non è dimostrabile

In effetti Gödel fa qualcosa di più (in questo qualcosa sta l'originalità del suo approccio al problema della completezza dell'aritmetica): riesce a costruire un codice che consente di esprimere enunciati tipo G in termini puramente aritmetici. Un esempio, tratto dal libro "La matematica nella realtà", vol 3 di Emma Castelnuovo, Gori Giorgi e Valenti chiarirà meglio quanto ora accennato.
Si dimostra che espressioni aritmetiche hanno la potenza del numerabile e che quindi si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali (possono, cioè, essere contate). Gödel scrive quindi un elenco formato da vari simboli aritmetici e a ciascuno di tali simboli associa un numero, ad esempio così:

simbolo	numero	simbolo	numero
=	1	6	12
+	2	7	13
-	3	8	14
:	4	9	15
x	5	a	16
0	6	b	17
1	7	c	18
2	8	d	19
3	9	e	20
4	10	f	21
5	11	……	……

Secondo tale codice, all'espressione aritmetica 1=1 si può associare il numero 717.
Gödel usa un sistema di traduzione leggermente più complicato che, però, gli consente di risolvere il problema di esprimere le proposizioni dell'aritmetica e sull'aritmetica, e fra queste G, mediante numeri naturali, senza alcuna ambiguità . I numeri di Gödel hanno come base i numeri primi scritti in ordine crescente e come esponente i numeri che corrispondono ai simboli dell'espressione aritmetica considerata.
Così 1 = 1 ha come numero di Gödel $2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^7 = 3 \cdot 10^7$
Per l'unicità della scomposizione in fattori primi si può quindi concludere che a ogni espressione aritmetica è associato il suo numero di Gödel e a ogni numero di Gödel è associata la sua espressione aritmetica. Questo vuol dire che le proprietà e le relazioni sintattiche dell'aritmetica vengono automaticamente trasformate in proprietà e relazioni numeriche, ma non solo: sarà possibile

reinterpretare in questo linguaggio dei numeri di Gödel quelle proposizioni del metalinguaggio che parlano di se stesse.

Ovviamente il codice è completamente arbitrario e può essere costruito allo scopo di ottenere G. Sempre seguendo le indicazioni del testo prima citato, faremo vedere come con un opportuno codice sia possibile ottenere il numero di Gödel che esprime l'enunciato del mentitore.

simbolo	numero
A	1
appartiene	2
360	3

Poniamo adesso in uno stesso insieme tutti i numeri di Gödel che corrispondono ad espressioni false e indichiamo con A quest'insieme. Consideriamo ora l'espressione aritmetica

360 appartiene ad A

e calcoliamone il suo numero di Gödel:

$2^3 * 3^2 * 5^1 = 360$

allora, poiché A contiene tutti i numeri di Gödel che corrispondono a espressioni false, scrivere

360 appartiene ad A

significa affermare che la proposizione numero 360 è falsa. Come visto, però, la proposizione numero 360 è proprio

360 appartiene ad A

Si è espressa, quindi, con simboli aritmetici, la proposizione Q

questa proposizione è falsa

si ritrova, cioè, l'antinomia del mentitore.

Gödel considera, invece, la proposizione G :

G non è dimostrabile

In secondo luogo esprime la formula G nel linguaggio della teoria la quale appunto afferma di se stessa che non è dimostrabile nella teoria. Quindi si dimostra che G non è dimostrabile né refutabile nel sistema dell'aritmetica. Esistono quindi enunciati esprimibili nel sistema ma non dimostrabili nel sistema stesso: ciò equivale all'incompletezza sintattica dell'aritmetica. Si noti che mentre nel caso dell'antinomia del mentitore si utilizzava il principio del terzo escluso (almeno dal punto di vista classico), per cui la proposizione Q deve essere o vera o falsa, nel caso attuale, per la nozione di dimostrabilità non vale il principio del terzo escluso: non è detto che una proposizione debba essere necessariamente dimostrabile o non dimostrabile. Come scrive Corrado Mangione:

Ci si può rendere intuitivamente conto della portata della sostituzione nel discorso relativo all'antinomia del mentitore, della nozione di verità con quella di dimostrabilità; infatti , nel primo caso, ossia per la verità, vale indubbiamente (almeno se si vedono le cose da un punto di vista classico) il terzo escluso, cioè una proposizione (una formula) deve risultare vera o falsa e sappiamo già che questo, applicato ad una proposizione che esprime la sua propria falsità porta ad antinomia, ossia rende contraddittoria la teoria cui quella proposizione appartiene; nel caso della dimostrabilità, invece, non necessariamente deve valere il terzo escluso, proprio perché non è assolutamente detto che una proposizione debba essere necessariamente dimostrabile o non dimostrabile in una teoria non contraddittoria; può benissimo darsi che non sia né l'una né l'altra cosa: la teoria cioè salva per così dire la propria coerenza sacrificando, però, la completezza sintattica. Da questo punto di vista il risultato di Gödel può essere presentato dicendo che una teoria (che naturalmente soddisfi le condizioni del teorema) deve essere incompleta sintatticamente pena la perdita della coerenza

Chiediamoci ora se G è vera o falsa e, per rispondere, seguiamo il seguente ragionamento:
supponiamo che G sia dimostrabile; allora G è falsa. Avremmo una teoria non valida, scorretta, in quanto ci consentirebbe di dimostrare proposizioni false. Supponiamo allora che G non sia dimostrabile; allora G è vera. Abbiamo quindi una proposizione vera nel modello, ma non dimostrabile. La teoria è quindi semanticamente incompleta. Questo risultato di Gödel sottolinea che, in tal caso, i concetti di verità e dimostrazione non sono più equivalenti. Esistono proposizioni vere, ma non dimostrabili nella teoria.

Infine Gödel dimostra il teorema per cui viene spesso citato anche in pubblicazioni di carattere non specialistico. Il primo passo compiuto da Gödel è quello di esprimere nell'aritmetica formalizzata la proposizione metateorica che chiameremo CONS :

l'aritmetica è consistente

In seguito dimostra che:

$$\text{CONS} \longrightarrow G$$

Allora, se CONS (ossia se fosse dimostrabile "l'aritmetica è consistente"), per modus ponens si otterrebbe G. Ma ciò è assurdo per il teorema precedente che ci assicurava che G non è dimostrabile nell'aritmetica.

In conclusione: se l'aritmetica è consistente, è impossibile dimostrarne la consistenza con metodi formalizzabili all'interno della stessa aritmetica. Si noti che ciò vale in generale per tutte le teorie sufficientemente potenti dal punto di vista espressivo da poter formalizzare nei termini del linguaggio oggetto le proposizioni del linguaggio metateorico senza cadere nelle antinomie che derivano dalla confusione tra linguaggio e metalinguaggio.

Si è già detto che il lavoro di Gödel, più che chiudere la problematica sui fondamenti, apre nuovi orizzonti: i matematici non smettono di lavorare in seguito ai risultati di Gödel, ma anzi raggiungono livelli di produttività forse mai toccati prima.

Si può anche dire, con Gabriele Lolli, che da Gödel in poi cambiano le domande: “alle analisi fondazionali filosofiche bisogna sostituire un progetto molto più interessante, quello di capire la matematica. Invece di fondare, bisogna capire (etimologicamente, *prendere, impadronirsi*)”. D’altra parte, poiché il capire, il comprendere è un fenomeno tipicamente intellettuale, nella comprensione della matematica, dovranno intervenire considerazioni sugli aspetti psicologici, ma anche su quelli percettivi, dato che è proprio dall’interazione dei sensi con il mondo che ci circonda che nascono i concetti astratti e quelli matematici in particolare. Dovranno inoltre intervenire considerazioni sugli aspetti linguistici e pratici, legati anche alle tecnologie che si utilizzano per fare matematica, perché l'uso di differenti tecnologie modifica può modificare l'attività matematica e, quindi, gli stessi concetti matematici. Sembra, da quanto detto che nella comprensione dell'attività matematica debbano intervenire competenze e conoscenze che non sono solo matematiche e filosofiche, ma che si collocano nella psicologia, nella linguistica, nella tecnologia, nelle neuroscienze. Ciò rende il percorso di comprensione della matematica una sfida molto complessa: l'analisi dei fondamenti, in questo senso, pur nella sua grandezza e nella sua produttività impressionante, sembra essere eccessivamente parziale e limitata … ma questa è un'altra storia.

Bibliografia ragionata

I libri presentati in questa proposta bibliografica consentono di approfondire e chiarire alcuni degli aspetti affrontati in questa relazione. La scelta è dettata da considerazioni personali, dall'opportunità di consigliare libri facilmente reperibili, ma anche dall'opportunità di consigliare pagine comprensibili a un pubblico di principianti. Ciascuno di questi testi, a sua volta, è fornito di una bibliografia che può consentire ulteriori approfondimenti...buon viaggio!

Ludovico Geymonat (a cura di), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano, vol VI,VII,VIII,IX
È un ottimo manuale di storia del pensiero scientifico: la sezione relativa alla logica è curata da Corrado Mangione e dedica ampio spazio alla problematica fondazionale.

Marco Borga, Dario Palladino, *Oltre il mito della crisi*, Editrice la Scuola, 1997
Che cos'è la filosofia della matematica? Quali sono i suoi rapporti con i fondamenti della matematica? Sono due delle domande alle quali il volume, scritto da due logici di formazione matematica dell'Università di Genova, tenta di dare risposta.

John D. Barrow, *Perché il mondo è matematico?,* Laterza, Bari 1992
Libro tratto da una serie di conferenze tenute da Barrow presso alcune università italiane riguardanti il tema delle relazioni fra la natura e il significato della matematica.

Umberto Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino, 1990
Ottimo manuale di storia della matematica moderna e contemporanea: sintetica e chiara la parte relativa alla problematica fondazionale.

Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Esher, Bach*, Adelphi, Milano, 1984
Una brillante e avvincente trattazione (anche a livello di metafora) del tema riguardante il pensiero e i suoi rapporti con il mondo reale. Particolare attenzione viene data al teorema di Gödel, sia per quel che riguarda gli aspetti tecnici, sia per le implicazioni di carattere epistemologico.

Ballo, Casari, Cellucci, Dalla Chiara, Lolli, Mangione, Mugnai, *9 lezioni di logica*, Muzzio, 1990
Agile manualino di fondamenti di logica, che raccoglie articoli scritti rda logici in occasione di un corso di aggiornamento per insegnanti.

Gabriele Lolli, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, 2002.

Il libro, scritto da uno dei logici più profondi della scuola italiana, presenta le principali correnti della filosofia della matematica che hanno caratterizzato il Novecento. Di non facile lettura, ma estremamente stimolante: una bella sfida intellettuale.

Bertrand Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, 1970
Riflessioni di filosofia della matematica da uno dei principali esponenti della corrente logicista.

Ricordo anche i seguenti quaderni delle scienze che contengono articoli attinenti alle problematiche discusse:
Logica, a cura di Corrado Mangione, quaderno 60
Numeri , Caso e Sequenze, a cura di Roberto Magari, numero 45
Intelligenza artificiale, a cura di Giuseppe O. Longo, numero 25
Matematica e calcolatore, a cura di Gabriele Lolli e Corrado Mangione, numero 14.