DALLE CONGETTURE ALLE DIMOSTRAZIONI.
UNA POSSIBILE CONTINUITÀ COGNITIVA.

Summary

The research that we are carrying out suggests that there is an essential continuity of thought which rules the successful transition from the conjecturing phase to the proving one, through exploration and suitable heuristics. The essential points are the different type of control of the subject with respect to the situation, namely ascending vs. descending and the switching from one to the other. Its main didactic consequence consists of the change that the control provokes on the relationships among geometrical objects. Ours findings are that Cabri géomètre strongly helps the transition from one type of control to the other. In particular we found out the different modalities of dragging are crucial for determining a productive shift to a more 'formal' approach.
In this paper we outline the different modalities of reasoning (paragraph 2) and of *dragging* (paragraph 3) which we observed in processes of problem solving, either in the phases of productions of conjectures, or in the phases of their validation. Then we analyse the protocol of a pair of students which are engaged in solving a geometry problem in Cabri (paragraph 4).

Ferdinando Arzarello, Federica Olivero, Domingo Paola, Ornella Robutti

DALLE CONGETTURE ALLE DIMOSTRAZIONI.
UNA POSSIBILE CONTINUITÀ COGNITIVA.

FERDINANDO ARZARELLO*, FEDERICA OLIVERO*, DOMINGO PAOLA**,
ORNELLA ROBUTTI*

1. INTRODUZIONE

Sia nella pratica matematica, sia nella ricerca didattica si sta assistendo, da qualche tempo, a un rinnovato interesse per il dibattito sul valore della dimostrazione (Balacheff, 1988; AAVV, 1989; Duval, 1991; 1992; Barbin, 1993; Chazan, 1993; Jaffe & Quinn, 1993; Moore, 1994; Brigaglia & Emmer, 1995; Thurston, 1995; Boero, Garuti & Mariotti, 1996; AAVV, 1996; Hanna, 1996; Harel & Sowder, 1996; Simon, 1996; Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; DeVillers & Furinghetti, 1997; Lolli, 1997).

La ricerca italiana sulla didattica della dimostrazione è particolarmente attenta alla riflessione storica ed epistemologica e alla creazione di ambienti di apprendimento di supporto agli studenti che affrontano le discontinuità epistemologiche proprie del passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione (Gallo, 1994; Malara & Gherpelli, 1994; Boero, Garuti & Mariotti, 1996;

---

* Dipartimento di Matematica Università di Torino

**GREMG-Dipartimento di Matematica Università di Genova

Iaderosa, 1996; Bartolini Bussi, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; Furinghetti & Paola, 1997; Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, in stampa; Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, in stampa).

La nostra ricerca si colloca in questo filone e più precisamente si caratterizza per i seguenti punti:

- l'analisi di ambienti di apprendimento che garantiscano agli studenti una sostanziale unità cognitiva dei loro processi di pensiero, a fronte delle discontinuità epistemologiche sopra accennate;
- l'analisi delle difficoltà incontrate dagli alunni nelle varie fasi di esplorazione di una situazione problematica in geometria e di produzione, validazione, comunicazione di congetture e teoremi.

La ricerca coinvolge diversi aspetti:

- di carattere storico-epistemologico, in particolare per quel che riguarda le varie forme della dimostrazione (per convincere, per verificare, per illuminare, per spiegare, per precisare la nozione di conseguenza logica, la dimostrazione come calcolo…);
- di tipo tecnico, soprattutto per quel che riguarda il ruolo che, nella dimostrazione, assumono gli assiomi specifici e i concetti primitivi, i teoremi e le definizioni, ma anche le regole di inferenza;
- di carattere cognitivo, con riferimento alle dinamiche attraverso le quali gli studenti, ma anche gli esperti, pervengono alla costruzione di una dimostrazione (Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, in stampa);

- di tipo sociale, con particolare attenzione al lavoro in piccoli gruppi e alle discussioni matematiche in classe per condividere esperienze e conoscenze fra i diversi componenti della classe (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995).

Inizialmente abbiamo messo a punto un modello per analizzare le diverse fasi dell'approccio a un problema: esplorazione, produzione di congetture, loro validazione e dimostrazione di quelle corrette. Il modello si basa sullo studio dei processi di pensiero che esperti manifestano nella risoluzione di problemi aperti di geometria[1] (Arzarello & Robutti, 1997) ed è descritto in Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti (in stampa) e in Olivero, Paola & Robutti (1998).

Il modello così costruito si è rivelato utile per analizzare anche i processi di risoluzione degli studenti, purché si individuino opportuni mediatori che consentano di disporre di alcune potenzialità che gli esperti mettono in gioco spontaneamente

[1] Abbiamo scelto di utilizzare come ambiente di apprendimento quello della geometria euclidea anche se esistono altri ambienti altrettanto adatti a un approccio alla dimostrazione. La scelta è dettata da una serie di motivazioni fra le quali ricordiamo: la tradizione scolastica italiana, con la quale non si può non fare i conti e che ha sempre considerato la geometria come la via regia per l'approccio alla dimostrazione; l'opportunità di offrire un'alternativa all'insegnamento tradizionale della geometria, nel quale si richiede semplicemente agli studenti di ripetere alcune dimostrazioni effettuate dall'insegnante o presenti sul libro di testo, senza impegnarli in esplorazioni, produzione e validazione di congetture; la consapevolezza che attraverso un percorso di geometria sia possibile recuperare aspetti di grande rilevanza non solo matematica, ma anche storico-culturale; l'opportunità offerta da uno strumento come Cabri, che ha incontrato il favore di studenti e insegnanti e che si propone quindi come uno strumento didattico che merita di essere studiato e sperimentato.

mentre risolvono problemi. Abbiamo individuato uno di tali mediatori nel software Cabri géomètre, (Laborde & Laborde, 1992; Laborde & Capponi, 1994; Laborde, 1995; Boieri, 1996). Rispetto all'ambiente 'carta e matita', Cabri offre la possibilità di manipolare dinamicamente le figure, osservando le trasformazioni che le figure geometriche subiscono quando vengono sottoposte a *dragging*, ossia a trascinamento di alcuni loro punti (Mariotti, 1996): il *dragging* consente spesso agli studenti di compiere esplorazioni confrontabili con quelle che, in genere, gli esperti sono capaci di fare spontaneamente durante la risoluzione di un problema. In questo senso sembra favorire dinamiche di ragionamento di tipo trasformazionale (Simon, 1996).
In questo lavoro, dopo aver accennato alle diverse modalità di ragionamento (paragrafo 2) e di *dragging* (paragrafo 3) che sono state osservate durante la risoluzione di un problema, dalle fasi di produzione di congetture, alle loro successive validazioni, riportiamo l'analisi di un protocollo di una coppia di studenti ai quali è stato posto un problema aperto di geometria da discutere aiutandosi con il software Cabri (paragrafo 4). I due studenti sono stati osservati, durante il lavoro, da uno degli autori (Robutti).

2. MODALITÀ DI RAGIONAMENTO NEI PROCESSI RISOLUTIVI

Come abbiamo già detto, il modello utilizzato per l'analisi dei processi di pensiero, che portano dall'esplorazione di un problema alla formulazione di congetture e alla loro validazione, è descritto in dettaglio in Olivero, Paola & Robutti (1998). Qui di seguito riportiamo, per comodità di lettura, gli elementi del modello secondo i quali è stata condotta l'analisi del protocollo che più avanti presentiamo.

1. Controllo ascendente (Saada-Robert, 1989; Gallo, 1994): si tratta della modalità secondo la quale il risolutore guarda la figura e cerca, fra le sue conoscenze, quella che può essere utilizzata nel caso in questione. In questa fase di controllo il risolutore procede in 'salita', dal disegno come campo di scoperta alla teoria o, meglio, allo spazio delle sue conoscenze.

2. Selezione: si tratta della produzione di una congettura, che segue al processo di esplorazione compiuto durante la fase di controllo ascendente.

3. Abduzione (Peirce, 1960; Magnani, 1997): si tratta di un tipo di ragionamento nel quale, osservando un certo fatto x, si procede a una scelta fra le conoscenze possedute per ottenere da una di esse, diciamo a, e dal fatto x una conclusione c. L'esempio presentato in Peirce (1960) è illuminante per capire che cosa è un'abduzione e in che cosa si distingue sia dalla deduzione che dall'induzione. Supponiamo che osservando dei fagioli si veda che sono bianchi (x) e che si sappia che i fagioli di un certo sacco sono bianchi (a). Un'abduzione, basata sulle informazioni a e x, porta ad affermare che i fagioli osservati provengono da quel sacco (c). Un'induzione sarebbe del tipo da x e c ottengo a; una deduzione sarebbe invece del tipo a e c quindi x. In altri termini, in un'abduzione, il risolutore 'vede di quale regola questo è il caso'.

4. Controllo discendente (Saada-Robert, 1989; Gallo, 1994): si ha quando il risolutore ha già prodotto una congettura nella forma 'se ... allora' e usa le sue conoscenze per validare la congettura

prodotta. Si tratta di una ‘discesa’ dalla teoria, ovvero dallo spazio delle sue conoscenze, al disegno, che diventa di nuovo un campo di esplorazione, questa volta non più per scoprire, bensì per validare.

5. Distanziamento locale: si ha quando il risolutore guarda il prodotto del suo lavoro distaccandosi da esso e produce concatenazioni logiche locali.

6. Distanziamento globale: si ha quando il risolutore organizza le concatenazioni logiche locali in un’unica struttura, ottenendo concatenazioni logiche globali, ossia dimostrazioni vere e proprie. Questo tipo di distanziamento può essere descritto tramite la metafora dell’agente razionale (Balacheff, 1992), che controlla e rilegge tutto ciò che è stato prodotto nei processi di esplorazione, seleziona ciò che risulta significativo ed essenziale per la dimostrazione e, eventualmente, dà luogo a nuove esplorazioni.

Le precedenti modalità si presentano fortemente interrelate nei processi di pensiero che guidano la risoluzione di un problema. L’attività di esplorazione-selezione è presente nell’intero processo di produzione di congetture e di successiva validazione e anche le modalità di controllo (ascendente e discendente) si alternano più volte nei processi risolutivi: tipicamente si passa, mediante abduzioni, da un controllo ascendente a uno discendente. Questa transizione modifica significativamente le relazioni tra gli oggetti geometrici in gioco, sia nel modo in cui vengono ‘disegnati’, sia nel modo con cui sono ‘visti’ dal soggetto. L’attività di abduzione prepara la formulazione delle congetture nella forma logica condizionale (‘se ... allora’) ed è quindi quanto mai importante per l’attività dimostrativa.

Il distanziamento del soggetto evidenzia il passaggio dalla modalità abduttiva a quella deduttiva e quindi segnala il passaggio dal controllo ascendente a quello discendente (sul singolo enunciato o su numerose concatenazioni di enunciati a seconda che si tratti, rispettivamente, di un distanziamento locale o globale). Successivamente alla fase di distanziamento si possono osservare nuove esplorazioni (finalizzate alla verifica delle congetture formulate). Ciò testimonia un ritorno a un tipo di controllo ascendente, ma a un livello più delimitato e sempre supportato dall'azione dell'agente razionale, che continua a controllare globalmente la situazione secondo la modalità di controllo discendente.

In queste dinamiche di pensiero, il punto più delicato è il passaggio da una modalità di controllo ascendente a una di controllo discendente; nei casi che abbiamo studiato la transizione è guidata dall'abduzione: mediante questo passaggio il soggetto riesce a dominare i prodotti finali dell'attività risolutiva. Tutto ciò ci appare particolarmente intrigante, perché suggerisce l'esistenza di una continuità cognitiva fra congettura e dimostrazione, che si contrappone alla innegabile discontinuità epistemologica.

3. MODALITÀ DI DRAGGING IN CABRI

Elenchiamo qui di seguito le diverse modalità di *dragging* che abbiamo osservato nelle sperimentazioni che da due anni stiamo seguendo in diverse classi di biennio di scuola secondaria superiore, rimandando a Olivero, Paola & Robutti (1998) per ulteriori precisazioni.

- *Dragging test*: è la prova del trascinamento effettuata per vedere se la figura disegnata mantiene quelle proprietà geometriche che le si volevano attribuire.
- *Wandering dragging*: consiste nel trascinare a caso i componenti della figura, per scoprire eventuali regolarità, invarianti, proprietà.
- *Lieu muet*[2] *dragging*: consiste nel trascinare un punto della figura lungo una traiettoria privilegiata, costruita empiricamente mediante l'interazione percettiva tra figure sullo schermo e movimenti del mouse, in modo da conservare una certa proprietà o regolarità.
- *Line dragging*: consiste nel segnare i punti che mantengono una proprietà della figura; con il *line dragging* il *lieu muet* diventa esplicito a livello visivo, soprattutto se il luogo può essere costruito in Cabri.
- *Link dragging*: consiste nel vincolare un punto a un oggetto (ad esempio quello del *line dragging*, ove possibile) muovendo poi il punto sull'oggetto.
- *Bound dragging*: consiste nel trascinare un punto che è già vincolato a un oggetto.

Può essere significativo accennare ancora alle relazioni tra le modalità di dragging in Cabri e le modalità di ragionamento nei processi risolutivi descritte nel precedente paragrafo.

Il *dragging test* è usato come strumento di validazione di una costruzione o di una congettura. Esso evidenzia un controllo di tipo

---

[2] L'aggettivo già presente in letteratura è "mou" (Laborde, 1995) che significa informe. Noi abbiamo preferito sostituirlo con "muet" (muto) perché ci sembra che renda meglio l'idea di un cammino che non dichiara esplicitamente dove e come prosegue.

discendente. Il *wandering dragging* costituisce uno strumento di scoperta e di esplorazione e, come tale, si inserisce in un contesto di controllo ascendente. Il *lieu muet dragging* agisce sia come produttore di nuove scoperte e nuovi ragionamenti euristici, sia come riorganizzatore logico delle precedenti esplorazioni. Esprime un'abduzione a livello figurale e percettivo: il luogo tracciato è 'la regola' di cui la figura con la proprietà individuata è il caso. Si tratta di una delle attività che testimoniano il passaggio dalla modalità di controllo ascendente a quella di controllo discendente. Il *line dragging* si osserva in genere come prosecuzione della precedente modalità, perché, scoperta una proprietà, lo si usa per rendere percettibile il luogo, che non è più muto. Testimonia anch'esso il passaggio dal controllo ascendente a quello discendente. Il *link dragging* può essere utilizzato per scoprire proprietà. Nel caso in cui il *lieu muet* sia un luogo che si può costruire in Cabri (circonferenza o retta), una volta che lo si è scoperto attraverso il *line dragging*, si può utilizzare il *link dragging* come validazione della propria congettura: vincolando il punto a quella retta o circonferenza e muovendolo su di essa, la figura deve conservare la proprietà o regolarità congetturata. Il *bound dragging* esprime un tipo di controllo ascendente (una sorta di *wandering dragging* in cui il punto si muove su una curva anziché su tutto il piano), per esplorare una situazione e selezionare congetture.

4. ANALISI DI UN PROTOCOLLO

Utilizziamo gli elementi teorici accennati nei paragrafi 2 e 3 per presentare l'analisi di un protocollo di due studenti di una seconda liceo scientifico (sperimentazione PNI) impegnati nella seguente proposta di lavoro[3] .

QUADRILATERI E CIRCONFERENZE

Situazione

Siano date due circonferenze c e c' con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su c e c'.

Proposta di lavoro

1) Che relazione c'è tra i punti D, B ed E?
2) Quali relazioni ci sono tra i segmenti DE e OO'?
3) Che tipo di quadrilatero è DOO'E?
4) Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

- Leggete attentamente il testo del problema.
- Esplorate la situazione in Cabri, usando i colori verde e rosso per gli oggetti che corrispondono alle informazioni e agli obiettivi del problema.
- Quali scoperte avete fatto in Cabri?
- Scrivetele sotto forma di congetture, usando un linguaggio matematico preciso.

---

[3] L'attività di ogni proposta di lavoro si articola in genere nelle tre seguenti fasi: lavoro a coppie in Cabri; discussione in classe sulle scoperte e successiva sistematizzazione da parte dell'insegnante; dimostrazione delle congetture in ambiente carta e matita (lavoro a casa).
Il ruolo dell'insegnante è particolarmente delicato, soprattutto nella prima fase, quando deve incoraggiare e motivare all'attività di ricerca, interagendo con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l'attività degli studenti. Al termine del lavoro in laboratorio (che puó richiedere una o due ore), l'insegnante raccoglie tutte le schede e qualunque altro materiale utilizzato per la produzione dei risultati. La seconda fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995) consiste nell'interazione del gruppo-classe orchestrata dall'insegnante e richiede in genere un'ora.

Riportiamo le strategie risolutive osservate, contestualmente all'analisi del protocollo. Le parole degli studenti (Fabio e Andrea) compaiono in corsivo, mentre osservazioni (O) e commenti (C) in tondo.

FASE 1.
(O) Gli studenti iniziano a disegnare le circonferenze (mediante la costruzione 'Circonferenza centro-punto') e mettono i nomi.

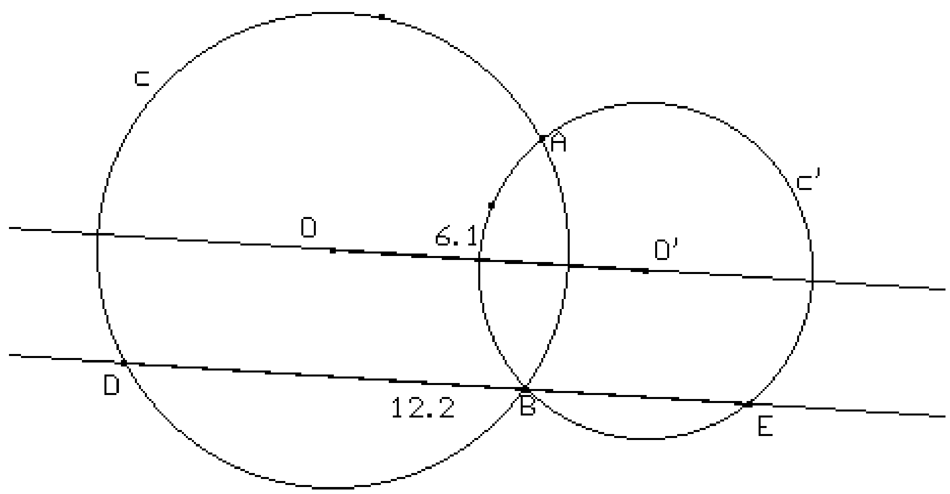


Figura 1

Leggono il testo, ma non tutto in una volta.
FABIO- *Punti diametralmente opposti*.
(O) Ora disegnano i simmetrici di A.
ANDREA- *D, B, E come sono questi punti?*
FABIO- *Sono allineati.*
(O) Gli studenti disegnano la retta DB e provano a muovere segmenti e circonferenze.
ANDREA - *Sono allineati. Va bene?*
FABIO - *OO' e DE sono paralleli. Controlla*.
(O) Ora costruiscono la parallela per verificare.
FABIO - *Misura.*
(O) Misurano i segmenti.
ANDREA - *Secondo me è 1/3, ... 2/3,... doppio*.
(O) Stanno usando il trascinamento in Cabri e, contemporaneamente, cercano di osservare che cosa succede.

(C) La congettura dell'allineamento dei tre punti D, E, B viene in un primo tempo selezionata, tramite il wandering dragging e, successivamente, viene provata dalla costruzione della retta per D e per B che si vede passare per E in qualunque caso. Il parallelismo di OO' e DE viene controllato dalla costruzione della parallela.

Per quel che riguarda la relazione tra le misure di OO' e DE, è il wandering dragging che, unito alla misura, consente di selezionare la congettura e di accettarla. In questo caso prima della relazione corretta c'è l'anticipazione del rapporto dei due segmenti (*Secondo me è 1/3, ... 2/3...*), in seguito modificata dalla lettura delle misure sullo schermo, (*doppio*).

La fase di ricerca ed esplorazione e quella di selezione di congetture sono caratterizzate da un controllo ascendente che consente ai ragazzi di trovare i primi risultati della loro indagine.

FASE 2.
(O) Muovendo il punto (distinto dal centro) utilizzato per costruire la circonferenza centro-punto, si accorgono che OO’ non varia.
FABIO - *Solo se muovi O cambia. Facciamo finta che le circonferenze siano concentriche.*
(O) Muovono il punto sulla circonferenza e modificano la dimensione della circonferenza.
FABIO - *Aspetta. Ho trovato un trucco. Dammi la perpendicolare* [per O a OO’]. *Il problema è questo. Può essere o un trapezio o un parallelogramma. Bisogna scoprire quando è un parallelogramma e quando è un trapezio.*
ANDREA - *Comunque è un trapezio.*
FABIO - *Hai ragione. Con un angolo ottuso.*
(O) Non disegnano i lati obliqui e muovono fino a fare diventare il trapezio un segmento.
FABIO - *Intanto colora queste cose.*
(O) Colorano una circonferenza in rosso e una in verde e rispondono alle domande 1 e 2.
ANDREA - *Sono paralleli e OO’ = ½ DE.*
(O) Ottengono circonferenze con raggi uguali.
FABIO - *Questo è isoscele perché le circonferenze sono uguali. Il raggio è uguale.*
(O) Ora rispondono sulla scheda.
ANDREA - *È quasi sempre un trapezio tranne quando le circonferenze sono coincidenti. In questo caso è un segmento unico.*
(O) FABIO trascina e ANDREA scrive.
ANDREA - *È un trapezio rettangolo se la perpendicolare a ED passa per O. Se le circonferenze sono tangenti allora è un segmento. Prendiamo la situazione iniziale. La dimostrazione è facilissima.*

(C) Sembra di poter dire che, anche senza ancora aver disegnato due lati del quadrilatero, i ragazzi lo vedono nella loro mente e sfruttano il risultato della fase precedente (parallelismo) per anticipare che si tratta di un trapezio o di un parallelogramma. Lavorando in modalità di *wandering dragging* si accorgono che non può trattarsi di un parallelogramma. A tal punto selezionano la loro congettura (*Comunque è un trapezio*).

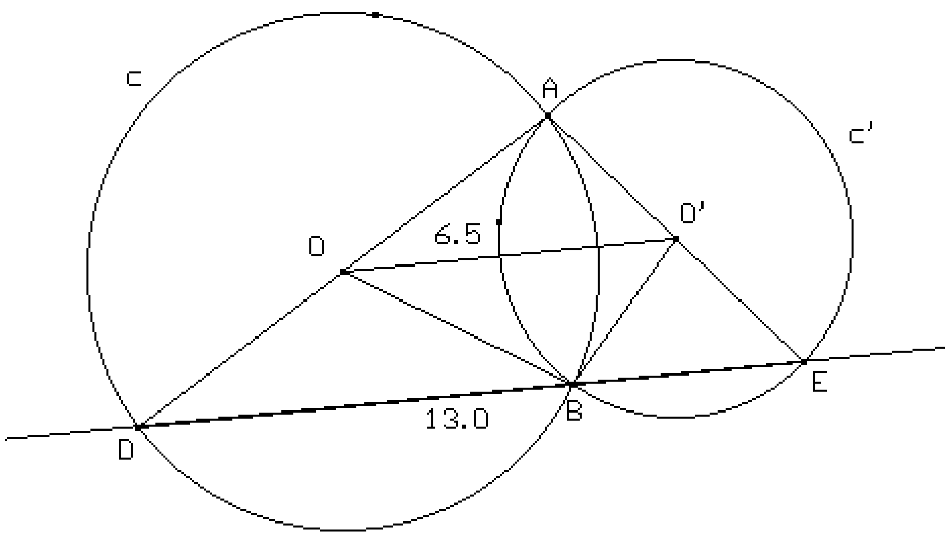
Immediatamente dopo si assiste a un distanziamento dalla congettura (*Hai ragione*) che consente di guardare l'oggetto (il quadrilatero) in un nuovo modo (*Con un angolo ottuso*). I ragazzi utilizzano il colore per distinguere diversi elementi della figura (*Intanto colora queste cose*): questa attività, insieme al mettere nomi a punti e rette, consente di migliorare l'aspetto della figura, per entrare meglio nel problema, quindi non si tratta di un'attività inutile. Tramite il *wandering dragging* scoprono anche il caso limite della figura (un segmento). In questa fase il controllo è ancora ascendente; diventa discendente quando rivedono il disegno alla luce delle congetture precedenti (durante la compilazione delle schede) e le ripercorrono velocemente.

Intanto scoprono anche il caso del trapezio isoscele. Avviene un'abduzione nel momento in cui richiamano alla loro mente la definizione di trapezio isoscele (*lati uguali*) e una concatenazione logica a livello locale (*Questo è isoscele perché le circonferenze sono uguali. Il raggio é uguale.*)

La concatenazione logica precedente viene inserita in un'altra più ampia nel momento in cui gli studenti compilano la scheda: l'agente razionale mette insieme i pezzi del lavoro in una struttura più completa (*È quasi sempre un trapezio tranne quando le circonferenze sono coincidenti. In questo caso è un segmento unico*).

Viene anche aggiunta un'altra concatenazione logica a livello locale (*È un trapezio rettangolo se la perpendicolare a ED passa per O*) dopo un distanziamento da una congettura anticipata qualche minuto prima (*Dammi la perpendicolare* [per O a OO'].)

FASE 3.
(O) Tracciano il triangolo ADE, così viene disegnato anche il



trapezio.

Figura 2

FABIO - *Poi questo è la metà del segmento per un certo teorema di Euclide, mi sembra.*
ANDREA - *Perché secondo te non varia OO' se vari il raggio?* [muovendo il punto].
FABIO - *Perché è sempre punto medio* [O, di AD]. *Cancelliamo un po'. No, ci serve. Perché sono allineati? Questo è un problema.*
(O) Chiedono a un altro gruppo.
FABIO - *Avete dimostrato perché sono allineati? Boh.*

ANDREA - *B appartiene alla bisettrice. Ma solo in questo caso.*
(O) Chiedono all'insegnante.
FABIO - *L'altezza del triangolo passa per questo punto?* [B] *Come si fa a dimostrare che un punto appartiene a una retta in genere?*
(O) FABIO prova a tracciare OB e BO'. Muove O'
FABIO - *Abbiamo scoperto che <OAO' = <OBO' e che AO'=BO' perché sono raggi. Tutti i lati sono uguali. I triangoli OAO' e OBO' sono uguali. Ce l'ho fatta. ODB è isoscele. BO'E è isoscele. La somma degli angoli interni del triangolo ADE è 180°. Allora l'angolo <DBE =180° perché composto da angoli uguali ad ADE.*

(C) Senza interrompere l'attività e senza passare all'ambiente carta e matita, i ragazzi usano il *Cabri-disegno* per avviare la dimostrazione che i tre punti sono allineati. Ricorrono ora ai lati obliqui del trapezio, visti però come parte dei lati del triangolo ADE, li disegnano e osservano la figura globalmente. Iniziano con un'abduzione (*un certo teorema di Euclide*), proseguono con un controllo discendente dei risultati precedenti; si chiedono come dimostrare l'appartenenza di un punto a una retta (*in genere*), cioè cercano una giustificazione globale del risultato.

Uno dei due studenti inizia poi una rapida serie di concatenazioni logiche basandosi sul *Cabri-disegno* e dimostra l'allineamento dei tre punti (*AO'=BO' perché sono raggi* ..) ottenendo una concatenazione logica globale, ossia la dimostrazione (*Allora l'angolo <DBE =180° perché composto da angoli uguali ad ADE*).

In questa attività vediamo che gli studenti dimostrano direttamente in Cabri le congetture fatte. La cosa importante da sottolineare è che questa dimostrazione non fa parte del contratto didattico e non è richiesta sulla scheda della proposta di lavoro. Gli studenti riescono a pervenire a una congettura di cui si sentono sicuri, perché l'hanno validata con il *dragging*, e, nonostante ciò (o forse proprio per questo), sentono anche l'esigenza di dimostrarla, senza uscire dalla modalità di lavoro in Cabri. Certo, la dimostrazione fatta davanti al video può essere incompleta, frammentaria, non espressa secondo i codici condivisi in classe, ma proprio per questo più 'vera' perché nasce da un bisogno degli allievi: l'esigenza di sapere che una proposizione 'funziona' non perché lo dice Cabri, o lo dice l'insegnante, o è stata intuita osservando una figura, ma perché è conseguenza logica di altre proposizioni valide della geometria. Ecco una forte motivazione a dimostrare, nata nel tipo di attività di risoluzione di problemi con l'aiuto di Cabri. Nella seconda e terza parte dell'attività (si confronti la nota 3) gli studenti avranno tutto il tempo per stendere in forma completa la dimostrazione.

5.CONCLUSIONI

Concordiamo con (Barbin, 1989) quando afferma che una conseguenza dell'attività di dimostrazione è l'evoluzione della prospettiva dalla quale si osservano gli enti della matematica. Intendiamo dire che l'attività dimostrativa contribuisce in modo significativo all'evolvere dei sensi personali degli studenti nei confronti degli enti matematici, indirizzandoli verso il significato che a essi vengono attribuiti dalla comunità matematica.

Siamo convinti che l'esplorazione delle potenzialità di strumenti come Cabri e altri software che consentono un approccio dinamico agli oggetti geometrici sia centrale in progetti che facciano della dimostrazione oggetto di ricerca. Naturalmente ogni tecnologia, per quanto buona essa sia, non produce di per se stessa modificazioni nell'attività didattica e, tantomeno, miglioramenti. Per tale motivo è opportuno non trascurare alcuni rischi che potrebbero essere connessi a un'utilizzazione acritica anche di un buon software, quale è Cabri. Per esempio si deve esplorare fino a che punto la possibilità di ottenere a 'costo zero' figure dinamiche non porti a un'inibizione delle abilità legate alla produzione di congetture. Vogliamo dire che Cabri potrebbe rendere inutili e quindi, in un certo senso, atrofizzare le capacità di effettuare le esplorazioni mentali che si rendono necessarie con le dimostrazioni con carta e matita. La possibilità di avere una figura che si sposta con la semplice azione manuale del mouse potrebbe rendere apparentemente inutile lo sforzo di vedere con gli occhi della mente, di chiudere gli occhi sul disegno ed esplorare dinamicamente la situazione con la mente. Se non si tengono nella dovuta considerazione questi pericoli, si corre il rischio di creare un esercito di studenti Cabri-dipendenti, incapaci di effettuare esplorazioni senza la meccanica del mouse e capaci di realizzare cambiamenti, deformazioni solo sul video di un terminale. Cabri deve quindi essere utilizzato con accortezza, come un mediatore, che aiuti a sviluppare il pensiero dinamico, e non certo a inibirlo. In tal senso gioca un ruolo fondamentale l'insegnante, che non può essere mandato 'in soffitta' dall'avvento delle nuove tecnologie: ci sembra piuttosto che il problema dell'uso delle nuove tecnologie rilanci il ruolo dell'insegnante. Certo, la loro introduzione richiede

una profonda trasformazione di competenze, di obiettivi, di modalità di intervento, di interessi, che la ricerca ha appena iniziato a tratteggiare, ma si tratta di una trasformazione che non mette in alcun modo in dubbio la centralità del docente nel processo di insegnamento/apprendimento.
Un'altra sorgente di perplessità nell'uso di un software come Cabri è che possa addirittura demotivare alla ricerca di una dimostrazione per le proprietà congetturate. Che bisogno ci sarebbe di dimostrare una proposizione che appare, grazie a Cabri, di un'evidenza fortissima? Se si ritiene che la funzione del dimostrare sia essenzialmente quella del convincere se stessi o altri della verità di una proposizione, allora dobbiamo dire che l'evidenza fornita da Cabri ha senza dubbio l'effetto di rendere inutile la dimostrazione. Ma c'è un'altra funzione della dimostrazione che già in Polya (1954) veniva messa in evidenza: la motivazione a dimostrare nasce dall'esigenza di precisare il nesso di conseguenza logica fra la proposizione da dimostrare e le altre di cui già si dispone nella teoria. In altri termini: prima ci si convince della verità (e Cabri aiuta in questa fase) e poi si è pronti e motivati a dimostrare. Indubbiamente questo atteggiamento richiede un'evoluzione dei sensi personali verso la dimostrazione, non solo degli studenti, ma, probabilmente anche di molti insegnanti.
Nel nostro progetto di ricerca l'utilizzazione di un software come Cabri è solo il primo passo per un approccio alla dimostrazione come oggetto di didattica. Pensiamo di precisare, in un'altra occasione, le fasi successive di questo progetto.

Concludiamo precisando le due seguenti ipotesi, che sono alla base della nostra ricerca e che hanno guidato la progettazione delle attività qui descritte:

(1) esiste una sostanziale continuità cognitiva che governa con successo la transizione dalla fase di congettura a quella di dimostrazione

(2) il software Cabri supporta questa transizione, grazie alle possibilità offerte dalle diverse modalità di trascinamento.

L'analisi dei comportamenti degli studenti ha fornito una significativa conferma sperimentale delle ipotesi precedenti.

In particolare sembra che Cabri costituisca un mediatore utile agli studenti in tutte le tre fasi che caratterizzano l'attività di risoluzione di problemi: ricerca, congettura, dimostrazione.

Nella fase di ricerca Cabri permette di:

- fare disegni molto precisi;
- utilizzare le modalità matita/gomma/colore, che permettono di evidenziare o nascondere gli oggetti e di usare i colori per evidenziare legami tra le componenti del disegno rendere visibili solo gli elementi necessari della figura, cancellando quelli che non servono con la funzione 'gomma';
- effettuare esplorazioni e utilizzare il dragging per scoprire relazioni particolari tra gli elementi della figura

Nella fase di congettura:

- facilita il passaggio tra disegno e teoria, favorendo processi di abduzione;
- è un mezzo di validazione di proprietà attraverso le costruzioni, il dragging, ma anche la funzione misura;

- aiuta a trovare controesempi;
- favorisce la formulazione di enunciati in forma condizionale ‘se ... allora’, grazie al rapporto tra oggetti liberi (che si possono muovere) e oggetti dipendenti da questi.

Nella fase dimostrativa aiuta a costruire i passi della dimostrazione. Per esempio, nel protocollo, si osserva la continuità di lavoro dalla congettura alla dimostrazione, in quanto gli studenti, dopo aver scoperto e congetturato in Cabri proprietà della figura, le utilizzano in fase di dimostrazione (FABIO- *Sono allineati*. Disegnano la retta DB e provano a muovere i segmenti e le circonferenze. Tracciano il triangolo ADE, così viene disegnato anche il trapezio... *Poi questo è la metà del segmento per un certo teorema di Euclide, mi sembra.* ANDREA - *Perché secondo te non varia OO’ se vari il raggio?* [muovendo il punto]. ... *Come si fa a dimostrare che un punto appartiene a una retta in genere*?...FABIO - *Abbiamo scoperto che <OAO’ = <OBO’ e che AO’=BO’ perché sono raggi. ... Allora l’angolo <DBE =180° perché composto da angoli uguali ad ADE*.);

BIBLIOGRAFIA

AAVV: 1989, *La démonstration mathématique dans l’histoire*, Actes du 7 ème colloque inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques, Besançon.

AAVV: 1996, Teaching proof, *Mathematics teaching*, 155, 6-39.

Arzarello, F. & Robutti, O.: 1997, Il problema aperto in geometria con l’aiuto di un software didattico, *Nuova Secondaria*, n.2.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: (in stampa), A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *PME XXII*.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: (in stampa), Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*.

Balacheff, N.: 1988, *Une Étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*, Thèse d'état, Université Scientifique de Grenoble.

Balacheff, N.: 1992, Preuve et démonstrations en mathématique au collège, *Recherches en didactique des mathemématiques*, 3, 261-304.

Barbin, E.: 1989, Object de la démonstration mathématique. In: *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7 ème colloque inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques, Besançon.

Barbin, E.: 1993, Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages?, *Repère IREM*, n.12, 93-113.

Bartolini Bussi, M., Boni, M. & Ferri, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena.

Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceeding of PME XXI*, Lathi, vol. 1, 180-195.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1996, Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures, *Proceedings of PME XX*, Valencia, vol. 2, 121-128.

Boieri, P. (a cura di): 1996, *Fare geometria con Cabri,* Centro ricerche didattiche Ugo Morin, Giovanni Battagin Editore.

Brigaglia, A. & Emmer, M. (a cura di): 1995, Congetture e dimostrazioni, *Lettera Pristem*, n. 18, I-XX.

Chazan, D.: 1993, High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, vol.24, 359-387.

DeVillers, M. & Furinghetti, F. (a cura di): 1997, Proofs and proving: why, when and how, *ICME 8*, Sevilla.

Duval, R.: 1991, Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval, R.: 1992, Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive, *Petit X*, n. 31, 37-61.

Furinghetti, F. & Paola, D.: 1997, Shadows on proof, *Proceedings of PME XXI*, Lathi, vol. 2, 273-280.

Gallo, E.: 1994, Control and solution of 'algebraic problems'. In: Arzarello F. & Gallo E. (eds.), *Problems in algebraic learning, special issue of Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e Politecnico di Torino*, vol. 52, n.3, 263-278.

Hanna, G.: 1996, The ongoing value of proof, *Proceedings of PME XX*, Valencia, vol. 1, 21-34.

Harel, G.& Sowder, L.: 1996, Classifying processes of proving, *Proceedings of PME XX*, Valencia, vol.3, 59-66.

Iaderosa, R.: 1996, L'avvio all'argomentazione e alla dimostrazione nella scuola media. In L. Grugnetti, R. Iaderosa & M. Reggiani, *Argomentare e dimostrare nella scuola media*, Atti XV convegno nazionale dei nuclei di ricerca in didattica della matematica per la scuola media, Salice Terme.

Jaffe, A. & Quinn, F.: 1993, Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bulletin AMS*, 29, 1-13, tradotto su Lettera Pristem, 16, 1995.

Laborde, C & Capponi, B.: 1994, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique, *Recherches en didactique des mathèmatiques*, vol. 14, 1.2, 165-210.

Laborde, C. & Laborde J.M.: 1992, Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments. In: *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies*. Research in Contexts of Practice, NATO ASI Series, Series F, vol. 89.

Laborde, C.: 1995, Cabri-géomètre ou un nouveau rapport à la géométrie. In: Notiziario UMI XVII *Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria*. Temi d'attualità, supplemento al n. 8-9, Anno XXII.

Lolli, G.: 1997, Morte e resurrezione della dimostrazione, *Le Scienze*, 345, 50-57.

Magnani, L.: 1997, *Ingegnerie della conoscenza*, Marcos y Marcos, Milano.

Malara, N.A. & Gherpelli, L.: 1994, Problem posing and hypotetical reasoning in geometrical realm, *Proceedings of PME XVIII*, Lisbona, vol.3, 216-224.

Mariotti, M.A.: 1996, Costruzioni in geometria: alcune riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B, 3, 261-287.

Moore, R.C.: 1994, Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, *Dalla congettura alla dimostrazione*, Quaderni del Dipartimento di Matematica, Torino.

Peirce, C.S.: 1960, *Collected Papers II*, Elements of Logic, Harvard, University Press.

Polya, G.: 1954, *Induction and analogy in mathematics*, Princeton.

Saada-Robert, M.: 1989, La microgénèse de la rapresentation d'un problème, *Psychologie Française*, 34, 2/3.

Simon, M.: 1996, Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.

Thurston, W.P.: 1995, On proof and progress in mathematics, *For the learning of mathematics*, 15, 1, 29-37.