GLI ERRORI PIÙ FREQUENTI NEI TEMI PREVISTI DAL CORSO

Raffaella Ceci IPSSCTS “P. Frisi”, Milano
A. Cristina Mocchetti LS “E. Majorana”, Rho, Milano
Domingo Paola LS “G. Bruno”, Albenga, Savona
Silvano Rossetto ITT “G. Mazzotti”, Treviso

Alan Turing ha detto che l'errore è un segno di intelligenza; Rodari ha parlato dell'errore come di un atto di creatività. Più frequentemente l'errore indica un disagio cognitivo o, talvolta, emotivo. In ogni caso una seria e attenta analisi degli errori commessi dagli studenti può essere fonte di indicazioni e suggerimenti molto significativi per l'insegnante.

Nella ricerca didattica la valenza educativa dell'errore è stata ampiamente discussa e precisata (Goupille, Thérien & others, 1987; Ferreri, Spagnolo, 1994). Un'attenta analisi degli errori commessi dagli studenti può offrire indicazioni sui loro schemi concettuali, sul modo di porsi nei confronti della disciplina, sul come organizzano le conoscenze, sugli eventuali fraintendimenti relativi ad alcuni argomenti oggetto di studio e, anche, su certe inopportunità didattiche di cui non sempre l'insegnante è consapevole.

Lo studio delle ragioni che stanno all'origine degli errori richiede competenze assai diversificate: da quelle di carattere storico-epistemologico, a quelle di carattere cognitivo e psico-pedagogico, a quelle più specificamente relative ai principi e alle tecniche della disciplina. Questa analisi può portare l'insegnante a riflettere più a fondo sulle attività didattiche programmate, prevedendone i limiti e le potenzialità e riducendo il rischio di errori didattici che non aiutano gli studenti a superare gli ostacoli e le difficoltà che incontrano nell'apprendimento, in quello della matematica in particolare.

Allo scopo di esemplificare alcune modalità di analisi degli errori commessi dagli studenti ci proponiamo di:

- elencare alcuni errori commessi dagli studenti e discussi durante i lavori di gruppo, in particolare quelli relativi ai temi di logica, di probabilità e di statistica
- effettuare ipotesi sulle origini di alcuni degli errori elencati

Elenco di alcuni degli errori discussi nei lavori di gruppo

Ci sono sembrati di particolare rilevanza, sia per la frequenza con cui si presentano, sia per le loro implicazioni didattiche, i seguenti errori:

1. uso scorretto dei connettivi logici e dei quantificatori, con particolare riferimento alle difficoltà degli studenti di fronte alla negazione di proposizioni contenenti quantificatori
2. confusione tra ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema e, più in generale, tra dati e domanda in un problema
3. utilizzazione, nell'attività dimostrativa, di regole di inferenza non valide
4. errato calcolo degli indici centrali (media, moda e mediana) e confusione nella loro interpretazione
5. impiego della legge delle probabilità totali in situazioni che vanno riferite a probabilità composte
6. utilizzazione delle sole frequenze assolute in problemi e contesti che richiedono l'uso delle frequenze relative

Esempio di analisi di alcuni errori del tipo di quelli evidenziati nei punti 1. *e* 3.

Si può ipotizzare che una delle principali cause di errori del tipo 1.e 3. sia l'utilizzazione di termini, di parole e di regole che, nel linguaggio comune, hanno modalità di impiego talvolta contrastanti con l'uso che se ne fa nell'attività matematica.

Per esempio, la disgiunzione *o* è spesso utilizzata nella lingua italiana in senso esclusivo, mentre nell'attività matematica il senso è prevalentemente quello inclusivo della logica. Inoltre gli studenti tendono a evitare di ricavare da un insieme di premesse conclusioni che siano banalmente contenute nelle premesse stesse; in alcuni casi addirittura rifiutano tali conclusioni. Per esempio, non accettano che dalla proposizione

p: *per ogni x reale* x^2+1 *è maggiore di* 0

si possa dedurre la proposizione

q: *per ogni x reale* x^2+1 *è maggiore o uguale a* 0

La deduzione viene ritenuta "scorretta" o "senza senso" o "inutile e come tale da rifiutare". Sembra che lo studente non sia disposto ad accettare di affermare semplicemente la *verità* quando può dire *tutta* *la verità*: si noti che questa posizione è quella che viene in genere auspicata non solo in un'aula giudiziaria, ma anche nelle situazioni comuni! Nella vita quotidiana si tendono ad escludere conclusioni nelle quali parte dell'informazione contenuta nelle premesse viene persa [Johnson-Laird, 1994]: la proposizione p contiene maggiore informazione della proposizione q, pertanto il *senso comune* è quello di non accettare che da p si possa derivare q, nonostante ciò sia coerente con le leggi della logica classica e, in particolare, con l'uso della disgiunzione *o* nella logica proposizionale.

Le difficoltà legate all'uso del condizionale, come noto, sono ancora maggiori. A questo proposito riportiamo quanto è detto in [Ferro, 1993, p. 32]: "Per non dire poi delle difficoltà della parola *implica*, del *se ... allora*, del *ogniqualvolta succede.... accade anche*. E se la frase al posto dei puntini, cioè l'antecedente, non è vera, l'intera affermazione è vera o no, o non ha significato? In matematica si fa una scelta precisa: se l'antecedente è falso la frase è vera comunque; ma questa convenzione non è per niente usuale nel linguaggio comune".

Spesso gli studenti ritengono di poter concludere, dalle due premesse $p \rightarrow q$ e q, la proposizione p. Questo errore viene in genere spiegato ipotizzando che gli studenti confondano l'implicazione semplice con la doppia implicazione. Esiste, però, almeno un'altra interpretazione delle origini dell'errore, che fa riferimento all'uso, da parte degli studenti, di regole inferenziali diverse da quelle della logica deduttiva. Secondo tale punto di vista, più che di errore, si dovrebbe parlare di un uso inopportuno di regole caratteristiche del pensiero induttivo. Nella *ricerca delle cause* si parte molto spesso da osservazioni; supponiamo che si sia osservato che *tutte le volte che si verifica l'evento* p *si verifica anche l'avvento* q. L'osservazione di q porta a ipotizzare che possa essersi verificato p. In altri termini si utilizza uno schema di inferenza del tipo

$$\frac{p \rightarrow q\ ,\quad q}{\text{forse } p}$$

L'errore dello studente consisterebbe, in tal caso, non tanto nel confondere implicazione semplice e doppia implicazione, quanto nell'estendere alla logica deduttiva regole inferenziali utilizzate in ambiti differenti.

È probabile che nell'esperienza didattica di un insegnante sia capitato almeno una volta di vedere uno studente che rifiuta di considerare falsa una proposizione quantificata universalmente e che cade in difetto solo in "pochi" casi. Per esempio, la proposizione

Ogni numero primo è dispari

viene considerata "vera tranne che per 2" e non falsa (come richiede la logica classica). In tal caso si può ipotizzare che il quantificatore universale non sia tenuto nella dovuta considerazione, ma anche che vengano (inconsapevolmente) utilizzate logiche diverse da quella classica, per cui una proposizione o è vera o è falsa e non si danno altre alternative. Forse gli studenti utilizzano logiche più sfumate, in cui quella proposizione è *quasi vera* o, meglio, *vera tranne che per un caso* [Zazkis, 1995]. Questo è anche quello che si fa, per esempio, nelle scienze fisiche e nella loro didattica, dove un'affermazione come *i liquidi riscaldati si dilatano* non viene considerata *falsa*, ma *vera tranne che per alcune eccezioni*, (p.e. l'acqua in particolari condizioni).

L'uso appropriato dei quantificatori nella pratica matematica è inoltre reso assai problematico dal fatto che nella lingua italiana (di cui usiamo le parole per parlare degli oggetti della matematica!) sono presenti vari modi di esprimere i quantificatori, spesso con accezioni diverse da quelle della matematica. Per esempio, se dico che *alcuni milanesi portano gli occhiali*, sottintendo anche che *alcuni milanesi non portano gli occhiali*. Nella logica classica (e in matematica) affermare che $\exists x\ P(x)$ (esiste x che gode della proprietà P) non equivale ad affermare che $\exists x \neg \mathrm{P}(x)$ (esiste x che non gode di P).

Quando si devono combinare negazione e quantificazione le difficoltà aumentano. A quelle della quantificazione si aggiungono le difficoltà legate alla negazione. Dovrebbe essere sufficiente pensare che nella lingua italiana si negano, oltre alle proposizioni, anche aggettivi, avverbi, nomi; che nella lingua italiana non sempre due negazioni affermano; che dal punto di vista insiemistico negare un predicato P vuol dire passare al complementare dell'insieme di verità di P e, in alcuni casi, l'esplorazione estensiva e il controllo di tale insieme possono rivelarsi impossibili. Consideriamo, per esempio, la seguente proposizione

p: Tutti i veneti sono italiani

che, allo stato attuale, è una proposizione vera. Se si chiede a una classe di studenti di negare la proposizione *p*, si ottengono, in genere, almeno due proposizioni:

q: *Non tutti i veneti sono italiani* *r*: *Nessun veneto è italiano*

entrambe false. Se si obietta semplicemente che *r* non è corretta possiamo ricevere come risposta che sia *q* sia *r* cambiano il valore di verità di *p* e quindi possono ritenersi entrambe una negazione di *p*. Si può avere maggiore successo facendo notare che in una proposizione falsa come *tutti i numeri naturali sono dispari*, la prima strategia utilizzata per negare una proposizione funziona. Infatti *non tutti i numeri naturali sono dispari* è vera. Invece la seconda strategia non ha successo: infatti *nessun numero naturale è dispari* è falsa come la proposizione che si voleva negare.

Quanto detto suggerisce di fare molta attenzione nell'utilizzare il linguaggio naturale per parlare degli oggetti della matematica: evidentemente non se ne può fare a meno, ma l'analisi ora condotta suggerisce che si debbano anche precisare ed evidenziare le differenze tra la lingua naturale e il linguaggio matematico, tra le regole del senso comune e quelle della logica deduttiva.

BIBLIOGRAFIA

Ferreri, M. & Spagnolo, F.: 1994, *L'apprendimento tra emozione e ostacolo*, Quaderno n.4 del G.R.I.M., Palermo.

Ferro, R.: 1993, Alcune osservazioni per l'insegnamento della logica, in Franco Di Cataldo (a cura di) *L'insegnamento della matematica nei nuovi programmi per il biennio della scuola secondaria superiore*, IRRSAE del Veneto, Mestre.

Goupille, C., Thérien, L & others (editors): 1987, *Proceedings of the CIEAEM 39*, Sherbrooke, Québec.

Johnson-Laird, P.N.: 1994, *Deduzione. Induzione. Creatività*, Il Mulino, Bologna.

Zaskis, R.: 1995, Fuzzy thinking in non-fuzzy situations: understanding students' perspective, *For the learning of mathematics*, v.15, n.3, 39-41.