Diversi modi di insegnamento – apprendimento della matematica.
Insegnamento – apprendimento tecnologico

Domingo Paola
Liceo scientifico A. Issel – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Summary

The NCTM (NCTM, 2000, p.24) quote: "Electronic technologies – calculators an computers – are essential tools for teaching, learning and doing mathematics. They furnish visual image of mathematics ideas, they facilitate organizing and analyzing data, and they compute efficiently and accurately. They can support investigation by students in every area of mathematics … When technological tools are available, students can focus on decision making, reflection, reasoning and problem solving". In this paper I give some example of the potentiality of the use of new technologies in mathematics education and propose some considerations about the different perspective of the use of technology in teaching – learning environments.

Diversi modi di insegnamento – apprendimento della matematica.
Insegnamento – apprendimento tecnologico

Domingo Paola
Liceo scientifico A. Issel – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Premessa

Ci sono premesse che, per quanto scontate, è sempre meglio esplicitare fin dall'inizio di una discussione; quella che segue è proprio una di tali premesse e dovrà essere tenuta presente nel prosieguo del discorso per una valutazione critica serena e meditata. In ogni ambiente di insegnamento – apprendimento sono sempre presenti diversi ingredienti: le persone (soprattutto insegnanti e studenti, ma, almeno, anche i genitori); le tecnologie utilizzate (quelle povere e quelle costose, quelle tradizionali e le più innovative); la cultura della classe (costituita dalle esperienze e dalle conoscenze sia quelle personali nel loro sviluppo psicologico – cognitivo, sia quelle istituzionali nel loro sviluppo storico – epistemologico). Risulta chiaro, da quanto premesso, che quelli che sono stati individuati come tre modi di insegnamento – apprendimento della matematica (cooperativo, tecnologico e storico) sono in realtà tre variabili di quelle complesse strutture multidimensionali che sono gli ambienti di insegnamento – apprendimento. Inoltre, ogni modalità di insegnamento, che voglia essere consapevole e responsabile, non dovrebbe mai evitare di considerare con uguali dignità gli aspetti cognitivi, quelli legati alla sfera emozionale – affettiva e quelli legati all'interazione sociale; cooperative o collaborative learning, uso delle tecnologie e considerazione della dimensione storica diventano, da questa

prospettiva, strategie per la progettazione e la realizzazione di ambienti di insegnamento – apprendimento sensati. D'altra parte la scelta di approfondire, in tre diverse relazioni, le problematiche relative alle tre diverse strategie di insegnamento – apprendimento trova la sua giustificazione in quel processo di riduzione e semplificazione di un problema complesso che è tanto caro ai matematici. Se gli ambienti di insegnamento – apprendimento fossero studiati nella loro complessità, sarebbero probabilmente irriducibili gli uni agli altri; trascurare certe differenze, ridurre l'eccesso di informazione, isolare le variabili significative, farne variare solo una alla volta, consente di poter confrontare ambienti differenti, produrre classificazioni, individuare le caratteristiche essenziali.
In sintesi il significato di questa premessa è che bisogna essere ben consapevoli non solo delle potenzialità (possibilità di analisi e confronto), ma anche dei limiti (perdita di informazioni) che vi sono nel considerare separatamente diversi aspetti che contribuiscono alla costituzione di un sistema complesso come un ambiente di insegnamento – apprendimento.

Ruoli e funzioni della tecnologia nell'insegnamento – apprendimento

Visto che, pur affermandone i limiti, ho accettato un approccio riduzionista allo studio degli ambienti di insegnamento apprendimento, estendo quest'approccio allo studio di quello che è stato individuato come "insegnamento – apprendimento tecnologico". In particolare, in questa sezione, cercherò di esporre sinteticamente, ma con chiarezza, il mio punto di vista sulle funzioni e sui ruoli della tecnologia nella didattica della matematica.
Secondo Rabardel (Rabardel, 1995), gli oggetti e i sistemi tecnologici sono pensati e concepiti per funzionare in ambienti prettamente umani; a causa di tale origine sono essenzialmente antropocentrici. Ciò vale anche per le tecnologie che si utilizzano

nella didattica della matematica; non tutte queste tecnologie, però, sono state progettate e costruite per fini didattici. Non lo è stato il computer, non lo sono i software come i fogli elettronici e sistemi di CAD, che pure vengono frequentemente utilizzati nelle lezioni di matematica; non lo erano, in origine, Derive, Cabri e neppure le calcolatrici tascabili. Questa considerazione fa nascere una domanda: è sufficiente che una tecnologia che si utilizza nell'insegnamento – apprendimento della matematica sia stata pensata per funzionare in un ambiente umano o è bene che sia stata progettata e realizzata specificamente per la didattica della matematica?
È chiaro che la risposta dipende dagli scopi per cui un software viene utilizzato, ma forse si può fare qualche considerazione più generale che va al di là di un'analisi degli obiettivi specifici di apprendimento. Nella scuola primaria si è fatto e si fa largo uso di materiali didattici strutturati, come i regoli numerici, che, in alcune esperienze, vengono sostituiti da oggetti virtuali (http://matti.usu.edu/nlvm/nav/vlibrary.html, Moyer, P.S., Bolyard, J.J., & Spikell, M.A. (2002). What are virtual manipulatives? [Online]. *Teaching Children Mathematics,* *8*(6), 372-377, disponibile sul sito http://my.nctm.org/eresources/article_summary.asp?URI=TCM2002-02-372a&from=B): è nota la perplessità di alcuni ricercatori in didattica della matematica sull'uso di alcuni materiali didattici strutturati. Bruno D'Amore mette in guardia sul fatto che gli studenti acquisiscono in genere competenze utili a ottenere prestazioni efficaci negli ambienti di insegnamento – apprendimento nei quali hanno lavorato. Il rischio è che tale apprendimento sia situato e non esportabile, ossia le prestazioni siano adeguate agli obiettivi solo in quell'ambiente. Se ciò accade e se, inoltre, l'ambiente è piuttosto rigido e molto artificioso ecco che le prestazioni efficaci non possono essere in alcun modo adottate come indicatori di effettivo apprendimento. Come scrive D'Amore, "L'ingenuo sogno del passato che i bambini potessero apprendere

in un ambiente artificiale e potessero appropriarsi di questo apprendimento per utilizzarlo poi in qualsiasi situazione, in una specie di spontaneo transfert cognitivo, è e resta utopico. Il bambino NON sa trasferire gli apprendimenti: li situa: è costretto a farlo, non è colpa sua, fa parte delle maglie dell'apprendimento. In questo senso, dunque, un apprendimento concettuale realizzato all'interno di un ambiente artificiale, oltre a non essere, di fatto, un apprendimento, finisce con l'essere un ostacolo" (D'Amore, 2002, pag. 17)

I software didattici nati specificamente per la didattica della matematica potrebbero presentare caratteristiche simili ai materiali didattici strutturati? Un software come Graphic Calculus, pensato per l'introduzione all'analisi rischia di rendere situato l'apprendimento dei concetti di funzione, derivata, integrale, limite e quindi di essere un ostacolo didattico per un vero apprendimento? Non è meglio, per apprendere parti della matematica, lavorare con software applicativi utilizzati nel mondo del lavoro, cercando di farne un'occasione per un apprendimento motivato, per esempio studiando la matematica che c'è dietro le risorse che tali software mettono a disposizione di un utente? Si tratta di domande che non ammettono risposte univoche e certe, ma che è necessario porsi per diventare e rimanere consapevoli dei delicati problemi che stanno dietro ogni scelta didattica.

Un'altra questione fondamentale sul ruolo e sulla funzione delle tecnologie nella didattica è se una tecnologia debba essere pensata come *protesi*: in questo caso si considera buona una tecnologia che serve per potenziare abilità cognitive di cui lo studente difetta. Per esempio, l'uso di un software di geometria dinamica può essere utile a potenziare o a fornire l'immaginazione dinamica; l'uso di un software grafico può servire per potenziare la capacità di disegnare analizzare grafici; l'uso di un foglio elettronico può essere utile a potenziare la capacità di scrivere e manipolare formule. Questa idea della tecnologia come protesi è fortemente pervasiva nella didattica della matematica. Una tecnologia, però, può essere presa in considerazione e utilizzata essenzialmente per i problemi che consente di porre e risolvere e per le situazioni che propone e che, pertanto, devono essere affrontate. In altri termini, una nuova tecnologia è spesso uno strumento che consente di porre e affrontare nuovi problemi e che, pertanto, è portatore di innovazioni, più o meno profonde nella didattica, innovazioni che riguardano anche il sapere istituzionale stesso e non solamente i sensi personali degli studenti o le pratiche didattiche. Questa posizione incontra molte perplessità, in particolare relative alla capacità di una tecnologia di incidere sul sapere istituzionale di riferimento; queste perplessità si esprimono, in genere, con l'affermazione che "l'uso di una tecnologia può modificare il modo di introdurre e trattare un determinato concetto, ma non può modificarne il significato". Secondo chi esprime questa perplessità, le pratiche non possono modificare i significati degli oggetti di studio: eppure un'analisi storico epistemologica anche superficiale porta alla conclusione che gli oggetti matematici possono essere considerati come emergenti da sistemi di pratiche matematiche in lenta, ma continua evoluzione e fortemente interagenti con gli strumenti concettuali e fisici utilizzati per risolvere problemi. Il cervello stesso può essere pensato come un sistema di apprendimento che modifica le sue capacità di elaborare memoria e pensiero in funzione dell'ambiente: la capacità dei bambini di oggi di utilizzare strumenti elettronici relativamente sofisticati dipende dal fatto che essi vivono in un ambiente ad alta "densità tecnologica"e non sentono questi strumenti come estranei e innaturali. Anche il linguaggio e poi la parola scritta possono essere pensati come *protesi* per la loro capacità di estendere le potenzialità della mente umana: questa posizione è però riduttiva, perché trascura i nuovi problemi che sono sorti e quelli che sono stati superati con l'introduzione delle nuove possibilità e tecniche di rappresentazione che il linguaggio e la parola scritta hanno messo a disposizione dell'uomo. Un esempio più recente e specifico per la matematica è quello dell'algebra: "il simbolismo algebrico si liberò gradualmente dal linguaggio scritto per supportare tecniche che sempre più concernevano un lavoro fatto sui simboli stessi in accordo a un ben preciso sistema di regole di sostituzione e trasformazione, piuttosto che non alle relazioni tra le grandezze che quei simboli potevano rappresentare"(Kaput, 2002, p. 84). Tutto ciò portò a uno spostamento di attenzione dalla semantica alla sintassi, con la nascita di nuovi problemi e la costruzione di nuovi campi di esperienza e di nuovi significati inaccessibili a un'algebra retorica o anche sincopata. La capacità di manipolazione simbolica è quindi diventato uno degli obiettivi di quasi tutti i sistemi di istruzione, con tutti i problemi per i principianti dovuti essenzialmente al fatto che il linguaggio algebrico è spesso in conflitto con le caratteristiche dei linguaggi naturali. Per molto tempo l'esibizione di capacità di manipolazione simbolica è stata considerata una competenza essenziale nei programmi scolastici di molti paesi e si è cercato di conseguirla con un insegnamento – apprendimento fondato sull'imitazione dell'esperto e la ripetizione di molti esercizi. Il successo nella riduzione di espressioni a forme canoniche o normali e nella scomposizione di polinomi in fattori è stato spesso considerato un elemento fondamentale per la selezione nel primo anno della scuola superiore. L'avvento di potenti strumenti di calcolo simbolico ha portato nuovi elementi di riflessione: dato che ormai esistono in commercio, facilmente reperibili e a costi relativamente bassi, raffinati sistemi di manipolazione simbolica che dimostrano capacità di calcolo superiori a quelle dei migliori studenti, tutta quella fatica tesa ad apprendere e a padroneggiare tecniche di calcolo simbolico perde molto del suo valore strumentale e pone il problema di se e come utilizzare le risorse messe a disposizione da questi strumenti per far evolvere l'azione didattica verso obiettivi di insegnamento – apprendimento eventualmente più significativi. Ecco: non solo il modo di fare matematica è cambiato nel passaggio dall'algebra retorica e sincopata a quella simbolica e dai

calcoli con carta e matita a quelli con i CAS, ma anche i problemi e i significati stessi degli oggetti di studio.
Un altro aspetto è legato al ruolo che la tecnologia può avere nel processo di "democratizzazione" del sapere, in particolare nel facilitare la diffusione del sapere di riferimento di una determinata disciplina, come, per esempio, la matematica. Le prospettive dalle quali questo problema può essere affrontato e le risposte alle questioni poste cambiano drasticamente a seconda della posizione rispetto ai processi di insegnamento – apprendimento. Per esempio, se si sposa una visione comportamentista, si evidenzieranno le potenzialità dell'apprendimento a distanza che consentono di raggiungere in tempi brevissimi grandi numeri di utenti e di standardizzare offerte formative e valutazione delle prestazioni; allo stesso tempo si evidenzieranno, quali limiti dell'apprendimento a distanza, la mancanza di interazione diretta con il docente tutor, assai importante nei processi di addestramento e di apprendimento per imitazione, anche per le dinamiche emotive che difficilmente possono essere messe in moto in un apprendimento a distanza e la cui importanza è oggi difficile sottostimare anche da una prospettiva comportamentista. Se, invece, si opta per l'apprendistato cognitivo, allora si evidenzieranno, tra le potenzialità, le risorse messe a disposizione per insegnanti e studenti dai dispositivi tecnologici per effettuare attività didattiche guidate nelle quali fare e veder fare assumono entrambi una stessa importanza strategica. Di queste risorse si evidenzierà, in particolare, il ruolo di mediazione giocato fra i sensi personali dello studente e il sapere istituzionale. Poiché, però, nell'apprendistato cognitivo l'azione didattica è fortemente guidata e orientata dal docente, si evidenzieranno i rischi di deriva didattica, ossia di diversioni rispetto al tracciato delineato dall'insegnante, che proprio le molte risorse dello strumento rendono particolarmente probabili.
Infine, sposando una posizione di costruttivismo, più o meno radicale, si evidenzieranno come potenzialità proprio quelli che

dalla prospettiva di apprendistato cognitivo erano considerati rischi da evitare e si considereranno addirittura come pericoli quelle che in una prospettiva comportamentista erano evidenziate come potenzialità (per esempio il poter raggiungere in tempi brevi numerosi utenti, uniformando offerte formative e valutazioni delle prestazioni).

Una differente prospettiva sulle problematiche dell'insegnamento – apprendimento porta anche a considerare differenti problemi nel rapporto con la tecnologia. Per esempio, in un approccio comportamentista verranno probabilmente trascurati molti di quei problemi legati alla genesi strumentale[1] che riguardano l'appropriarsi di certi schemi di utilizzazione, anche perché lo schema di utilizzazione dovrà essere ben chiaro e in qualche modo dato per scontato nelle attività proposte; proprio per questo verranno invece trattati con molta attenzione i problemi relativi all'acquisizione delle tecniche necessarie per poter far funzionare il dispositivo tecnologico in modo adeguato alle attività proposte.

In sintesi possiamo affermare che i ruoli e le funzioni dell'uso delle tecnologie nell'insegnamento – apprendimento della matematica sono molteplici e variano profondamente con il variare dell'approccio e del quadro pedagogico di riferimento. In questa sezione ho proposto alcuni esempi paradigmatici, anche se certamente non esaustivi: per esempio, un'altra distinzione, che si sovrappone solo parzialmente ad alcune modalità già elencate, è l'uso della tecnologia per fare attività non effettuabili con carta e matita, oppure l'uso della tecnologia per costruire ambienti di

---

[1] Rabardel (Rabardel, 1995) distingue tra artefatto, ossia il dispositivo con le sue caratteristiche fisiche o simboliche, ma puramente tecniche, e strumento, che è costituito non solo dall'artefatto, ma soprattutto dagli schemi di utilizzazione sociali dell'artefatto, dei quali il soggetto è riuscito ad appropriarsi. La genesi strumentale è il processo che porta dall'artefatto allo strumento e si distingue in *instrumentalisation*, che riguarda in sostanza l'appropriarsi delle modalità e potenzialità di funzionamento dell'artefatto, e *instrumentation*, che invece riguarda gli schemi di utilizzazione, in genere rivolti alla soluzione di particolari classi di problemi, dell'artefatto.

insegnamento – apprendimento particolarmente adeguati alla costruzione di significato degli oggetti matematici o, ancora, l'uso della tecnologia per meglio comunicare con gli studenti.

Analisi di esempi dell'uso delle tecnologie nell'insegnamento – apprendimento della matematica

In questa sezione propongo e discuto le caratteristiche di alcune attività didattiche in cui si fa uso di nuove tecnologie. Tutti gli strumenti a cui farò riferimento possono essere utilizzati nella scuola secondaria di secondo grado; solo due di essi possono essere utilizzati anche nella scuola elementare e tre di essi nella scuola secondaria di primo grado. L'analisi riguarda in particolare attività svolte nella scuola superiore, ma non trascura gli altri livelli scolari. Sono comunque convinto che le nuove tecnologie vadano introdotte gradualmente nella didattica della matematica e che, ove sia possibile, è bene utilizzare tecnologie più povere e maggiormente legate ad aspetti percettivi. Infatti, se è vero che è soprattutto il senso della vista che viene utilizzato nelle attività di conoscenza, almeno a partire dall'età scolare, è anche vero che sollecitare gli altri sensi consente un coinvolgimento molto maggiore nell'apprendimento, soprattutto, ma non solo, per quel che riguarda gli aspetti emozionali – affettivi che giocano un ruolo strategico sugli aspetti cognitivi. La minore attenzione che ho dedicato alla scuola primaria e secondaria di primo grado non è quindi tanto una scelta dettata dalla mia maggiore esperienza nella scuola superiore, quanto dalla convinzione che i software specifici per l'insegnamento – apprendimento della matematica possano giocare un ruolo sempre più importante e necessario solo a partire da un'esperienza matematica acquisita mediante esplorazioni e osservazioni condotte con tecnologie più tradizionali. Tra l'altro i vincoli per insegnanti e studenti imposti dagli schemi d'uso di un determinato software sono, a mio avviso, più invadenti e rischiosi nei primi livelli scolari, che non quando l'esperienza matematica comincia (o dovrebbe cominciare) a essere più consistente.

Software di geometria dinamica e insegnamento – apprendimento della geometria nella scuola elementare e secondaria di primo grado

Sono note le perplessità dell'uso di un software come Cabri con allievi di una scuola elementare e ad alcune di esse ho appena accennato. Nonostante ciò iniziano a prendere consistenza alcune esperienze effettuate in Italia e all'estero sull'uso di Cabri nella scuola primaria. Nel 2001, per esempio, Teresa Assude ha presentato al convegno di Cabri world un'interessante relazione (Assude, 2001) nella quale non si è limitata a proporre una serie di attività, ma ha anche accennato a una serie di problematiche inquadrandole in un contesto teorico interessante. In ogni caso, se ha senso proporre un uso di Cabri nella scuola elementare, questo deve andare verso attività che prevedano fogli di lavoro già costruiti dall'insegnante e sui quali gli studenti possano effettuare esplorazioni e osservazioni limitandosi all'uso del mouse, senza dover effettuare alcuna costruzione e, possibilmente, senza dover utilizzare alcuna funzione del menu al di fuori del trascinamento. A mio avviso è necessario che gli studenti possano concentrarsi sull'attività di esplorazione ed osservazione delle figure geometriche presenti nel foglio di Cabri, senza doversi minimamente preoccupare della sintassi dei comandi di Cabri e dei vincoli imposti dal software all'attività di costruzione di figure geometriche. In questo senso sarebbe particolarmente opportuno lavorare con un menu appositamente costruito, nel quale sia presente unicamente il comando "puntatore"; ciò aiuterebbe gli studenti ad appropriarsi di schemi d'uso tesi a favorire la costruzione di immagini mentali ricche e dinamiche molto importanti per far crescere l'esperienza geometrica e la conoscenza di proprietà.

Propongo un esempio di attività che può suggerirne altre simili, di maggiore, minore o uguale complessità e proponibili a partire da un quarto anno di scuola elementare.

L'insegnante prepara un foglio di lavoro, con un menu ridotto alla sola funzione "puntatore", oppure, per consentire la scrittura di qualche appunto, rende accessibile la funzione "testo" e, eventualmente, per facilitare l'esplorazione degli studenti, in configurazioni un po' troppo ricche, rende accessibile la funzione "colore"[2]. Questo foglio contiene una figura che, apparentemente, è un quadrato. Inizialmente l'osservazione può essere guidata dall'insegnante sulle proprietà della figura che compare sul foglio, senza che vengano trascinati i punti liberi. È possibile fare notare che la figura ha quattro lati e quattro angoli (alla lunga queste osservazioni possono anche costituire una sorta di "definizioni implicite" di lati e angoli di una figura) e che per questo viene chiamato quadrilatero (si tratta di attività che sono naturalmente finalizzate all'acquisizione di un linguaggio specifico); si può inoltre osservare che i lati sono tutti uguali perché hanno la stessa misura e che anche gli angoli sono tutti uguali. Poiché la loro misura è di 90 gradi, gli angoli della figura sono tutti retti. Si può concludere dicendo che ogni quadrilatero che ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli retti si dice quadrato (senza alcuna preoccupazione per eventuali informazioni ridondanti); eventualmente si può far notare che la somma delle misure degli angoli è 360 gradi (di tale proprietà di potrebbe anche richiedere una giustificazione nel caso in cui si fosse osservato in precedenti attività che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi). In seguito gli studenti sono invitati a muovere i punti liberi della figura e a scoprire che cosa varia nella figura e quali, invece, sono le caratteristiche che si conservano con qualunque tipo di trascinamento. Se l'insegnante, per esempio, ha costruito un parallelogramma, il foglio di lavoro dovrebbe consentire agli studenti di scoprire mediante esplorazione ed osservazione, le proprietà del parallelogramma e i casi di parallelogrammi particolari, fra i quali gli studenti ritroveranno il quadrato precedentemente preso in considerazione. Naturalmente quello del trascinamento è uno schema d'uso la cui acquisizione

[2] Analogamente sarebbe possibile preparare un foglio in Cabri java.

non è detto che sia del tutto scontata e naturale: è l'insegnante che deve farsi carico della genesi strumentale e cioè dell'evoluzione dell'artefatto Cabri nello strumento utile a effettuare esplorazioni, osservazioni e riconoscimento di invarianti. Sicuramente la riduzione del menu è una buona strategia, ma deve essere affiancata da esempi di esplorazioni e osservazioni compiuti dall'insegnante nei piccoli gruppi di lavoro e da discussioni matematiche condotte alla presenza dell'intera classe, nella quale sia possibile condividere e discutere le strategie di esplorazione compiute dai vari gruppi. È inoltre opportuno indicare le misure dei lati con due cifre significative e degli angoli con una sola cifra significativa, in modo da ridurre, almeno nelle prime esplorazioni, il problema degli eventuali scarti sull'ultima cifra significativa per misure eccessivamente sensibili.

Un' evoluzione di quest'attività potrebbe essere quella di iniziare con un foglio che presenta più disegni apparentemente identici, per esempio sei quadrati, ma il primo dei quali è proprio un quadrato, il secondo un rettangolo, il terzo un rombo, il quarto un parallelogramma, il quinto un trapezio, il sesto un quadrilatero qualunque e chiedere di scoprire la "vera natura" delle figure con la funzione di trascinamento.

A mio avviso attività di questo tipo, se inserite in un ambiente di insegnamento – apprendimento opportuno, potrebbero aiutare significativamente l'evoluzione dall'esplorazione e osservazione di "fatti geometrici", alla verbalizzazione di quanto osservato e alla produzione e formulazione di congetture che troverebbero la loro ragione d'essere e validazione all'interno di Cabri. Si tratterebbe, tra l'altro, di attività molto simili a quelle che in genere si possono fare con i modelli dinamici concreti (Faccenda & al., 2003). Come i modelli concreti, anche quelli virtuali di Cabri hanno una doppia natura di strumenti per costruire concetti e di sistema di segni usati per rappresentare concetti. Naturalmente ci sono alcune differenze con i modelli concreti che si declinano in limiti e potenzialità. Fra i limiti è bene evidenziare che la manipolazione delle figure di Cabri

attraverso il mouse è esperienza meno coinvolgente della manipolazione di un modello concreto; inoltre questi ultimi possono anche essere in qualche caso costruiti dagli studenti stessi, che esercitano in tal modo la manualità, la progettualità e la capacità di eseguire istruzioni. Come già detto, invece, la costruzione dei modelli virtuali è sconsigliata per studenti della scuola elementare, perché richiede, a causa della necessità di apprendere la specifica sintassi del software, processi di astrazione e formalizzazione superiori a quelli richiesti per l'interpretazione di quanto osservato trascinando con il mouse le figure. Le potenzialità sono da ricercarsi essenzialmente nella possibilità di aumentare di almeno un ordine di grandezza il numero di situazioni che possono esser proposte agli studenti per l'esplorazione.
Attività di questo tipo, con situazioni geometriche sempre più complesse possono essere proposte anche nei livelli scolari successivi, in particolare nella scuola secondaria di primo grado, ma, perché no, anche in un biennio di scuola superiore. A partire dalla scuola media, però, si potrebbero affiancare attività nelle quali Cabri è utilizzato come strumento per costruire figure geometriche. Il menu andrebbe gradualmente arricchito, in modo che il processo di *instrumentalisation* nel senso di Rabardel (Rabardel 1995) possa essere avviato e realizzato gradualmente, ma sistematicamente. A mio avviso sarebbe quanto mai opportuno trovare un equilibrio (che ovviamente non può non dipendere dal contesto della classe, in particolare dal livello di conoscenze geometriche e relative al software raggiunte) tra un menu eccessivamente ricco (che inevitabilmente disorienta e rischia di rendere poco significative alcune operazioni che, dal punto di vista concettuale, sono invece importanti) e un menu eccessivamente povero rispetto alle costruzioni da effettuare (il che potrebbe rendere troppo difficile il compito di realizzare le costruzioni). L'attenzione alle costruzioni geometriche è fondamentale per l'avvio al sapere teorico. Come è scritto in (Arzarello & al., 1999), "ogni costruzione con riga e compasso equivale, in ultima analisi, a

una dimostrazione dell’esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide. Sempre da questo punto di vista possiamo dire che, dietro a ogni costruzione, c'è un teorema di geometria: al di là di ogni sua possibile realizzazione concreta, che può essere ottenuta utilizzando gli strumenti tecnici disponibili, una costruzione geometrica incorpora sempre anche un significato teorico”.

Un ambiente di insegnamento – apprendimento del “Calculus” nella scuola secondaria di primo e secondo grado

L’insegnamento di elementi dei primi elementi di analisi matematica (forse sarebbe meglio utilizzare il termine anglosassone Calculus, per sgomberare il campo da equivoci) è sicuramente fra quelli che può essere interessato da maggiori e più profonde innovazioni, utilizzando le potenzialità messe a disposizione dagli attuali strumenti di manipolazione grafico simbolica.
In effetti la tradizione scolastica italiana, almeno nella scuola secondaria di secondo grado, ha fortemente insistito sugli aspetti formali, specificamente sintattici, in particolare per quel che riguarda il calcolo letterale e il calcolo delle equazioni, le cui tecniche sono state considerate, per molto tempo, prerequisiti per lo studio delle funzioni e del loro grafico, argomenti che venivano demandati agli ultimi anni di scuola secondaria. La facilità con cui può oggi essere ottenuto un grafico o con la quale può essere manipolata un’espressione algebrica, con strumenti relativamente poco costosi e facilmente reperibili, porta a riconsiderare quella prassi didattica che, tra l’altro, è stata forse il principale strumento di selezione nei corsi di matematica e, quindi, nella scuola italiana.
Il sapere istituzionale relativo alla variazione delle grandezze e quindi il Calculus può essere appreso con nuove modalità modificando i mezzi con i quali si affrontano e si pongono problemi e questi nuovi mezzi possono produrre addirittura diversi significati degli oggetti di studio. Ciò non è strano se si condivide la posizione, espressa da Chevallard (Chevallard, 1992) che gli oggetti matematici sono degli emergenti da campi di problemi e da

pratiche associate all'interpretazione e alla risoluzione di quei problemi. Secondo tale posizione, i significati degli oggetti matematici sarebbero proprio le pratiche messe in atto per affrontare e risolvere problemi. Da tutto ciò risulta una stretta dipendenza tra pratiche e significati e, poiché le pratiche non possono non dipendere dagli strumenti utilizzati, consegue che tra i significati degli oggetti matematici e gli strumenti utilizzati per affrontare e risolvere problemi ci sono strettissime relazioni. Tanto per fare un esempio, non è difficile pensare a quanto possano cambiare i significati degli oggetti matematici "insieme delle soluzioni di un'equazione o di una disequazione" passando da un ambiente che fa uso degli strumenti "linguaggio algebrico" e "carta e matita" a uno che fa uso di manipolatori grafico – simbolici. Ovviamente non si sta affermando che cambia le definizione di "insieme delle soluzioni di un'equazione o di una disequazione", ma che la strada per arrivare a essa (nel caso esista una definizione condivisa a livello istituzionale) e quindi la costruzione e l'evoluzione dei significati da parte degli studenti, può essere profondamente differente nei due ambienti. Non si vuole nemmeno produrre una scala di valori, ossia dire se sia meglio un ambiente piuttosto di un altro: è evidente che entrambi hanno limiti e potenzialità. Il lavoro dell'insegnante è proprio quello di valutare la portata dei limiti e delle potenzialità tenendo presenti i vincoli determinati dal contesto in cui opera e poi cercare, una volta presa una decisione consapevole e meditata, di minimizzare la portata dei limiti e esaltare le potenzialità agendo su tutti i parametri sui quali può agire.

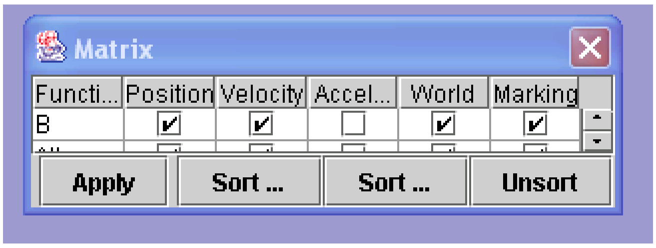
Secondo Kaput (Kaput, 2002) ci sono tre tipologie di conseguenze determinate dall'utilizzazione dei nuovi strumenti tecnologici nell'insegnamento – apprendimento della matematica: il passaggio da una conoscenza statica, a una dinamica; nuove modalità di rappresentazione di insiemi di dati, ottenuti da simulazioni o acquisiti tramite dispositivi specifici come i sensori e delle relazioni che è possibile determinare; il trattamento di problemi che

non è possibile affrontare seriamente senza potenti strumenti di calcolo, come l'evoluzione di sistemi dinamici discreti non lineari.
Proprio James Kaput, insieme ad altri collaboratori, fra i quali Ricardo Nemirosky e Jeremy Roschelle, ha dato il via a un progetto di innovazione profonda dell'insegnamento – apprendimento del Calculus con l'obiettivo di rendere accessibile a tutti gli studenti, a partire dai primi anni della scuola secondaria di primo grado, gli elementi fondamentali della matematica che consente di studiare le variazioni delle grandezze. Le finalità, la presentazione e i materiali del progetto sono disponibili all'indirizzo internet http://www.simcalc.umassd.edu/index.htm, che consiglio caldamente di andare a visitare.
In particolare i responsabili del progetto Simcalc hanno progettato e realizzato un ambiente software, MathWorlds, che mette a disposizione degli utenti micromondi animati in cui gli attori si muovono in accordo ai grafici che vengono prodotti e che possono essere modificati dinamicamente attraverso il solo uso del mouse.
Al cuore delle prime unità didattiche, che riguardano gli argomenti pendenza, funzioni lineari ed equazioni, ci sono le relazioni tra la pendenza di un grafico che rappresenta la posizione di un corpo al variare del tempo e la velocità del corpo. In particolare è possibile vedere come cambiamenti nella velocità si riflettono sulla pendenza del grafico della legge oraria delle posizioni e, viceversa, come modifiche nella pendenza producono variazioni nella velocità degli attori del micromondo. Nella varie attività è possibile tenere contemporaneamente presenti gli aspetti numerici (tabelle dei dati), quelli grafici (grafici delle leggi orarie di posizione o di velocità) e quelli algebrico – formali (le formule che esprimono le leggi orarie di posizione o di velocità). Non si tratta solo di collegare fra loro le tre differenti rappresentazioni, ma di ancorarle, ossia di fondare il loro significato sul fenomeno del moto di un corpo. Nelle prime attività iniziano anche a farsi strada due idee fondamentali nello sviluppo del "Calculus" e cioè che la posizione può essere determinata dall'area sottesa a un grafico della velocità – tempo e

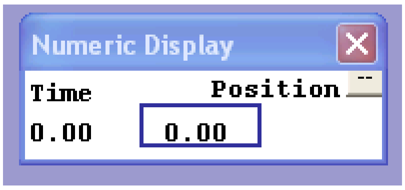
che la pendenza di un grafico posizione – tempo è essa stessa una funzione del tempo (identificata con la funzione velocità). Naturalmente la relazione tra area sottesa a un grafico velocità – tempo e posizione viene introdotta a partire da funzioni velocità che sono costanti o che sono costanti a tratti. Particolare attenzione, fin dall'inizio è posta ai numeri con segno e al loro significato in termini di distanza percorsa e di verso dello spostamento. In una successiva serie di unità si inizia a prendere in considerazione il concetto di media in differenti contesti, iniziando da quelli legati al moto, dove la media di una velocità variabile è definita come la velocità costante che bisognerebbe mantenere per percorrere, nell'intervallo di tempo fissato, la stessa distanza che il corpo percorre muovendosi con velocità variabile. Si passano poi a considerare altri contesti di quantità variabili, soprattutto in situazioni di microeconomia. Le attività conclusive riguardano i due modi fondamentali di descrivere quantità che variano: in termini di tassi di variazione (che rispondono alla domanda "qual è la velocità della variazione?") e in termini di ammontare o somma totale (per rispondere alla domanda "di quanto è variata?"). L'idea è quella di offrire strumenti per far capire che queste due modalità sono essenzialmente equivalenti; che è ciò che afferma il teorema fondamentale del calcolo, il cui significato sta proprio nell'affermazione di questa equivalenza, anche se spesso ciò è oscurato dall'espressione in termini formali, dove non solo i simboli del linguaggio algebrico, ma anche l'esplicitazione di ipotesi che coinvolgono proprietà delle funzioni, rischiano di concentrare l'attenzione su aspetti formali legati alla trasformazione di formule, invece che sugli aspetti legati al significato dei concetti coinvolti e delle situazioni di concreta applicazione. Ritornerò con maggiore sistematicità sulle radici cognitive degli aspetti più avanzati del "Calculus". Qui vorrei concludere la mia riflessione sul "simcalc project" con la descrizione di un'attività che può essere proposta a livello di scuola media di primo grado.

Come sempre, nelle attività di Mathworlds, i micromondi mettono a disposizione la possibilità di tenere presenti differenti registri di rappresentazione e descrizione delle situazioni considerate. In particolare, selezionando, nel menu "window", la funzione "matrix", è possibile vedere quali registri di rappresentazione è possibile attivare nel micromondo. La figura qui di seguito riportata indica che vi è un solo attore (che, come vedremo è un ascensore), di cui vengono dati:

a) i grafici che rappresentano le leggi orarie di posizione e di velocità (Position e Velocity)
b) la rappresentazione del mondo reale (World), ossia una schematizzazione dell'ascensore e del suo movimento
c) un segno che terrà traccia del passaggio dell'ascensore a ogni piano (Marking)

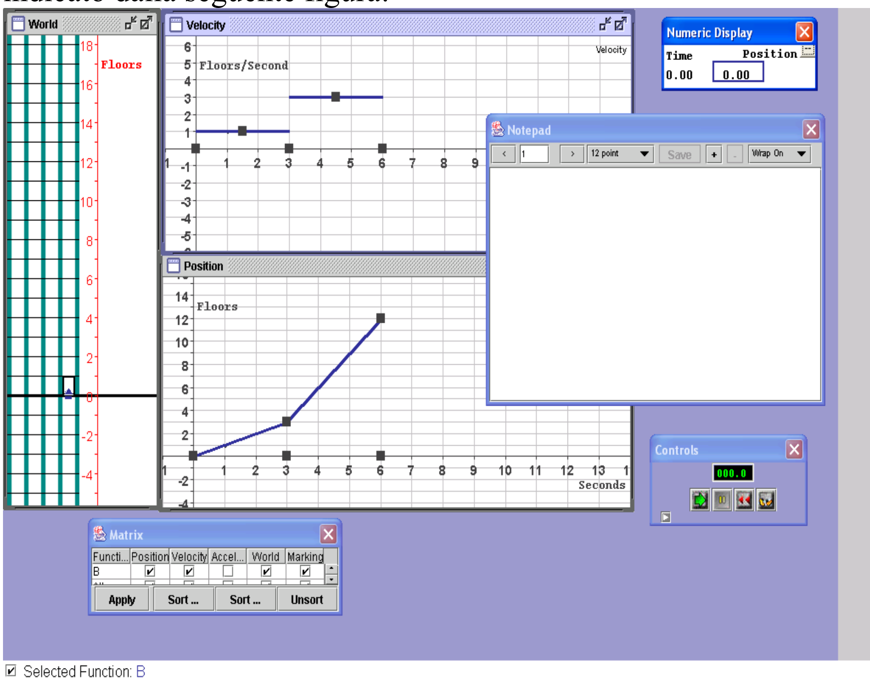


La finestra

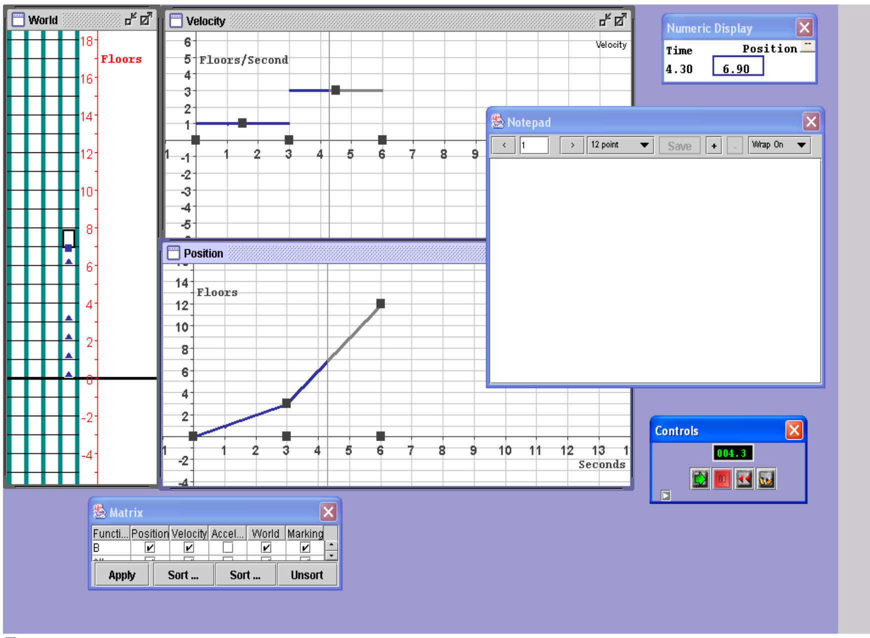


indica, invece, che è stato attivato anche il Display Numerico (accessibile sempre dal menu Window) e che quindi si ha a disposizione, per l'osservazione della simulazione del movimento dell'ascensore, anche la tabella numerica della variazione della posizione al variare del tempo.

Il foglio di lavoro di Mathworlds appare, in questo caso, come indicato dalla seguente figura:



Come si può vedere c'è un menu che consente il controllo rapido di alcune funzioni (Controls, in basso a destra) e, precisamente, da sinistra verso destra, l'avvio dell'animazione, la pausa dell'animazione, il ripristino delle condizioni iniziali e la possibilità di effettuare il movimento dell'ascensore piano per piano. C'è inoltre un notepad che può consentire allo studente la trascrizione di qualche appunto. Lanciando l'animazione, l'ascensore si muove per un tempo stabilito (che può essere modificato agendo sul menu dei controlli), secondo quanto indicato dalle leggi orarie della posizione e della velocità, come suggerisce la seguente figura che è un'istantanea ottenuta dal movimento dell'ascensore.



Selected Function: B

Con il mouse è possibile agire direttamente sui grafici delle leggi orarie della posizione e della velocità, osservando gli effetti che i cambiamenti prodotti dall'utente sull'una hanno sull'altra e osservando, in seguito, come cambia, a causa dei precedenti cambiamenti, il moto dell'ascensore una volta che sia stata rilanciata l'animazione. Naturalmente è già possibile far notare agli studenti le relazioni che legano le aree sottese al grafico della legge oraria della velocità alla posizione dell'ascensore (in tal caso ai piani percorsi), iniziando a discutere, magari anche solo come provocazione, il significato dei numeri con segno e di numeri non interi in questa particolare situazione. Ovviamente è possibile proporre problemi che consentano di fare esperienza (nella piena accezione del termine) agli studenti sulle relazioni che legano tra di loro spazio percorso, tempo trascorso e velocità di un corpo in movimento. Per esempio è possibile fissare la velocità e chiedere quanto tempo deve durare il moto dell'ascensore affinché questo

possa raggiungere il sesto piano. Oppure si chiede qual è la velocità da dare all'ascensore perché possa raggiungere, in un numero fissato di secondi un determinato piano. Insomma, è possibile considerare vari problemi in cui si fissano due grandezze e si chiede di determinare la terza, discutendo eventuali possibilità o meno quando si lavora solo con numeri interi. Tutto ciò, come scrive Kaput, non è solo una pura serie di funzionalità messe a disposizione del software e di attività da svolgere in classe, ma porta a una ricostruzione delle idee chiave del Calculus. Non si sta semplicemente affrontando con nuove metodologie le idee che soggiacciono al Calculus, considerandole come fondamentali nei curricoli scolastici a partire dai primi anni e radicandole nell'esperienza quotidiana degli studenti, ma le si sta riformulando profondamente, perseguendo la costruzione di un nuovo alfabeto per la matematica delle grandezze che variano, che potrebbe avere, per le rappresentazioni matematiche, gli stessi effetti che l'alfabeto fonetico ebbe per l'espressione scritta, soprattutto se si ha cura di utilizzare, come ulteriore supporto, dispositivi fisici come i sensori di posizione.
Concludo la presentazione di quest'ambiente per l'insegnamento – apprendimento del Calculus nella scuola secondaria di primo e secondo grado con qualche riflessione sull'uso dei sensori di posizione, ossia dispositivi che rilevano la posizione di un corpo al variare del tempo e che, collegati con altri dispositivi, per esempio una calcolatrice grafico – simbolica – programmabile, consentono di tracciare grafici di leggi orarie di posizione, velocità e accelerazione. Come scrive Radford, "mentre Galileo fece una grande fatica a capire come trovare un modo per misurare il tempo trascorso (una variabile che, contrariamente alla distanza, non può essere vista), il sistema di rilevamento sonar con calcolatrice misura tempi e distanze e l'interazione uomo – macchina consente la produzione del grafico. Tuttavia il sistema sonar con calcolatrice è molto di più che un dispositivo per economizzare tempo e azioni. Esso incorpora esperienze storico sociali di attività cognitive e

ricerche scientifiche. Oltre a essere per gli studenti uno strumento che consente di ottenere velocemente misure precise, il sistema esegue alcune azioni tipicamente umane e ne visualizza il risultato" (Radford, in stampa). Naturalmente alcuni aspetti di quelle esperienze storico – sociali, alle quali Radford fa riferimento, rimangono nascoste agli studenti: relativamente a esse il sistema calcolatrice – sensore è un sistema opaco e non trasparente. L'insegnante deve essere ben consapevole del fatto che quelle esperienze sensoriali che si possono avere con un approccio con strumenti poveri, unitamente ai lunghi tempi impiegati per rilevare e analizzare i dati sperimentali, sono inaccessibili con il sistema calcolatrice – sensore. Come scrive ancora Radford: "lo schema[3] risultante [dall'attività con i sensori] è uno schema che contiene salti e buchi. Infatti, mentre il disegno di una figura che rappresenta un triangolo rivela lo schema, non altrettanto si può affermare per il tracciamento, sul visore della calcolatrice, del grafico che rappresenta il corpo in movimento. Non c'è coincidenza né analogia tra la procedura [di tracciamento del grafico] e lo schema. Per ottenere lo schema è necessario colmare i buchi". Il problema per l'insegnante è quindi quello di fare in modo che gli studenti costruiscano significati per le immagini che vedono sullo schermo, collegandole al movimento prodotto dal corpo. La ricerca di questi significati passa quasi sempre attraverso la produzione e la condivisione di gesti, di "brandelli linguistici" che si traducono gradualmente in verbalizzazioni sempre più ricche e precise fino alla gestione di formalismi più o meno sofisticati. Naturalmente l'azione dell'insegnante è fondamentale, tanto da ritenere che difficilmente ci possa essere vero apprendimento senza un'azione consapevole e costante dell'insegnante. Se l'esperienza sensibile è necessaria per garantire la costruzione di significato, è anche vero che ogni costruzione di significato contiene ben di più di alcuni elementi legati all'esperienza: contiene soprattutto le modalità

[3] Con schema Radford intende un insieme strutturato di azioni o una catena di azioni relative al conseguimento degli obiettivi e degli scopi dell'attività.

culturali su cui si fondano le interpretazioni delle osservazioni e delle percezioni e quindi le modalità del conoscere. Così, come afferma Radford, "nell'esperienza [del sensore] in classe oltre ad asserire implicitamente, in un modo molto sottile, l'esistenza di relazioni matematiche tra posizione e tempo che descrivono il movimento del corpo, l'attività suggerisce agli studenti che tali relazioni diventano intelligibili attraverso l'esperimento" (Radford, in stampa).

Software di geometria dinamica e avvio alla dimostrazione nella scuola secondaria di secondo grado

Per quel che riguarda questa parte rinvio a quanto ho già detto in precedenti convegni anche al Centro Morin e a quanto ho scritto, in particolare su questa rivista (Arzarello & al, 1999b; Paola, 2000) e su un recente articolo comparso sulla rivista Progetto Alice (Paola, 2004). Mi limito a ricordare gli ingredienti dell'ambiente di apprendimento teso a introdurre gli studenti alle problematiche del sapere teorico e, in particolare al ruolo e alle funzioni della dimostrazione: problemi aperti, ossia problemi che propongano attività di esplorazione e osservazione, che favoriscano la produzione di congetture e motivino alla loro validazione; uso di un software di geometria dinamica con particolare attenzione agli schemi di utilizzazione della funzione di dragging come strumento per potenziare le capacità di esplorazione e osservazione e per validare congetture all'interno di Cabri. Ricordo anche che il ruolo e la funzione della dimostrazione non può essere indipendente dalle attività proposte e dagli schemi d'uso del software utilizzato e non ne è nemmeno una semplice conseguenza; per il docente, che progetta l'ambiente di insegnamento – apprendimento, invece, il ruolo e la funzione della dimostrazione devono essere ben chiari e ben distinti dall'idea di dimostrazione come processo atto a convincere o a garantire la verità di una congettura. Questa idea della dimostrazione può entrare in conflitto con un software di geometria dinamica: infatti le risorse messe a disposizione dal trascinamento, dalla misura, dalla verifica di una proprietà sono del tutto sufficienti a convincere e a garantire la verità di una congettura. La dimostrazione non aggiungerebbe alcunché a questa convinzione e, anzi, in alcuni casi potrebbe essere considerata non solo inutile, ma anche controproducente, perché il suo ruolo potrebbe essere addirittura quello di rendere meno trasparente una verità che in Cabri è evidente. L'uso di un software di geometria dinamica suggerisce di evidenziare il ruolo e la funzione della dimostrazione come attività volta a spiegare *perché* una determinata congettura vale, ossia a precisarne la relazione di conseguenza logica con gli assiomi della teoria. Come diceva Polya, prima ci si convince e solo dopo si è pronti e motivati a dimostrare, ossia a spiegare *perché*. In questo senso e solo da questa prospettiva Cabri può diventare un formidabile strumento di avvio al sapere teorico, di introduzione al ruolo e alla funzione di una teoria e, in essa, dei processi dimostrativi: Cabri infatti consente di convincersi al di là di ogni dubbio e quindi prepara e motiva a dimostrare, ossia a spiegare *perché*.

<u>Un esempio di uso delle nuove tecnologie per la costruzione di materiali che consentano attività interattive per l'introduzione al "calculus" nella scuola secondaria di secondo grado</u>

Concludo questa proposta di esempi facendo riferimento a un progetto che mi è molto caro, al quale sto lavorando ormai da tempo, ma che, nonostante ciò, sta appena muovendo i primi passi e, anzi, è in quella fase della vita nella quale i cambiamenti possibili sono molto probabili e nella quale bisogna faticare molto per farsi notare. Qui mi limiterò a descrivere le caratteristiche essenziali del progetto e le fonti di ispirazione. Per prendere visione dei materiali già prodotti ed entrare maggiormente nei dettagli del progetto invito a visitare il sito http://www.matematica.it/paola cliccando, successivamente, su "lavori in corso" e "analisi".

Il progetto si fonda su alcuni principi, fra i quali ricordo i seguenti:

- gli studenti hanno il diritto di lasciare la scuola secondaria superiore avendo un'idea del ruolo che l'analisi matematica ha avuto e ha nella storia del pensiero, nello sviluppo della scienza e di alcune sue significative applicazioni; - gli insegnanti hanno il dovere di pretendere un coinvolgimento intellettuale da parte degli studenti e di utilizzare strategie pedagogiche e didattiche opportune per costruire ambienti di insegnamento – apprendimento che motivino gli studenti e consentano loro di compiere esperienze significative;- un ambiente di insegnamento – apprendimento *sensato* dovrebbe fare continuo riferimento alle *radici cognitive* degli oggetti di studio utilizzando le diverse potenzialità che le nuove tecnologie mettono a disposizione, favorendo la transizione al formale come condensazione e non come evaporazione di significato.

Il riferimento alle radici cognitive[4] rimanda immediatamente alla principale fonte di ispirazione del progetto, ossia al lavoro che David Tall sta portando avanti da molti anni con vari collaboratori in diverse parti del mondo. I riferimenti al lavoro di Tall sono così vasti e profondi che diventa difficile elencare puntualmente tutti i riferimenti bibliografici. Suggerisco, per chi fosse interessato, di visitare il sito personale di David Tall, all'indirizzo http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ , dal quale è possibile scaricare innumerevoli e interessanti lavori, oppure di leggere almeno l'articolo (Tall, 2002), citato in bibliografia, che è a mio avviso uno dei più completi e interessanti scritti da Tall e che approfondisce e chiarisce tutte le questioni alle quali accennerò qui di seguito.

Le principali radici cognitive che stanno alla base dell'analisi matematica sono le seguenti:

---

[4] Una radice cognitiva è un concetto che è potenzialmente significativo per lo studente, in quanto è in qualche modo radicato o radicabile in un proprio campo di esperienza e che tuttavia contiene i semi di una possibile espansione cognitiva verso la formalizzazione e successivi sviluppi teorici (Tall, 1989).

a) la rettificazione locale di un grafico
b) la piattezza locale di una funzione
c) l'area sottesa al grafico di una curva

Le radici cognitive dovrebbero essere poste a fondamento di un approccio sensato (inteso nella duplice accezione di ragionevole e legato ai sensi, alla percezione, all'esperienza) all'analisi matematica, perché ciascuna di esse favorisce la costruzione di significati per gli oggetti teorici e formali del Calculus. Per esempio, la rettificazione locale di un grafico favorisce la formazione del concetto matematico di linearità locale che riguarda l'approssimazione con una funzione lineare di una funzione f in un suo punto di derivabilità. La rettificazione locale rimane a livello visivo e lega, da un punto di vista locale, il grafico alla pendenza della retta tangente in un suo punto e da quello globale la variazione della ripidità del profilo di un grafico alla funzione che rappresenta la variazione delle pendenze delle rette tangenti nei vari punti del grafico. La linearità locale focalizza invece l'attenzione sulla migliore approssimazione lineare di una funzione in un suo punto, esprimendola formalmente con l'espressione: $f(x_0+h)-f(x_0)=\lambda(x_0)h+h\varepsilon(h)$, dove $\lambda(x_0)$ dipende solo da f e da x_0 e $\varepsilon(h)$ è infinitesimo con h. Tra l'altro ciò porta a un interessante strumento per il calcolo approssimato di $f(x_0 + h)$ potendolo ridurre al calcolo di $f(x_0)$ e a quello di $\lambda(x_0)$.

Il problema diventa quanto e come lavorare con le radici cognitive per preparare gli studenti ad accettare il formale come condensazione di significato e non come evaporazione dello stesso. Tall dà, nell'articolo che ho consigliato (Tall, 2002), alcuni suggerimenti per quel che riguarda la rettificazione locale e che qui riporto:

a) utilizzare le funzioni di ingrandimento (Zoom) disponibili sui manipolatori simbolici per osservare la rettificazione locale di determinati grafici in un intorno di un loro punto;

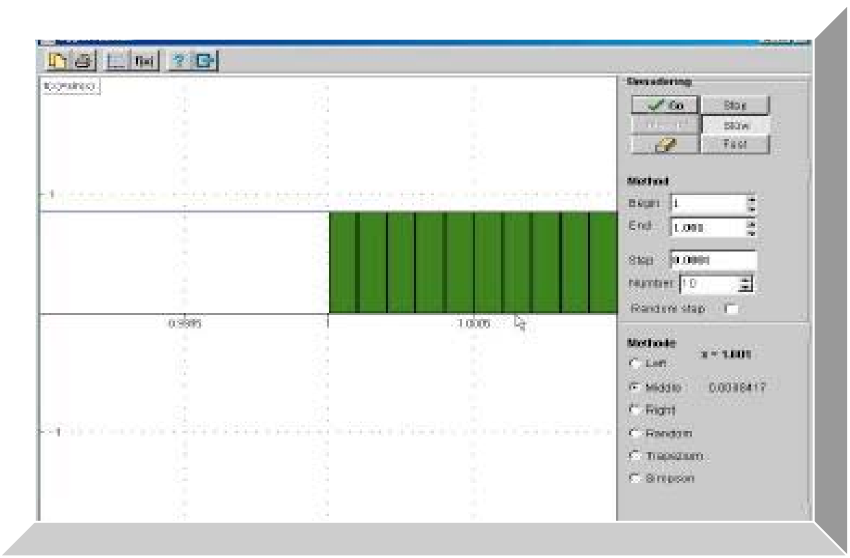
b) studiare il comportamento nell'intorno di punti angolosi del grafico di una funzione;
c) usare opportuni software per vedere come varia dinamicamente la funzione pendenza, tracciarne il grafico e confrontarlo con quello ottenuto a partire da funzioni definite formalmente;
d) esplorare le caratteristiche, al variare del parametro k delle funzioni del tipo k^x e trovare un valore di k tale che la funzione pendenza del grafico di k^x abbia grafico uguale a quello di k^x .

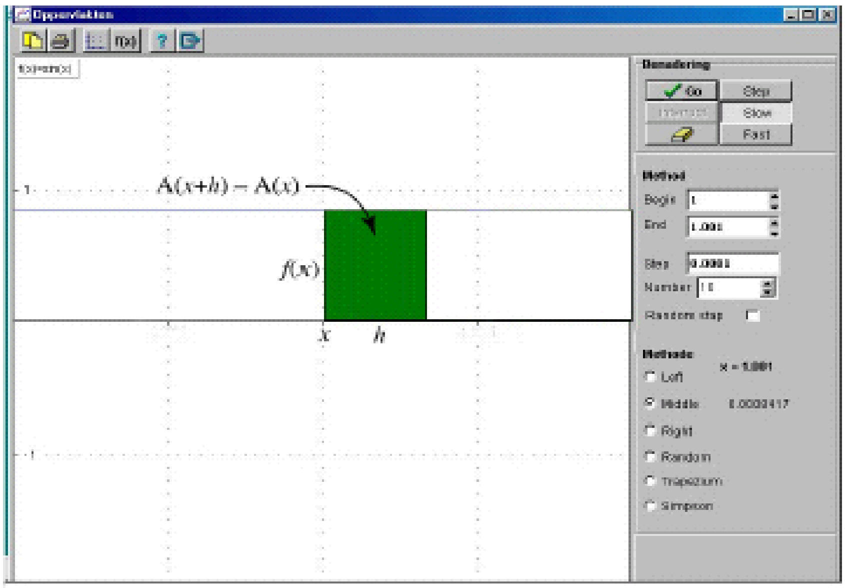
Naturalmente per poter realizzare queste esplorazioni ed azioni è necessario avere a disposizione ambienti di insegnamento – apprendimento adeguati. Qui si inserisce l'importante nozione di *generic organizer*, ossia di un ambiente (un software, un micromondo) che permette a chi apprende di fare esperienza (con esempi e controesempi) di oggetti matematici in modo fortemente percettivo e dinamico, per esempio con un mouse e osservando gli effetti delle manipolazioni realizzate con il mouse sulle rappresentazioni messe a disposizione dal software degli oggetti matematici (Tall, 1989). Il software Graphic Caluclus, costruito da David Tall e scaricabile in versione demo dal sito personale di Tall, svolge in tutto e per tutto la funzione di *generic organizer* nell'insegnamento – apprendimento del Calculus. Per esempio, un modulo del software, consente di ottenere, ciccando con il mouse in un punto del piano, un segmentino la cui pendenza varia punto per punto secondo una data funzione. Dal punto di vista delle radici cognitive, ciò equivale a dare, in ogni punto del piano, due informazioni: una relativa alla posizione in cui ci si trova e una relativa alla direzione nella quale si deve procedere. Dal punto di vista della teoria ciò vuol dire, data la funzione f, trovare una funzione la cui derivata sia f, ossia risolvere l'equazione differenziale $f\,'(x) = F(x, y)$. Il software consente allo studente di costruire, mediante operazioni di spostamento e click del mouse, una relazione tra l'equazione differenziale e una sua soluzione approssimata.

Secondo Tall la radice cognitiva che sta al fondamento del concetto di continuità di una funzione è l'idea di piattezza locale. Si può iniziare a presentare l'idea stirando un grafico orizzontalmente con un software, mentre si lascia invariata la scala verticale della finestra. Se la funzione è continua in x_0, allora è possibile determinare un intervallo di ampiezza δ centrato in x_0 tale che la funzione appaia piatta (ossia la sua oscillazione sia minore di un pixel nell'intervallo di ampiezza δ). Quest'idea, una volta identificata l'ampiezza del pixel con ε, è alla base della definizione formale di continuità che si esprime con la scrittura:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c. } \forall\ x \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Per quel che riguarda l'altra radice cognitiva, ossia la nozione di area, l'idea è quella di utilizzarla non solo per aiutare la comprensione dell'integrazione definita (con un software come graphic calculus è possibile effettuare un calcolo numerico dell'area della superficie sottesa al grafico di una funzione coprendola con rettangoli), ma anche per dare significato al teorema fondamentale del calcolo utilizzando l'idea della continuità vista in precedenza e quella di area. Per esempio, la seguente figura mostra l'area sottesa al grafico di sin x da 1 a 1.001. Il grafico del seno è stirato orizzontalmente fino ad apparire costante. Le figure seguenti richiamano immediatamente che il valore dell'integrale è circa $f(x) \cdot 0.001$, ossia richiamano il teorema fondamentale del calcolo che afferma che la variazione istantanea della funzione integrale in x è la funzione integranda calcolata in x.





Vediamo perché la nozione di continuità come possibilità di stirare un grafico fino ad appiattirlo, aiuta nella comprensione della dimostrazione formale del teorema fondamentale del calcolo.

Sia $A(x)$ l'area sottesa al grafico di una funzione continua sull'intervallo $[a,b]$ da a a un punto variabile x. Dal punto di vista intuitivo, quello delle radici cognitive, l'area esiste, perché può essere calcolata con l'approssimazione voluta; inoltre la continuità assicura che il grafico della funzione può essere stirato quanto si vuole, ossia che dato un $\varepsilon > 0$ e una striscia di ampiezza $f(x) \pm \varepsilon$,

allora si può determinare un valore $\delta > 0$ tale che il grafico, sull'intervallo $[x - \delta, x + \delta]$ giace completamente nella striscia.
Quindi, per $-\delta < h < \delta$, l'area $A(x+h) - A(x)$ giace tra $(f(x) - \varepsilon)h$ e $(f(x) + \varepsilon)h$, così, per h non nullo, $\dfrac{A(x+h) - A(x)}{h}$ giace tra $f(x) - \varepsilon$ e $f(x) + \varepsilon$.
Ecco, i materiali che sto costruendo e mettendo a punto, sono fortemente ispirati a queste idee. Come ho già detto, questi materiali sono in fase di prima stesura e solo la prima lezione è già stata meditata, vista da alcuni colleghi e sperimentata in classe. Gli altri materiali necessitano di revisione per correggere gli inevitabili errori, discutere eventuali inopportunità didattiche, completare esempi ed esercizi. Inoltre i primi materiali immessi riguardano solamente l'idea di linearizzazione locale di una funzione e quindi, anche se piuttosto consistenti, sono ancora fortemente incompleti. Sarò grato a chiunque mi farà pervenire osservazioni e critiche tese a rendere dignitosi i materiali pubblicati sul sito e a chi vorrà contribuire ad arricchirli e completarli in modo da offrire, quanto prima possibile, materiale organizzato, sistematico e affidabile per chi voglia impegnarsi nella sperimentazione di un approccio sensato (nella duplice accezione prima ricordata) al Calculus.
È difficile riassumere in poche battute quanto detto discutendo gli esempi di ambienti di insegnamento – apprendimento presentati in questa sezione. Forse si può tentare una sintesi degli aspetti più significativi e comuni alle varie presentazioni e discussioni evidenziando il fatto che le enormi potenzialità innovative delle nuove tecnologie nell'insegnamento – apprendimento della matematica, per svilupparsi, hanno bisogno di un profondo ripensamento sul sapere istituzionale. Bisogna in particolare cercare di studiare quali siano le modalità più efficaci per consentire agli studenti di utilizzare in pieno le potenzialità offerte dai nuovi media nell'apprendimento della matematica, quali siano le attività più opportune, quali gli ambienti di insegnamento – apprendimento più adeguati. Questa riflessione non può essere

condotta senza tenere in particolare considerazione varie condizioni al contorno e vari vincoli, in particolare quelli determinati dall'evoluzione delle modalità di approccio al sapere e al saper fare indotte dall'uso dei nuovi media al di fuori della aule scolastiche. Oggi, almeno al di fuori delle aule scolastiche, predomina un approccio all'apprendimento che è di tipo percettivo – motorio, piuttosto che non ricostruttivo – simbolico (quanti, ormai possono dire di aver imparato a servirsi di un sistema operativo a partire da una lettura sistematica ed esaustiva di un manuale?); questo fatto deve essere tenuto in considerazione, soprattutto se si vuole tentare un recupero a un intelligente e sensato approccio di tipo ricostruttivo – simbolico. Ciò suggerisce di utilizzare ambienti di apprendimento che consentano di fare esperienza degli oggetti di studio, come i micromondi, che mettono a disposizione dell'utente risorse che gli consentono di agire direttamente su diverse rappresentazioni degli oggetti di studio, osservando, in tempo reale, gli effetti che le azioni prodotte hanno sulle varie rappresentazioni. Esplorazioni, osservazioni, descrizioni di fatti, sono tutte attività che consentono di fare esperienza di un determinato ambiente, che favoriscono la produzione di congetture e che motivano alla loro validazione, prima con gli strumenti messi a disposizione dal software stesso, poi con argomentazioni e, infine, con la costruzione di teorie che consentano di spiegare *perché*, ossia di precisare la relazione di conseguenza logica tra le proposizioni poste a fondamento della teoria (gli assiomi) e le proposizioni che esprimono fatti e regolarità osservate (i teoremi).

Conclusioni

Quanto scritto alla fine della precedente sezione può essere a tutti gli effetti considerato una conclusione dell'articolo; vorrei però porre ancora l'attenzione su alcuni temi e problemi che dovrebbero costituire opportunità e materiale di ricerca per chi si occupa di insegnamento – apprendimento con le nuove tecnologie. Secondo

Kaput (Kaput, 2002), tre sono i campi di interesse al cuore della ricerca in educazione matematica:

a) la valutazione: bisogna studiare come gli insegnanti possono utilizzare le potenzialità offerte dalle nuove tecnologie per ottenere informazioni sui processi di pensiero degli studenti, sulle conoscenze di cui sono in possesso prima di iniziare un'attività didattica e sulla loro evoluzione durante il lavoro;
b) apprendimento degli studenti e ambienti di insegnamento – apprendimento: bisogna studiare come i vincoli e le azioni che è possibile effettuare in un ambiente di insegnamento – apprendimento interagiscono con gli oggetti di studio e con le immagini che di essi si costruiscono gli studenti;
c) insegnamento e gestione della comunicazione in classe: bisogna studiare se e come cambia la possibilità, per il docente, di gestire il flusso di informazioni in classe con l'uso delle nuove tecnologie dell'informazione e della comunicazione

In tutti e tre i campi c'è ancora molto da dire, da studiare, da fare: si tratta di usare un sano equilibrio tra la curiosità e l'entusiasmo per la novità e l'amore e l'affidabilità per la tradizione, tra il timore e la perplessità verso ciò che non si domina bene e il senso di noia o fastidio verso la ripetizione di pratiche didattiche forse datate.

> *We are early in an exciting new era for technology in Mathematics Education. Both the representational infrastructures are changing and the physical means for implementing them are changing. We are seeing new alphabets emerging, new visual modalities of human experience are being engaged and new physical devices are emerging – all at the same time. Much work need to be done.* *James Kaput*

Bibliografia

Arzarello, Olivero F, Robutti O. & Paola D: 1999, I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 22B, 309–338.

Arzarello, Olivero F, Robutti O., Paola D.: 1999b, 'Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* v. 22B, 209-234.

Assude, T.: 2001, Intégration de cabri dans les pratiques géométriques à l'école primarie, *actes de Cabri world*, Montreal.

Chevallard, Y.: 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche antropologique, *Recherches en Didactique des Matématiques*, 12 (1), 73 - 112.

D'Amore, B.: 2002, Basta con le cianfrusaglie, *La Vita Scolastica,* 8, p. 14 – 19.

Faccenda, A.M., Fulgenzi, P., Gabellini, G., Masi, F., Nardi, J. & Paternoster, F.: 2003, I modelli dinamici: costruzione di immagini mentali e avvio alla deduzione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 26 A – B, n. 6, 715 – 733.

Kaput, J.: 2002, Implications of the Shift from Isolated, Expensive Technology to Connected, Inexpensive, Divers and Ubiquitous Technologies, in (Fernando Hitt editors) *Representations and Mathematics Visualization*, Mexico, p. 80 – 109.

Paola, D.: 2000, Le definizioni: dalla parte degli studenti, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.23-B, 561-600.

Paola, D.: 2004, Software di geometria dinamica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di *Laboratorio di matematica*, Progetto Alice, I, v. 13, 103 - 121.

Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

Radford, L : (in stampa) Kant, Piaget, and the Calculator : Rethinking the Schema from a Semiotic – Cultural Perspective, in Michael Hoffmann, Johannes Lenhard and Falk Seeger (eds), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer.

Tall, D.: 1989, Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, *For the Learning of Mathematics*, **9**,3, 37–42.

Tall, D.: 2002, Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics, First Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica at Universidade do Estado do Rio De Janiero, disponbile al sito http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/.