Le definizioni: dalla parte degli studenti

Summary.
This paper discusses the problem of the mathematical objects definitions from the point of view of the didactics of mathematics and it is structured into four parts.

1. An introductions, which clarifies the meaning of the chosen title and the organisation of such work;
2. a survey of the most remarkable positions by the maths education researchers in the latter fifteen years
3. some examples of didactical experiences which should contribute to clarify some theoretical assertions of the previous part;
4. an epilogue, drawing some partial conclusions.

Domingo Paola
Liceo scientifico "A. Issel" Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

LE DEFINIZIONI: DALLA PARTE DEGLI STUDENTI

DOMINGO PAOLA, LICEO SCIENTIFICO "A. ISSEL", FINALE LIGURE
G.R.E.M.G., DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITÀ DI GENOVA

INTRODUZIONE

Che cosa vuol dire trattare il tema delle definizioni "dalla parte degli studenti"? Pensare alla difficoltà che incontrano nell'apprendimento di certi concetti? Simpatizzare per gli errori, i fraintendimenti degli studenti e riconoscere, eventualmente, in tali errori e fraintendimenti, momenti di creatività e intelligenza? Individuare attività e ambienti di apprendimento che consentano all'insegnante di aiutare lo studente nella comprensione dei concetti introdotti e nella gestione delle inevitabili discontinuità di cui è costellato ogni significativo apprendimento? Riflettere sugli ostacoli epistemologici che caratterizzano l'apprendimento di alcuni concetti particolarmente importanti della matematica, per giustificare le difficoltà che gli studenti incontrano? Io penso che voglia dire un po' di tutto questo: si tratta quindi di avviare una riflessione che si inquadra in uno spazio le cui dimensioni sono quelle logica, epistemologica e cognitiva. È lo spazio della didattica della matematica. Come scrivono Godino e Batanero (Godino & Batanero, 1999): "La didattica della matematica studia i processi di apprendimento dei saperi matematici - sia negli aspetti teorico concettuali, sia riguardo alla risoluzione dei problemi - cercando di caratterizzare i fattori che condizionano tali processi. È interessata sia a determinare il significato che gli allievi attribuiscono a termini, simboli, concetti e proposizioni matematiche, sia a come avviene la costruzione di questi significati in seguito all'istruzione. L'idea di significato ha una parte rilevante, dunque, in didattica della matematica e questo è evidenziato dall'uso che ne fanno alcuni autori interessati al fondamento di questa disciplina". In particolare, Nicholas Balacheff (Balacheff, 1990) cita il significato come parola chiave della problematica nella ricerca in didattica della matematica e pone le seguenti questioni:

- Che significato matematico delle concezioni degli allievi possiamo dedurre a partire dall'osservazione del loro comportamento?
- Che tipo di significato possono costruire gli allievi nel contesto dell'insegnamento della matematica?
- Qual è la relazione fra il significato del contenuto da insegnare e quello della conoscenza matematica scelta come riferimento?
- Come possiamo caratterizzare il significato dei concetti matematici?

In questo lavoro mi propongo di trattare il tema della definizione dal punto di vista della ricerca in didattica della matematica, perché è proprio questo punto di vista che, a mio avviso, consente di trattare il tema dalla parte studenti e, vorrei aggiungere, dalla parte degli insegnanti. Cercherò innanzitutto di dare un'idea

delle posizioni che sono state assunte e divulgate nella letteratura internazionale della ricerca in educazione matematica sul problema del definire. Nel seguito proporrò alcuni esempi di attività, dalla scuola elementare alla scuola secondaria superiore, volte a precisare il significato di alcuni oggetti della matematica: la presentazione e la discussione di tali attività hanno lo scopo di chiarire alcune affermazioni di carattere teorico riportate nella prima parte.
Come ha ben precisato Carlo Marchini (Marchini, 1992) si possono considerare tre differenti aspetti delle definizioni:

- logico: una definizione può sempre essere eliminata (in una teoria qualunque termine derivato deve sempre poter essere espresso solo in funzione dei termini primitivi; in altri termini una definizione non può essere creativa)
- epistemologico: una definizione significativa non può essere eliminata (per esempio, sotto questo aspetto, è possibile eliminare la definizione di triangolo scaleno, ma non quella di derivata)
- didattico: una definizione ha dei tempi, degli spazi e delle modalità cui deve soddisfare per poter essere introdotta. In particolare, dal punto di vista didattico, che è quello che qui intendo trattare, sorgono i seguenti problemi:

1. quali metodi utilizzare?
   Il metodo dell'ostensione, che consiste nel far vedere, nell'indicare particolari rappresentazioni di ciò che è oggetto di definizione? E, in tal caso, quali rappresentazioni scegliere per il concetto oggetto di studio? E come far sì che l'allievo non identifichi l'oggetto con una sua rappresentazione? Oppure è meglio il metodo intensivo, che consiste nel definire un concetto precisando le proprietà di cui gode? È abbastanza naturale capire che due proprietà, anche quando sono equivalenti, ossia anche quando catturano gli stessi oggetti, danno di quegli oggetti *sensi* diversi. Per esempio "essere un quadrilatero con un centro di simmetria", oppure "essere un quadrilatero con i lai paralleli" o, ancora "essere un quadrilatero con i lati opposti congruenti" identificano una stessa classe di oggetti, ma danno di essi *sensi* diversi. Un problema didattico è allora quello di individuare proprietà adeguate al particolare problema da risolvere e un altro è quello di come e quando esprimere proprietà equivalenti, ossia che definiscono una stessa classe di oggetti. O, ancora, è preferibile il metodo estensivo, che consiste nell'elencare gli oggetti che cadono sotto quel concetto? Oppure è preferibile, quando possibile, definire per induzione? O, infine, caratterizzare assiomaticamente un concetto?
2. Quale approccio adottare?
   Quello costruttivo, con il quale, quando è possibile, si definisce un concetto mediante la procedura che lo costruisce? O è meglio l'approccio dichiarativo, che consiste nel precisare le condizioni che deve soddisfare il concetto da definire?

3. Quale orientamento seguire?
   Quello storico, prestando attenzione alla tortuosità del cammino che ha caratterizzato il formarsi di certe definizioni, oppure quello logico, fornendo il risultato di anni di ricerca?

È ovvio che tutte queste domande acquistano senso solo precisando varie condizioni al contorno; per esempio l'età degli studenti, il percorso didattico seguito, le esperienze matematiche vissute, il particolare concetto da definire. Ma è anche ovvio che, dal punto di vista didattico, nessuna delle precedenti questioni può essere sottovalutata e che, in generale, tali questioni coinvolgono aspetti di carattere logico, cognitivo ed epistemologico: le tre dimensioni della didattica della matematica.

ALCUNE POSIZIONI DELLA RICERCA IN EDUCAZIONE MATEMATICA SUL PROBLEMA DEL PRECISARE IL SIGNIFICATO DEGLI OGGETTI MATEMATICI

Molti insegnanti fondano l'insegnamento-apprendimento dei concetti della matematica sulla presentazione di procedure risolutive e sull'interiorizzazione delle stesse attraverso attività ripetitive. Si pensi, per esempio all'insegnamento del calcolo algebrico o della dimostrazione in geometria (che per anni hanno costituito, insieme alla trigonometria e all'analisi, il piatto forte dell'insegnamento secondario): lo studente, in questo tipo di approccio, che molti individuano come "tradizionale", apprende per imitazione alcune tecniche, poi le consolida e interiorizza attraverso la pratica, più o meno ripetitiva, di una lunga serie di esercitazioni di graduale difficoltà. Vari studi hanno suggerito che, sebbene la ripetizione e l'interiorizzazione di procedure giuochino un ruolo fondamentale nell'apprendimento della matematica, ben pochi progressi si rilevano nella maggior parte degli studenti per quel che riguarda la comprensione delle relazioni che legano i vari concetti studiati (Thorndike, 1922; Skemp, 1976; Tall & Vinner, 1981). In particolare Schoenfeld (Schoenfeld, 1992) sottolinea che un'eccessiva attenzione agli aspetti procedurali e ripetitivi può causare una mancanza di flessibilità e quindi insuccessi nella risoluzione di problemi nuovi. Skemp (Skemp, 1976) distingue tra una comprensione di tipo strumentale e una di tipo relazionale (relational and instrumental understanding), e afferma che, spesso, nella didattica si evidenziano gli aspetti strumentali rispetto a quelli relazionali. De Villiers (de Villiers, 1994) concorda con tale impostazione, ma evidenzia che alcune definizioni sono scelte in base alla loro adeguatezza e funzionalità rispetto alla teoria che si vuole sviluppare; esiste, quindi, oltre agli aspetti strumentale e relazionale, un aspetto funzionale che non deve essere trascurato.

Altri studiosi (Gray & al, 1999; Arzarello, 2000; Radford, 2000) evidenziano il ruolo svolto dal linguaggio nell'acquisizione di competenze e nella comprensione dei concetti studiati. In studi a lungo termine, sono state osservate prestazioni

nettamente e significativamente superiori nel campo dell'algebra in quelle classi nelle quali l'introduzione all'algebra è stata effettuata curando in particolare la verbalizzazione e la gradualità nel passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico (Bazzini, 2000; Dutto, 1996). Anche nel campo della geometria, dove gli aspetti legati alla percezione sono, almeno all'inizio, prevalenti, l'importanza del linguaggio non è messa in discussione: per classificare, per esprimere proprietà, per condurre dimostrazioni, le competenze linguistiche diventano essenziali. L'attenzione al linguaggio utilizzato, sia in fase di costruzione, sia in quelle di precisazione, sistemazione e comunicazione dei concetti, viene quindi considerata dagli addetti ai lavori una variabile didattica di primaria importanza.
È chiaro che acquisire buone competenze linguistiche aiuta nella comprensione del significato degli oggetti matematici; meno banale è individuare e poi riconoscere alcune funzioni del linguaggio che indichino la presenza di attività concettuale, intesa nel senso di processi mentali tesi alla costruzione di significato. Radford (Radford, 2000) individua tre funzioni specifiche del linguaggio: la *deissi*, ossia la funzione indicatrice, ostensiva. Si tratta del primo passo nel processo di costruzione di significato. Chi apprende dà nomi, mette le lettere, per poter meglio indicare gli oggetti del discorso, mostrarli agli altri. La seconda è la funzione generatrice del linguaggio. Attraverso di essa chi apprende opera sulle rappresentazioni degli oggetti di studio, le trasforma in altre rappresentazioni e, con questa attività, inizia a costruire vero e proprio significato. Diciamo che, con l'esercizio di questa funzione, chi apprende inizia a intravedere, dietro le varie rappresentazioni su cui opera, gli oggetti matematici.
La terza funzione del linguaggio è quella logica. Si evidenzia con l'uso di costrutti linguistici del tipo "se … allora", che segnalano la presenza di deduzioni. L'esercizio delle tre funzioni del linguaggio segnala la presenza di processi di pensiero volti alla costruzione di significato, ossia di schemi, di modelli, di rappresentazioni, di immagini mentali che chi apprende si costruisce come via di accesso ai concetti e a quelli matematici in particolare.
Molti studiosi suggeriscono, per affrontare il problema della comprensione della matematica e, quindi della definizione dei concetti di tale disciplina, di porre particolare attenzione alle rappresentazioni mentali che gli studenti si costruiscono dei concetti matematici attraverso la propria esperienza didattica. Una rappresentazione mentale è uno schema, più o meno formale, più o meno operativo, che ci si forma per rappresentare determinati concetti che sono oggetto di studio. Le posizioni relative all'indagine sulle rappresentazioni mentali e alle modalità della loro costruzione sono variegate e differenziate (confrontare D'Amore, 2000 p. 145-187). Non penso, però, di commettere una eccessiva scorrettezza nel farle risalire, in qualche modo, ai lavori di Piaget, in particolare a (Piaget, 1967; 1968), nel senso che tutti i ricercatori che pongono l'attenzione sulle rappresentazioni mentali ritengono l'apprendimento come un processo di

costruzione di conoscenza da parte dell'individuo attraverso l'interazione con un certo ambiente. Eventualmente la presa di distanza da Piaget c'è sul tipo di interazione con l'ambiente e sull'enfasi che viene attribuita a questa interazione. Alcuni ricercatori, in una prospettiva vigotskiana, pongono l'accento sull'importanza dell'interazione sociale e dell'uso di artefatti culturali nel processo di costruzione della conoscenza. Tutti i ricercatori che lavorano in un paradigma costruttivista (in senso lato) dell'apprendimento, concordano sul fatto che la conoscenza venga costruita e organizzata in schemi mentali, in reti concettuali che consentono (ma al tempo stesso guidano e, pertanto, talvolta possono ostacolare) l'acquisizione di nuova conoscenza. È chiaro che, in questa prospettiva, il problema didattico di individuare attività che possano favorire la costruzione di reti concettuali, di rappresentazioni mentali che siano adeguate all'acquisizione dei concetti, diventa essenziale. In questa prospettiva si capisce anche che l'uso delle stesse parole, degli stessi simboli, non garantisce che ci si stia riferendo agli stessi concetti o che, a essi, venga assegnato lo stesso significato; e questo può accadere sia quando si è all'interno di un sistema formale, sia nella situazione più interessante (dal punto di vista didattico) di naturale comunicazione tra insegnante e studente. Ciò suggerisce che le modalità di costruzione, organizzazione e comunicazione della conoscenza debbano diventare oggetto di attenzione sistematica da parte degli insegnanti e oggetto di studio dei ricercatori (Furinghetti & Paola, 2000).
In un celebre articolo, Gérard Vergnaud (Vergnaud, 1982) poneva l'accento sul fatto che concetti, modelli e teorie degli studenti sono influenzati dalle situazioni e dalle precedenti esperienze che gli studenti hanno incontrato. In particolare Vergnaud introduceva la nozione di "campo concettuale" come "un insieme di situazioni, la padronanza delle quali richiede di possedere una varietà di concetti, procedure e rappresentazioni simboliche strettamente interconnesse". Per Vergnaud un concetto è una terna (S, I, ζ) dove "S è l'insieme di situazioni che rendono significativo il concetto; I è l'insieme degli invarianti che costituiscono il concetto; ζ è l'insieme dei simboli utilizzati per rappresentare il concetto o le sue proprietà o le situazioni che a esso si riferiscono" (Vergnaud, 1982). Si noti come in questa impostazione si evidenzi l'importanza dei simboli e delle rappresentazioni usati.
Per Raymond Duval (Duval, 1998) è necessario mettere l'alunno a contatto con diverse rappresentazioni dei concetti oggetto di studio. Secondo Duval, infatti, l'uso di differenti registri semiotici consente, al tempo stesso, di rendere il concetto significativo per lo studente e di evitare che questi confonda il concetto con una sua rappresentazione. Duval precisa inoltre che non può esserci noesi (ossia apprendimento concettuale di un oggetto matematico) senza semiosi: in altri termini, è proprio l'uso di diversi registri di rappresentazione che consente l'esercizio della noesi.

Juan Godino e Carmen Batanero (Godino & Batanero, 1999), nella precisazione di che cosa si deve intendere per oggetto matematico, prendono in considerazione tre aspetti della matematica: quello di risoluzione di problemi intesa come attività sociale, quello di linguaggio simbolico e, infine, l'aspetto di sistema concettuale logicamente organizzato.
L'analisi di Godino e Batanero porta a individuare una dialettica fra un'origine personale e una istituzionale delle conoscenze matematiche; detto in atri termini, il significato degli oggetti matematici risulta da una dialettica fra i sensi personali degli studenti e il significato attribuito a tali oggetti dalle istituzioni. Il punto di partenza è la risoluzione dei problemi: per conseguire tale obiettivo i soggetti ricorrono a pratiche (ossia ad azioni, rappresentazioni, traduzioni da un registro ad altri registri) che sono ritenute significative ai fini della risoluzione dei problemi. Ed è proprio questa attività di risoluzione di problemi che, secondo gli autori e in una prospettiva di costruttivismo sociale (Ernest, 1991), porta all'emergere del significato degli oggetti matematici come unità culturali: si tratta di entità che evolvono nel tempo e che dipendono fortemente dal contesto. Godino e Batanero effettuano un'analisi assai raffinata e puntuale sul concetto stesso di *oggetto matematico*, partendo dalla posizione di Chevallard, secondo il quale "Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X o una istituzione I riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più precisamente si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto rappresentato da $R(X,O)$ (rispettivamente $R(I,O)$) e detto relazione personale da X a O (rispettivamente relazione istituzionale da I a O)" (Chevallard, 1992, p.9). Qui il termine istituzione è da intendersi come insieme di persone che sono coinvolte o interessate a una stessa classe di situazioni problematiche, che condividono determinate pratiche sociali e che la comunità riconosce in qualche modo come adatte a studiare quelle situazioni problematiche. La dialettica pratiche personali/pratiche istituzionali porta alla formazione di oggetti personali e di oggetti istituzionali. In particolare, "un oggetto istituzionale O_I è un emergente del sistema di pratiche istituzionali associate a un campo di problemi", mentre "un oggetto personale O_P è un emergente del sistema di pratiche personali associate a un campo di problemi" (Godino e Batanero, 1999, p.21 e p. 23). Dopo aver precisato che cosa intendono con oggetto personale e oggetto istituzionale, Godino e Batanero passano a chiarire che cosa si deve intendere per *significato di un oggetto istituzionale* e per *significato di un oggetto personale* (p. 25-26): "il significato di un oggetto istituzionale O_I è il sistema di pratiche istituzionali associate al campo di problemi da cui emerge l'oggetto O_I in un dato momento"; "il significato di un oggetto personale O_P è il sistema di pratiche personali che una persona p usa per risolvere il campo di problemi da cui emerge l'oggetto O_P in un dato momento". Dalle due precedenti definizioni, segue che per valutare il significato di un oggetto, sia esso personale o

istituzionale, è sufficiente valutare le pratiche associate al campo di problemi da cui emerge l'oggetto. Ritornando alla dialettica sensi personali/significato istituzionale, è chiaro che un problema rilevante dal punto di vista didattico è quello della *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985), ossia la necessità di adattare la conoscenza matematica (i significati istituzionali) all'insegnamento: "la trasposizione si manifesta nella differenza che c'è tra le direttive accademiche (a livello di ricerca, come sapere sapiente) su una determinata conoscenza e l'adattamento didattico sulla stessa" (Godino & Batanero, 1999, p. 40).
L'analisi di Godino e Batanero ha il pregio di esplicitare alcune questioni didattiche di particolare rilievo sulle quali le attenzioni dei ricercatori dovrebbero concentrarsi ancora di più di quanto avviene attualmente:

- la caratterizzazione dei significati istituzionali degli oggetti matematici, precisando i campi di problemi più significativi della ricerca matematica, le teorie di maggior peso, i concetti fondamentali
- l'individuazione di strumenti di indagine sui significati degli oggetti personali (di insegnanti e studenti)
- la progettazione di ambienti di apprendimento e di attività didattiche volte a supportare gli studenti e gli insegnanti nel colmare l'eventuale divario esistente tra significati istituzionali e significati personali degli oggetti matematici, con particolare attenzione al problema della trasposizione didattica.

Nello studio della modalità di formazione dei concetti, alcuni ricercatori hanno messo in luce il ruolo dell'azione, delle operazioni sugli oggetti della matematica nella strutturazione e ristrutturazione della conoscenza. Per esempio, Anna Sfard (Sfard, 1991) afferma che per parlare di un oggetto matematico dobbiamo essere capaci di trattarlo come un prodotto di qualche processo, senza confonderlo con il processo medesimo: si parte da processi effettuati su oggetti familiari e via via tali oggetti si trasformano. Quando il processo viene visto solo in termini di input/output e non di passi intermedi si ha quella che Sfard chiama *condensazione*. Infine, quando i trasformati sono visti come oggetti essi stessi, senza bisogno di pensare ai processi che hanno permesso di ottenerli si ha quella che Sfard chiama *reificazione*. La teoria della Sfard individua due poli relativamente alla formazione dei concetti: uno operazionale, che focalizza l'attenzione sui processi e l'altro strutturale, che focalizza l'attenzione sugli oggetti.
Guershon Harel e James Kaput (Harel & Kaput, 1991) evidenziano l'importanza della formazione dei concetti per l'attività matematica: i concetti ("conceptual entities") possono essere pensati come il risultato della compressione di grandi quantità di informazioni diffuse in unità individuali, che possono essere meglio processate e utilizzate. Per esempio, se si vuole effettuare un'operazione di integrazione di una funzione, pensare a quella funzione come a un processo che

associa a ciascun elemento di un insieme uno e un solo elemento di un altro insieme, richiede di processare una mole eccessiva di informazioni e quindi un notevole dispendio della memoria di lavoro. In tal caso è necessario pensare alla funzione come a un oggetto su cui l'operatore di integrazione opera. Secondo Harel e Kaput molti studenti che presentano difficoltà in matematica non hanno questa capacità di concepire le funzioni come oggetti e ciò porta a forti ostacoli nell'apprendimento. Per esempio, alcuni studenti interpretano il simbolo $f'(x)$ nel seguente modo: per un input x c'è un output $f(x)$ e, per tale output si fa la derivata $f'(x)$.

Per Kaput la costruzione dei concetti incorpora la crescita verticale della conoscenza matematica (Kaput, 1987): per esempio, al livello più basso l'azione del contare porta al concetto di numero intero, quella del dividere in parti porta al concetto di numero frazionario; le funzioni come regole per trasformare numeri diventano oggetti sui quali è possibile operare, per esempio mediante differenziazione (Harel & Kaput, 1991)

Altri ricercatori, fra cui Dubinsky, (Cottrill & al., 1996) introducono nella loro teoria le *azioni*, che sono trasformazioni fisiche o mentali di oggetti. Quando tali azioni sono intenzionali, si caratterizzano come processi che possono più tardi diventare essi stessi oggetti (si immagini, per esempio, una funzione vista prima come azione sugli elementi del dominio e poi come oggetto essa stessa). Un insieme coerente di azioni, processi e oggetti costituisce quello che Dubinsky e collaboratori chiamano uno *schema*.

Gray e Tall (Gray & Tall, 1994) utilizzano il termine *procetto* per indicare un amalgama tra un processo, un concetto che può essere considerato come output di quel processo, e un simbolo che può evocare sia il processo, sia il concetto.

Guershon Harel e David Tall (Harel & Tall, 1991), nell'analisi della costruzione del significato degli oggetti matematici, affermano che è opportuno distinguere tra matematica elementare e matematica superiore ("advanced mathematics") . Per i due autori, la matematica superiore si contrappone a quella elementare, perché nella prima prevalgono gli aspetti formali legati al sapere teorico, mentre nella seconda prevalgono gli aspetti percettivi ed empirici. Come è precisato in un altro articolo (Gray, Pinto, Pitta & Tall, 1999), vi sono differenti modalità di formazione dei concetti, a seconda che si lavori nel campo della matematica elementare o nel campo della matematica superiore: "nella matematica superiore, le proprietà di un concetto formale sono dedotte come teoremi […] Questa inversione didattica - costruire un concetto da proprietà note, invece di ricavare proprietà da oggetti noti - è causa di nuove specie di difficoltà cognitive […]. Noi vediamo lo sviluppo dei concetti formali formulato in termini di costruzione della definizione del concetto. Ciò evidenzia non solo la complessità della definizione […], ma anche il conflitto tra l'immagine del concetto, che possiede proprietà e il concetto formale, le cui proprietà devono essere dimostrate a partire dalla definizione" (Gray, Pinto, Pitta & Tall, 1999, p. 117, 118). In un certo senso nel passaggio dalla matematica elementare a quella superiore si passa dall'attività di descrivere a quella di definire: dall'osservazione di un mondo che in qualche modo è già dato a uno che viene costruito in modo tale da godere di determinate caratteristiche. Gli strumenti che vengono usati per descrivere il mondo della matematica elementare sono l'osservazione, l'azione, l'esemplificazione; lo strumento utilizzato per l'esplorazione del mondo della matematica superiore è l'attività dimostrativa, quella che consente di determinare le proprietà di cui godono gli oggetti formalmente definiti. Si capisce che il secondo approccio sia fonte di enormi difficoltà cognitive: per comprendere un concetto formalmente definito si devono studiarne le proprietà attraverso lo strumento dimostrazione; d'altra parte, a livello formale, il concetto di dimostrazione ha senso relativamente a una teoria. Ciò vuol dire che si deve avere almeno un'idea di che cosa sia una teoria che include i concetti di assioma, termini primitivi, regole inferenziali, definizioni e dimostrazioni. Come si vede si tratta di un problema didattico di non facile soluzione, acuito dal fatto che lo studente viene messo di fronte a definizioni date da altri, senza aver fatto un'adeguata esperienza che, invece, sia l'insegnante, sia, soprattutto, il matematico hanno avuto occasione di fare. La constatazione che esiste un delicato problema didattico porta inevitabilmente alla domanda: "come possiamo aiutare gli studenti a comprendere i concetti matematici oggetto di studio e, in particolare, come aiutarli nel delicato passaggio dalla matematica elementare a quella superiore?"

Una prima risposta, condivisa da molti ricercatori in didattica della matematica, è quella di dedicare più tempo e attenzione, rispetto a quelli che usualmente vengono dedicati, alla progettazione e alla realizzazione di attività volte a potenziare le esperienze matematiche degli studenti e l'acquisizione di competenze linguistiche necessarie a descrivere adeguatamente le esperienze effettuate. In altri termini, gli autori che suggeriscono questa risposta ritengono che anche la conoscenza matematica si fondi su un approccio percettivo e su un uso forte del linguaggio naturale per descrivere esperienze e organizzare le conoscenze; solo in seguito, solo dopo aver effettuato varie e significative esperienze e aver raggiunto discrete competenze linguistiche per descrivere, tramite il linguaggio naturale, le esperienze effettuate, ha senso proporre formalizzazioni graduali e ha senso richiedere l'uso di termini specifici per la matematica.

Posizioni di questo tipo sono state assunte dalla ricerca didattica italiana, in particolare relativamente all'introduzione alla dimostrazione. Tale ricerca è intervenuta a livello internazionale con vari contributi che si caratterizzano sia per l'attenzione alla riflessione storica ed epistemologica, sia per la messa a punto di ambienti di apprendimento che aiutino gli studenti nel delicato

passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione (Boero, Garuti & Mariotti, 1996; Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; Furinghetti & Paola, 1998; Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 1999).
Queste ricerche suggeriscono che impegnare gli studenti in compiti del tipo "dimostra che…" possa addirittura bloccarli, in particolare quelli più deboli. Invece è stato osservato che, se si impegna lo studente in attività che richiedono e favoriscono la produzione di congetture, nella successiva attività di costruzione della dimostrazione o di confutazione delle congetture prodotte, egli riesce a organizzare questi processi in maniera coerente: sembra quindi che sia possibile individuare una continuità cognitiva, nel passaggio dalle argomentazioni alle dimostrazioni, fondata sulla produzione di congetture (Paola & Robutti, 2000).
Riassumendo, possiamo interpretare la costruzione dei concetti come un processo che parte dagli aspetti percettivi, intuitivi, concreti, dalle osservazioni e, attraverso generalizzazioni e astrazioni, porta verso prodotti che appartengono sempre più al sapere teorico. Tale attività porta verso il formale come decantazione semantica, ma con la possibilità di riprendere il significato ogni qualvolta sia necessario. Nella teoria sistemata le definizioni dei concetti sono punti di partenza dai quali si sviluppano le dimostrazioni che portano a precisare e ad esplicitare altre proprietà di cui il concetto gode. Nel processo di insegnamento - apprendimento, le definizioni dei concetti sono un punto di arrivo, perché l'insegnante deve risolvere, in via prioritaria, il problema didattico di garantire agli studenti le condizioni sufficienti alla costruzione del significato.

ALCUNI ESEMPI DI ESPERIENZE DIDATTICHE RELATIVE AL PROBLEMA DEL SIGNIFICATO DEGLI OGGETTI DELLA MATEMATICA: LA CIRCONFERENZA

Le considerazioni che proporrò in questo paragrafo si basano su un articolo di ricerca in educazione matematica (Chassapis, 1999) in cui si pone l'attenzione sui processi mediante i quali bambini di scuola elementare sviluppano il concetto matematico di circonferenza, utilizzando diversi strumenti per rappresentare circonferenze. L'importanza dell'uso di strumenti nell'apprendimento e nello sviluppo concettuale è stato argomento di primaria importanza nella ricerca di Vygotskij (Vygotskij, 1978), che ha affermato che i processi di formazione intellettuale dell'uomo richiedono l'uso di strumenti tecnici e di simboli, come mediatori dell'azione e del pensiero e, al tempo stesso, l'uso di un mediatore piuttosto di un altro può portare a guardare gli oggetti e i concetti di apprendimento da differenti prospettive. L'esperienza descritta da Chassapis, riguarda, come ho già detto, l'uso di diversi strumenti tecnici (matite, oggetti circolari, mascherine con all'interno forme circolari, compasso) e simbolici (linguaggio naturale, disegni, diagrammi) per precisare il concetto di circonferenza con bambini di otto anni che non avevano ancora utilizzato un compasso. È bene chiarire che cosa si intende con "precisazione del concetto di

circonferenza". I bambini sono già entrati in contatto, fin dall'età pre-scolare, con forme circolari. Si può quindi dire che possiedono un'immagine mentale spontanea (nel senso che non è indotta da un'attività specifica e finalizzata di apprendimento) dell'oggetto "circonferenza". L'attività proposta, grazie all'azione di mediazione degli strumenti utilizzati, all'interazione sociale con i compagni e all'azione mirata e intenzionale di supporto dell'insegnante, dovrebbe portare dall'immagine spontanea al concetto formale di circonferenza, ossia alla definizione matematica. Secondo Vygotskij (Vygotskij, 1966) i concetti formali, al contrario di quelli spontanei, sono caratterizzati da consapevolezza e controllo intenzionale. La precisazione del concetto di circonferenza consiste proprio in questa transizione dal concetto spontaneo a quello della teoria matematica.
Inizialmente ai bambini è stato chiesto di disegnare circonferenze a mano. In questa fase i bambini hanno reagito con delusione di fronte ai loro prodotti. Questa reazione suggerisce che essi abbiano un concetto spontaneo di circonferenza che confrontano con i disegni da loro realizzati, che giudicano *non sufficientemente rotondi, non lisci, che girano in modo non regolare*… Di fronte a domande del tipo *che cos'è per te una circonferenza*? i bambini non riescono a trovare le parole e danno riposte come *non riesco a spiegarlo a parole*. Forniscono invece esempi di oggetti o disegni (ma di questi non sono soddisfatti e ne indicano le caratteristiche negative). In seguito ai bambini sono stati dati oggetti circolari e mascherine con forme circolari. Dall'analisi che è stata effettuata risulta che l'uso di questi nuovi strumenti, pur consentendo ai bambini di ottenere prodotti soddisfacenti (*ora il cerchio lo avevo già e così ho potuto tracciarlo seguendo il suo bordo*), non contribuiscono a trasformare in modo significativo l'immagine mentale di circonferenza che i bambini hanno: soprattutto non aiutano nella formulazione di enunciati che riescano a tradurre, sul piano linguistico, le immagini che i bambini possiedono. Il passaggio all'uso del compasso è invece risolutivo. Innanzitutto il compasso induce un concetto dinamico di circonferenza, in quanto lo studente che lo utilizza vede generarsi una traccia che ha in mente, ma che non è ancora fisicamente presente, come lo è nel caso degli oggetti e delle mascherine con forme circolari. Inoltre il compasso consente di evidenziare il ruolo strategico del centro e del raggio per definire una circonferenza.

ALCUNI ESEMPI DI ESPERIENZE DIDATTICHE RELATIVE AL PROBLEMA DEL SIGNIFICATO DEGLI OGGETTI DELLA MATEMATICA: L'ELLISSE

Se si chiede "Che cos'è un'ellisse?" a uno studente che ha effettuato un percorso standard sulle coniche, ci si aspettano risposte che possono essere ricondotte a uno dei seguenti enunciati:

E_1: l'ellisse è il luogo delle intersezioni delle generatrici di un cono circolare retto con un piano che forma con l'asse del cono un angolo maggiore della semiapertura del cono

E_2: l'ellisse è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti dati, detti fuochi

E_3: l'ellisse è una curva che, in un sistema di riferimento cartesiano xOy, opportunamente scelto, ha un'equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

E_4: l'ellisse è una qualunque curva piana ottenuta applicando a una circonferenza un'affinità

Come ha scritto Marta Menghini (Menghini, 1991), "dalla scuola media all'Università, con il crescere del bagaglio matematico, le coniche vengono presentate sotto diversi aspetti […], ma accade talora che non vengano collegate fra loro le varie definizioni […] Eppure quei collegamenti fra le diverse definizioni permettono di passare da situazioni e metodi puramente geometrici a situazioni e metodi algebrico-analitici, sottolineando così l'unità esistente fra i due linguaggi principali della matematica". Prendendo spunto dal già citato articolo di Marta Menghini e da un articolo comparso su Mathematics Teacher (De Temple, 1990), proporrò alcune idee su come mettere in relazione i diversi approcci alle coniche. Nella parte introduttiva, di presentazione dei quadri teorici relativi al significato degli oggetti matematici in cui si muove l'attuale ricerca didattica, abbiamo visto che utilizzare differenti rappresentazioni per uno stesso oggetto e riconoscerne le reciproche interrelazioni, consente di comprendere meglio il significato di quell'oggetto. Far vedere le coniche sotto diversi punti di vista ed esplicitare le relazioni fra essi consente quindi di affinare la comprensione del concetto di conica.

Vediamo innanzitutto come dalla definizione E_1 si possa ricavare E_2. L'idea, dovuta al matematico G.P. Dandelin[1] nel 1822, si basa sull'inscrivere in un cono circolare retto due sfere S_1 e S_2 tangenti alla superficie conica secondo due circonferenze parallele. Le due sfere sono tangenti, inoltre, a un piano π che seca la superficie conica.

Teorema di Dandelin: Sia dato un cono circolare retto indefinito di semiapertura θ e un piano π che lo seca formando un angolo ϕ con l'asse del cono. Se $\phi \neq \theta$, allora esistono due sfere inscritte nella superficie conica e tangenti al piano π. Se $\phi = \theta$, allora ne esiste una sola. I punti di contatto delle sfere inscritte nella superficie conica con il piano π si dicono fuochi della sezione conica (ossia della curva intersezione tra π e la superficie conica). Si dice inoltre direttrice

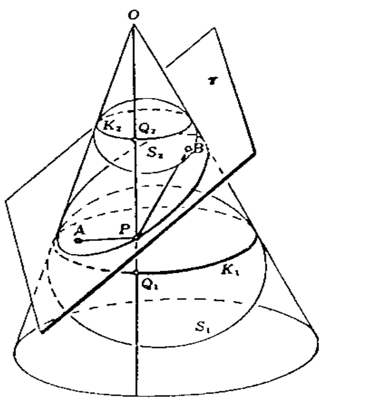
---

[1] In effetti un risultato analogo, riferito però solo per le coniche a centro, ossia per l'ellisse e per l'iperbole, è attribuito anche a L.A. Quetelet (1796-1874), come si precisa in (Menghini, 1991, p. 91)

corrispondente a un fuoco la retta intersezione tra π e il piano che passa per la circonferenza di contatto tra superficie conica con la sfera corrispondente a tale fuoco.
Dimostriamo che, date le due sfere S_1 e S_2, dato il piano π per cui $\phi > \theta$, detto P un generico punto della sezione conica, detti A e B i punti di tangenza delle sfere con il piano π, la sezione conica che si ottiene è caratterizzata dalla proprietà $PA + PB =$ costante.

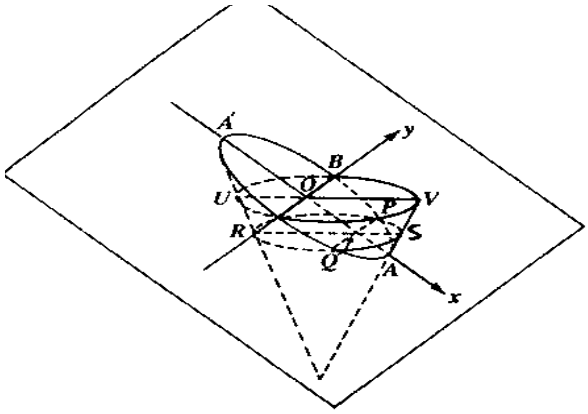
Dimostrazione

Siano K_1 e K_2 le circonferenze lungo le quali le due sfere sono tangenti alla superficie conica. Si tracci la retta passante per P e per il vertice O del cono. La semiretta OP giace interamente sulla superficie del cono e interseca le due circonferenze K_1 e K_2 in due punti Q_1 e Q_2 .



Abbiamo che $PA = PQ_1$, poiché si tratta dei segmenti di tangenza condotti da uno stesso punto a una sfera. Per lo stesso motivo, $PB = PQ_2$. Quindi, per ogni punto P della sezione conica, $PA + PB = PQ_1 + PQ_2$. Ma $PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$ è una costante del problema. Ecco quindi che la costruzione di Dandelin mette in relazione la definizione E_1, con la caratterizzazione dell'ellisse come luogo di punti per cui è costante la somma delle distanze da due punti dati (i fuochi).
La relazione di conseguenza tra E_2 ed E_3 è quella che viene in genere presentata a scuola; vediamo invece come sia possibile ottenere E_3 come diretta conseguenza di E_1 (De Temple, 1990). Consideriamo un cono circolare retto e un piano π secante che formi con l'asse del cono un angolo maggiore della semiapertura del cono. In tal caso, come sappiamo, la sezione conica è un'ellisse. Scegliamo, sul piano π, un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy che abbia l'origine nel centro di simmetria dell'ellisse e tale che il semiasse maggiore della conica giaccia sull'asse delle x.

In riferimento alla figura, le coordinate di un punto P (x, y) dell'ellisse, appartenente al primo quadrante, sono rappresentate dalla misura dei segmenti OQ e PQ. Siano, inoltre, $OA = a$ e $OB = b$.



PRS è un triangolo inscritto nella semicirconferenza di diametro RS avente come altezza relativa all'ipotenusa il segmento PQ. Per il secondo teorema di Euclide abbiamo che (1) $QR \cdot QS = PQ^2$. Analogamente, UVB è un triangolo inscritto nella semicirconferenza di diametro UV e avente come altezza relativa all'ipotenusa il segmento OB. Quindi (2) $OU \cdot OV = OB^2$.

Consideriamo ora i triangoli simili QRA' e OUA'. Abbiamo (3) $\frac{QR}{OU} = \frac{QA'}{OA'}$

Analogamente, consideriamo i triangoli simili QSA e OVA.

Abbiamo (4) $\frac{QS}{OV} = \frac{QA}{OA}$

Moltiplichiamo membro a membro le due uguaglianze (3) e (4). Abbiamo:

(5) $\frac{QR \cdot QS}{OU \cdot OV} = \frac{QA' \cdot QA}{OA' \cdot OA}$ D'altra parte, (6) $QA' = A'O + OQ$ e

(7) $QA = AO - OQ$. Quindi, sostituendo (6) e (7) in (5) abbiamo:(8) $\frac{QR \cdot QS}{OU \cdot OV} = \frac{(A'O + OQ) \cdot (AO - OQ)}{OA' \cdot OA} = \left(1 + \frac{OQ}{OA'}\right)\left(1 - \frac{OQ}{OA}\right)$ Utilizziamo ora la (1), la (2) e il fatto che $OA = OA'$. Otteniamo: (9) $\frac{PQ^2}{OB^2} = 1 - \frac{OQ^2}{OA^2}$, ossia, per come è stato scelto il sistema di riferimento, $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, ossia $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, che è l'equazione che compare in E_3.

Un altro approccio interessante al concetto di conica è quello suggerito dal fatto che tutte le curve che si possono rappresentare su un piano cartesiano con un'equazione di secondo grado in due incognite sono coniche. Se si trova un problema che definisce un luogo di punti nel piano, che porta a un'equazione di secondo grado, ma espresso in termini diversi da quelli usualmente presi in considerazione, allora si è trovata una definizione di conica diversa da quella che fa uso delle proprietà focali.
Ricordiamo, per esempio, la classica definizione di parabola come luogo di punti P per cui la distanza da un punto F dato è uguale alla distanza PH da una retta r data. In tal caso l'equazione $\frac{PF}{PH}=1$ definisce la parabola di fuoco F e direttrice r. Sappiamo che si tratta di un'equazione di secondo grado; ma che cosa succede se, invece di considerare l'equazione $\frac{PF}{PH}=1$, generalizziamo il problema e consideriamo l'equazione $\frac{PF}{PH}=k$, con k parametro reale positivo?
Ora, l'introduzione del parametro positivo k in luogo della costante 1, non può portare a un cambiamento del grado dell'equazione che, pertanto, risulta sempre di secondo grado. Si tratta quindi, per $k = 1$ di una parabola e, per $k \neq 1$ di una conica diversa da una parabola. Scegliamo un sistema di riferimento che abbia l'origine in F e l'asse delle ascisse parallelo alla direttrice r. Sia $y = d$ l'equazione della direttrice. Sia $P(x, y)$ il generico punto della curva che soddisfa l'equazione $\frac{PF}{PH}=k$. Svolgiamo i calcoli per vedere che tipo di coniche si ottengono al variare di k: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|d-y|}=k$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2=k^2(d-y)^2\ \Rightarrow x^2+(1-k^2)y^2+2k^2dy-k^2d^2=0$$

Come si può notare, se $k = 1$ si ottiene l'equazione di una parabola; se $k > 1$ si ottiene quella di un'iperbole e se $k < 1$ quella di un'ellisse. Ecco allora un'altra possibile definizione dell'ellisse: il luogo dei punti del piano per cui la distanza da un punto fisso detto fuoco è k volte la distanza da una retta fissa detta direttrice (con $0 < k < 1$).
Un approccio complementare al concetto di conica è quello offerto dalle varie costruzioni delle coniche. Sempre prendendo come riferimento l'ellisse, vediamo ora diverse possibili costruzioni di un'ellisse che consentono di offrire allo studente diversi *sensi* dell'ellisse, veicolati proprio dagli strumenti che si scelgono per effettuare la costruzione.

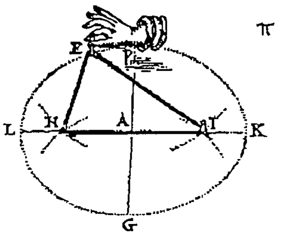
Lo studio di proprietà geometriche di curve e di coniche, in particolare mediante l'uso di macchine matematiche, è un progetto avviato e realizzato a Modena, nell'ambito delle iniziative del gruppo di ricerca didattica coordinato da Mariolina Bartolini Bussi. Gli esempi che seguono sono ispirati dal lavoro del N.R.D. sopra citato e sono tratti da una tesi di Nicoletta Francone, (Francone, 1998) conservata presso il Dipartimento di Matematica Università di Torino, nella quale viene descritta un'esperienza didattica con l'uso di macchine matematiche (svolta anche presso una delle mie classi) inquadrandola in un'analisi didattica attenta agli aspetti sia logici, sia epistemologici, sia cognitivi.
Il lavoro del gruppo di Modena è consultabile all'indirizzo Internet http://www.museo.unimo.it/theatrum.
Quello tra geometria e macchine è un rapporto che dura da molto tempo, basti pensare agli aspetti costruttivi presenti negli *Elementi* di Euclide, ai lavori di Archimede ed Erone, all'ottica e alla geometria di Cartesio, dove le macchine svolgono il duplice ruolo di utensili e di strumenti teorici. Più tardi, dopo la sistemazione della meccanica newtoniana, il rapporto tra macchine e geometria si fa ancora più stretto: Monge, Poncelet, Chasles si occupano in modo specifico di *geometria delle macchine*. Si può dire che la *cinematica* o *geometria del movimento* fu uno dei più importanti settori della ricerca matematica dell'Ottocento. Ancora oggi, nella robotica, è possibile riconoscere, in senso lato, un legame tra meccanismi articolati e geometria.
Le macchine matematiche sono, in senso lato, macchine che incorporano una legge che le vincola a tracciare curve caratterizzate da una proprietà definita da quella legge. L'uso delle macchine matematiche dà luogo a un processo di identificazione tra strumento e curva, simile a quello tra equazione e curva portato dall'uso della geometria analitica. Il processo di identificazione è meno forte, sia per il carattere intrinsecamente locale dei grafici tracciati con le macchine matematiche, sia per la difficoltà che in genere si ha nella realizzazione di buone macchine dal punto di vista tecnico. È comunque interessante il fatto che agli studenti si possono proporre quattro approcci a una curva fortemente differenziati: l'esplicitazione, nel linguaggio naturale, di una proprietà che definisce la curva; l'esplicitazione, nel linguaggio dell'algebra, di una proprietà che definisce la curva; la rappresentazione grafica; una macchina che traccia la curva, anche se localmente. Tra l'altro, nel 1876 viene enunciato un risultato che trovo di una bellezza straordinaria: si tratta del teorema di Kempe, che dimostra che ogni curva algebrica può essere disegnata, localmente, per mezzo di opportuni meccanismi articolati. Questo teorema accomuna in un unico destino il concetto di curva algebrica, quello di equazione di una curva algebrica e di meccanismo articolato che la realizza.
La progettazione di un ambiente di apprendimento che faccia uso di macchine matematiche è confortato dalle seguenti considerazioni:

- l'importanza delle tecnologie nello sviluppo della civiltà e della conoscenza e, di conseguenza, della cultura umana (ipotesi epistemologica)
- l'opportunità di un approccio di carattere percettivo ai concetti astratti e, quindi, l'opportunità dell'uso di modelli fisici per aiutare nella comprensione degli oggetti matematici (ipotesi cognitiva)
- il teorema di Kempe (punto di vista tecnico della disciplina)

Si aggiungano, inoltre, le discussioni matematiche nei piccoli gruppi e alla presenza dell'intera classe originate dai tentativi di capire che cosa fa una certa macchina e perché fa proprio così, in un percorso che parte dalle argomentazioni e, attraverso la produzione e la validazione di congetture, arriva alla dimostrazione.

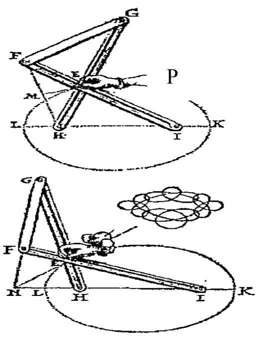
Vediamo alcuni esempi di macchine che tracciano ellissi. Iniziamo dal classico meccanismo a filo teso e inestensibile, che ingloba la definizione dell'ellisse come luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. La figura seguente è tratta dal testo di Franz van Schooten (van Schooten, 1657, p.326).

Nei punti *H* e *I* sono stati praticati due piccoli fori, attraverso i quali passa un filo

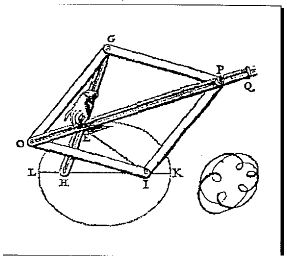


di lunghezza costante *l* maggiore della distanza *HI*. Una punta scrivente, fissata in *E*, traccia un'ellisse di fuochi *H* e *I*.

Sulla stessa proprietà ora presa in considerazione, si basa un altro meccanismo illustrato nella figura sotto riportata e tratta sempre da (van Schooten, 1657, p. 340-341).

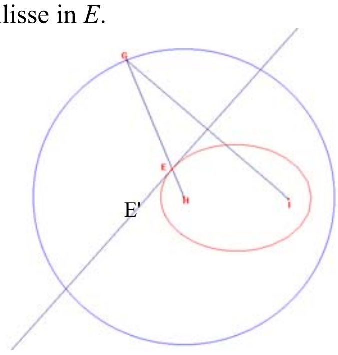


Tale meccanismo disegna un'ellisse di fuochi *H* e *I*. Esso è costituito da due aste di uguale lunghezza, *FI* e *GH*, incernierate nei punti *H* e *I* fissati al piano e incernierate all'asta *FG* la cui lunghezza è uguale a quella del segmento *HI*.
La lunghezza delle aste *FI* e *GH* deve essere maggiore della lunghezza dell'asta *FG*. Se, in riferimento alla prima figura, prendiamo in considerazione i triangoli *GFH* e *IHF*, possiamo notare che essi sono congruenti (*FG* = *HI*, *FH* in comune *FI* = *GH*). Quindi $\widehat{GHF} = \widehat{IFH}$. Il triangolo *FEH* è isoscele sulla base *FH* e, pertanto, *FE* = *EH*. Per differenza di segmenti congruenti abbiamo quindi che *GE* = *EI*. Possiamo allora concludere che *EH* + *EI* = *FI* = costante. Abbiamo così dimostrato che lo strumento costruisce un'ellisse di fuochi *H* e *I*. Si potrebbe pensare che uno strumento di questo tipo non veicoli informazioni diverse rispetto a quello a filo teso e quindi sia completamente alternativo a esso. In realtà così non è: con un po' di attenzione si può notare che questo strumento consente di dare, per ogni punto della curva, la retta tangente all'ellisse in quel punto. Se, infatti, *M* è il punto medio di *FH*, la retta *EM* corrisponde alla tangente all'ellisse in *E*.
Un altro strumento, ancora riportato in (van Schooten, 1657, p. 342), consente di costruire un'ellisse: si tratta del rombo articolato *OIPG* di figura, formato da quattro aste di uguale lunghezza tra loro incernierate. Il punto *I* è fissato al piano. Un'altra asta, *HG* è fissata al piano nel punto *H*. L'asta *OP* è la diagonale del

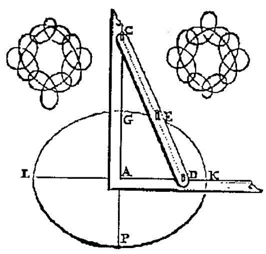


rombo (e quindi asse del segmento *GI*). Il punto *E* di intersezione tra *OP* e *GH* descrive l'ellisse di fuochi *H* e *I*. Infatti, poiché *OP* è asse di *GI*, possiamo dire che *EI* = *EG*. Quindi *HE* + *EI* = *HG* = costante. Questo nuovo meccanismo è forse più difficile da costruire del precedente, ma è abbastanza facile simularne il suo funzionamento con il software Cabri géomètre. L'uso di strumenti informatici insieme alle macchine matematiche può essere di particolare aiuto nell'evidenziare le proprietà sulle quali la macchina si basa per tracciare la curva. Con Cabri, infatti, l'attenzione si sposta dai problemi tecnici di realizzazione della macchina in modo che funzioni secondo le attese (per esempio non abbia problemi dovuti alla bontà dei materiali scelti, al tipo di pezzi usati per realizzare le varie cerniere ecc.) ai problemi di definire correttamente nel linguaggio di Cabri le varie procedure per simulare la macchina.

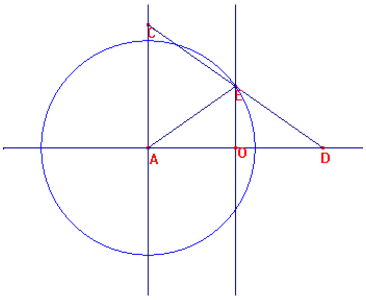
Notando che l'ellisse viene descritta dal rombo articolato di van Schooten dal punto *E*, intersezione di *HG* e *PO*, al variare di *G* su una circonferenza di centro *H* e raggio *HG*, possiamo immaginare di dover risolvere con Cabri il seguente problema:
siano dati in un piano una circonferenza di centro H e un punto I interno alla circonferenza. Per ogni punto G della circonferenza, sia E l'intersezione della retta HG con l'asse del segmento IG. Determinare il luogo descritto da E.
Sulla figura in Cabri si può fare osservare agli studenti che la curva costruita è l'ellisse di fuochi *I* e *H* e che l'asse di *GI* è tangente all'ellisse in *E*. La proprietà *EH+EI* = *GH* = costante, discende dalla costruzione stessa. Per dimostrare che l'asse di *GH* è tangente in *E* all'ellisse si può seguire il seguente ragionamento: consideriamo un punto *E*' dell'asse di *GH,* ma distinto da *E*. Si ha: *E 'H + E'I* = *E'H+E'G*. Consideriamo ora il triangolo *E'HG*. Abbiamo che *E'H+E'G > GH*. Quindi *E'* non appartiene all'ellisse. Possiamo così concludere che l'unico punto dell'asse di *GH* che appartiene all'ellisse è *E*. Quindi l'asse di *GH* è tangente all'ellisse in *E*.



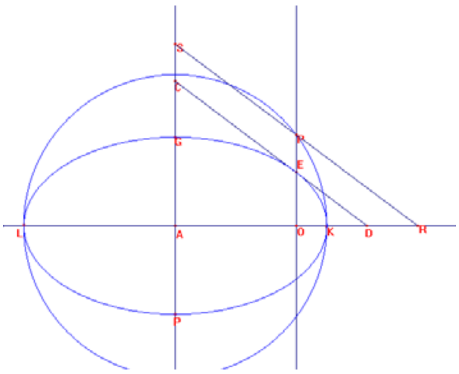
Vediamo ancora un altro strumento che utilizza, in modo nascosto, la proprietà che un'ellisse può essere vista come la trasformata di una circonferenza mediante un'affinità. Lo strumento è inoltre interessante per la sua semplicità: come mostra l'illustrazione tratta da (van Schooten, 1657, p. 325), si tratta di una squadra sui sostegni della quale è libera di scorrere un'asta *CD*. I punti *C* e *D* sono liberi di



scorrere, rispettivamente, sulle guide *CA* e *AK*, fino a quando il punto *C* o il punto *D* non coincidono con il vertice *A* della squadra. A seguito di tale movimento, il punto *E* descrive un'ellisse.
Per dimostrare quanto affermato, consideriamo il caso in cui il punto *E* sia punto medio di *CD*. Tracciamo la perpendicolare ad *AD* passante per *E*. Sia *O* il punto di intersezione tra tale perpendicolare e *AD*. Consideriamo il triangolo *CDA*. La retta *EO* che passa per il punto medio di *CD* ed è parallela al lato *CA* passa anche per il punto medio del lato *AD*. Quindi *AO=OD*. Consideriamo i triangoli *AOE* e



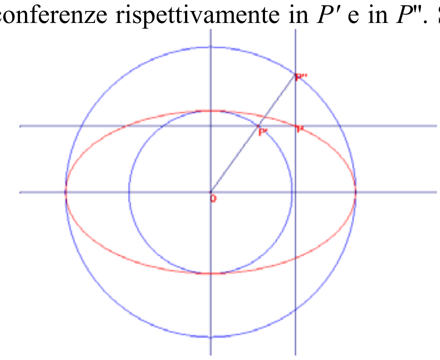
DOE. Essi sono congruenti perché hanno il lato *EO* in comune, *AO* = *OD* per dimostrazione precedente e gli angoli di vertice *O* retti. Allora il triangolo *AED* è isoscele (*AE* = *ED*) . Possiamo quindi concludere che *AE* = *ED*=*CE*. Quanto ora dimostrato vale per qualunque posizione di *E*, quindi possiamo dire che il punto *E*, per qualunque posizione dell'asta è equidistante da *A*, ossia traccia una circonferenza di centro *A* e raggio *AE* = *ED*. Vediamo ora che cosa accade quando *E* non è punto medio di *CD*. Siano *CE*= *a* e *ED* = *b*.
Disegniamo una circonferenza di raggio *CE* = *a*, usando un'asta *SR*, parallela a *CD*, di lunghezza 2*a*, come suggerito in figura:



Notiamo innanzitutto che P è punto medio di SR. Prendiamo ora in considerazione i triangoli simili POR ed EOD. Abbiamo che $PO:EO = PR:ED = a:b$. Passiamo ora a considerare i punti in un sistema di riferimento cartesiano di origine A e avente l'asse delle ascisse coincidente con la retta AD. Per la simmetria del problema ci limitiamo a considerare configurazioni nel primo quadrante. Sia $P\ (x,y)$, allora possiamo scrivere $y : EO = a : b$, ossia $y = \frac{a}{b} EO$.

Il punto E ha coordinate (x, y'), dove $y' = EO$. Poiché il punto P appartiene alla circonferenza di centro A e raggio a, la relazione tra le coordinate di P è la seguente: $x^2 + y^2 = a^2$. Poiché $y = \frac{a}{b} y'$, abbiamo che l'equazione della curva descritta da E è $x^2 + \left(\frac{a}{b} y'\right)^2 = a^2$, ossia $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Abbiamo quindi dimostrato che il punto E descrive un'ellisse.

Un altro modo per evidenziare il punto di vista dell'ellisse come trasformata mediante affinità di una circonferenza, è quello di riprendere, con Cabri, una classica costruzione. Si tracciano due circonferenze concentriche di raggi b e a. Si traccia una retta che passa per il centro O comune alle due circonferenze e che incontra le due circonferenze rispettivamente in P' e in P''. Si considera il punto



P avente come ascissa l'ascissa di P'' e come ordinata l'ordinata di P', come suggerito dalla seguente figura: P genera un'ellisse di centro O e di semiassi a e b.

Dimostrazione: Sia ω l'angolo formato dai raggi vettori OP' *e* OP'' con l'asse delle ascisse. In tal caso abbiamo

$P'\ (b \cos \omega,\ b \operatorname{sen} \omega)$ e $P''\ (a \cos \omega,\ a \operatorname{sen} \omega)$. Quindi $P\ (a \cos \omega,\ b \operatorname{sen} \omega)$. L'equazione cartesiana del luogo descritto da P può essere ricavata dal sistema:

$$\begin{cases} x = a\cos\varpi \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\varpi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos\varpi \\ \dfrac{y}{b} = \mathrm{sen}\,\varpi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ che, come volevamo dimostrare, è l'equazione di un'ellisse di centro *O* e semiassi *a* e *b*.

Se l'obiettivo di un percorso piuttosto impegnativo, prolungato nel tempo, fosse solo quello di precisare il concetto di ellisse o, più in generale, quello di conica, forse sarebbe meglio lasciar perdere e accontentarsi che gli studenti sappiano sulle coniche quello che mediamente imparano in un percorso più standard. Mi sembra, però, che la significatività del percorso cui ho accennato, consista essenzialmente in tre punti:

- la progettazione di ambienti di apprendimento che favoriscono la produzione di congetture e la successiva attività di validazione delle stesse sia nei lavori in piccoli gruppi, sia nelle discussioni collettive coordinate dall'insegnante
- la presenza, anche a livello di studenti di scuola superiore, di aspetti legati alla percezione, accanto ad attività di astrazione, generalizzazione, concettualizzazione e, quindi, di avvio al pensiero teorico
- l'uso di strumenti che hanno una funzione di mediazione semiotica tra linguaggio e pensiero e che contribuiscono ad avviare al pensiero teorico.

Le macchine matematiche possono costituire un vero e proprio campo di esperienza per gli studenti. Il termine campo di esperienza è da intendersi nel senso di (Boero & al., 1995): gli oggetti concreti dell'attività, ossia le macchine matematiche, ma anche Cabri, i disegni, costituiscono il contesto esterno del campo di esperienza. Il contesto interno degli studenti viene modificato e definito attraverso le attività di esplorazione con le macchine o di costruzione delle stesse, sia nei piccoli gruppi di lavoro, sia durante le discussioni matematiche coordinate dall'insegnante. Il contesto interno dell'insegnante può essere modificato e definito attraverso la fase di studio relativa alla progettazione dell'ambiente di apprendimento e nella successiva fase di interazione con gli studenti. Il lavoro si inquadra in una prospettiva vigotskiana, con particolare riferimento alla costruzione sociale del sapere e alla mediazione semiotica realizzata dalle macchine matematiche e dal software Cabri.

Vorrei soffermarmi ancora un po' sull'importanza della mediazione offerta dagli artefatti culturali, che si rivelano veri e propri catalizzatori del processo di costruzione del sapere. Un antropologo di Torino, Il professor Salza, ritiene (La Repubblica, 3 Marzo 2000, p.33) che l'amigdala (una specie di ascia bifacciale in pietra inventata dagli ominidi africani e ritrovata recentemente in Cina) è più un oggetto linguistico, che un utensile. "L'Homo abilis costruiva tali oggetti un milione e mezzo di anni fa ed era anatomicamente incapace di parlare, almeno nel senso che intendiamo noi. Eppure dall'impronta lasciata dal suo endocranio

risulta che avesse già sviluppata l'area di Broca, la zona del cervello deputata al linguaggio. Come si spiega? La ragione potrebbe essere che l'attività manuale ha inciso retroattivamente sulla struttura del cervello, ha cioè creato nel cervello un'architettura che prelude al linguaggio […]. A monte del linguaggio ci deve essere un sostrato cognitivo, tant'è vero che un autore americano parla in proposito di *mentalese*, intendendo che prima di pronunciare parole con la bocca occorre imparare a parlare nel cervello. L'amigdala è un ottimo strumento di costruzione del *mentalese*".
L'ipotesi del Professor Salza è fortemente intrigante: se, con un po' di coraggio, la si estende, si ha che l'attività manuale deve essere considerata a tutti gli effetti un'attività cognitiva, probabilmente essenziale per preparare quella linguistica. Ecco quindi che l'uso di strumenti, come le macchine matematiche, ma anche come Cabri, diventano essenziali per preparare gli studenti al controllo linguistico delle proprie azioni, funzione basilare per comprendere e comunicare il significato degli oggetti di studio.

ALCUNI ESEMPI DI ESPERIENZE DIDATTICHE RELATIVE AL PROBLEMA DEL SIGNIFICATO DEGLI OGGETTI DELLA MATEMATICA: AVVIO ALLA DIMOSTRAZIONE

Prendiamo ora in considerazione alcune attività volte a precisare, in un arco di tempo molto lungo, che va dalla scuola elementare alla scuola secondaria superiore, la nozione di dimostrazione. Ho scelto questa nozione essenzialmente per tre motivi:

- la dimostrazione è attività particolarmente importante in matematica: molti matematici si sono spinti fino a identificarla con la caratteristica essenziale della matematica matura. Ecco, quindi, che, se il corso di matematica deve in qualche modo indicare le caratteristiche essenziali dell'attività matematica, non può fare a meno di porsi come obiettivo quello di precisare e chiarire che cosa è una dimostrazione.
- Nella ricerca didattica si è assistito, da qualche anno a questa parte, al rifiorire degli interessi e delle ricerche intorno alla dimostrazione.
- Fa parte delle ricerche che ormai da più di quattro anni conduco con il gruppo di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello e con quello di Genova coordinato da Fulvia Furinghetti

Mi propongo di far vedere che è possibile predisporre ambienti di apprendimento utili a supportare lo studente quando si confronta con le inevitabili discontinuità epistemologiche che caratterizzano la nozione di dimostrazione e l'attività dimostrativa. Ritengo che molte delle difficoltà di apprendimento legate al concetto di dimostrazione siano spesso dovute a inopportunità didattiche e, pertanto, possano essere, se non eliminate, almeno rese gestibili dallo studente con opportuni accorgimenti didattici.

Propongo esperienze effettuate da diversi ricercatori con alunni di diverso livello scolare: per la scuola elementare mi sono ispirato ai lavori del N.R.D. di Modena coordinato da Mariolina Bartolini Bussi; per la scuola media ai lavori del N.R.D. di Genova coordinato da Paolo Boero; per la scuola superiore ai lavori del N.R.D. di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello. Si tratta di tre nuclei di ricerca che fanno riferimento a un quadro teorico comune, che sta riscuotendo attenzione e interesse anche in campo internazionale.
Le esperienze che descrivo focalizzano l'attenzione sul campo di conoscenze della geometria euclidea. È bene precisare che non può né deve essere considerato l'unico campo di conoscenze possibile: è necessario condurre parallelamente alle attività qui descritte, altre in campi diversi, a partire da quello dell'aritmetica, che è fonte inesauribile di problemi interessanti, motivanti, significativi, ma al tempo stesso formulabili in modo chiaro, comprensibile anche a studenti con poca esperienza matematica.

Ingranaggi e primi approcci alla dimostrazione nella scuola elementare
L'esperienza che propongo è stata effettuata da alcune ricercatrici del gruppo di Modena coordinato da Mariolina Bartolini Bussi (Bartolini Bussi, Boni, Ferri & Garuti, 1999). Tale lavoro si inquadra, dal punto di vista teorico, in una prospettiva vigotskiana, per l'enfasi data sia alla dimensione sociale del processo di costruzione della conoscenza, sia alla mediazione semiotica che si opera per mezzo di "artefatti culturali".
L'esperienza è stata condotta in diverse classi di scuola elementare e in un primo anno di scuola media (anche se le situazioni a cui faccio riferimento nel seguito riguardano principalmente un'esperienza effettuata in una quarta elementare). Lo scopo era quello di avviare i bambini al pensiero teorico, in particolare ai teoremi matematici. I campi di esperienza utilizzati sono stati:

- quello dei meccanismi e degli ingranaggi che fanno parte della vita quotidiana extrascolastica degli studenti, come gli apriscatole, il cambio di una bicicletta, gli orologi meccanici, il cavatappi a doppia leva …; .
- quello della geometria studiata a scuola (cerchi, rette, piani, rotazione…)

L'idea è quella di coinvolgere gli alunni in discussioni che consentano all'insegnante di avere informazioni sui loro modelli spontanei e agli alunni di riflettere su tali modelli e di confrontarli con il sapere sapiente. In altri termini, le attività svolte a scuola hanno lo scopo di garantire a tutti i bambini, anche a quelli che non sono così fortunati da avere genitori che possano seguirli con attenzione e competenza a casa, di poter riflettere sulle pratiche concrete che essi usano nella vita quotidiana per creare un dialogo tra queste pratiche e il pensiero teorico relativo agli ingranaggi, alla loro costruzione e al loro funzionamento.
Una delle tesi fondamentali di questo lavoro è stata così riassunta (Bartolini Bussi, Bergamini & al., 1997): "gli ingranaggi concreti devono essere trasformati

in strumenti di mediazione semiotica dialogici, cioè con almeno due voci in dialogo tra loro: la voce della pratica (nella quale problemi particolari vengono risolti con metodi ad hoc e si realizza la validazione attraverso l'esperimento) e la voce della teoria, nella quale problemi generali vengono risolti con metodi generali e la validazione si realizza con il ragionamento dimostrativo".
Per quel che riguarda la voce della teoria, il riferimento è in effetti duplice: da una parte la voce di Erone, per spiegare il funzionamento dell'ingranaggio, dall'altra quella di Euclide, per risolvere problemi di costruzione e di modellizzazione delle ruote dentate con circonferenze.
Gli ingranaggi che si sono presi in considerazione sono ingranaggi piani, costituiti da file o collane di ruote dentate che ingranano a due a due. Più precisamente:
"una fila di ruote dentate è un ingranaggio piano composto da ruote ingranate, i cui centri di rotazione sono disposti su una linea aperta tale che:

a) ogni ruota della fila (tranne la prima e l'ultima) ingrana esattamente altre due ruote
b) la prima ruota ingrana solo la seconda
c) l'ultima ruota ingrana solo la penultima.

Una collana di ruote dentate è un ingranaggio piano composto da ruote ingranate con i centri di rotazione disposti su una linea chiusa con la seguente proprietà:
ogni ruota della collana ingrana esattamente con altre due ruote" (Bartolini Bussi, Bergamini & al, 1997)
Il postulato che è stato assunto (come generalizzazione di osservazioni sperimentali) è il seguente:
due ruote, montate su due assi e ingranate tra loro per mezzo di denti, si muovono in versi contrari
Come conseguenza di questo postulato vengono enunciati e dimostrati vari teoremi. Un esempio di teorema è il seguente:
una collana di tre ruote dentate non funziona.
La dimostrazione viene condotta per assurdo: se girasse, allora le ruote, prese a coppie, dovrebbero girare in sensi opposti (per il postulato prima enunciato). Immaginiamo che la ruota A giri in senso orario. Allora B e C devono girare in senso antiorario; ma, sempre per il postulato, ciò è impossibile, perché B e C devono girare in sensi opposti. Analogamente si raggiunge un assurdo supponendo che A ruoti in senso antiorario. Quindi l'ingranaggio non può funzionare.
Una generalizzazione del precedente teorema è il seguente: *una collana di ruote dentate non funziona se le ruote sono in numero dispari.*
Le attività svolte nella classe quarta erano state precedute da un lavoro sviluppatosi nell'arco di due anni: nella seconda elementare gli alunni avevano visitato un mulino e, nella successiva attività didattica, avevano cercato di

riprodurre con un disegno il mulino e alcuni dei suoi ingranaggi, per poi descrivere verbalmente il suo funzionamento. Nella classe terza, con l'aiuto dell'insegnante, i bambini avevano affrontato lo studio del funzionamento del cambio di una bicicletta. I problemi relativi agli ingranaggi erano stati posti dall'insegnante, che aveva chiesto alla classe di disegnare una coppia di ruote dentate e di descrivere il suo funzionamento. Il primo problema posto nella classe quarta riguardava il funzionamento di un correttore costruito su un ingranaggio a due ruote dentate. I bambini avevano il compito di descriverne il funzionamento, sia mediante disegni, sia aiutandosi con i gesti, sia mediante il linguaggio naturale (Bartolini Bussi & al., 1999).
Lo scopo di questa prima attività era quello di iniziare a elaborare un linguaggio specifico sull'argomento "ingranaggi" che fosse condiviso dalla classe. Per esempio, frasi come *le ruote girano simultaneamente*, oppure *Le ruote girano in senso orario* erano, alla fine dell'attività, entrate a far parte del linguaggio comunemente utilizzato in classe.
Un mese più tardi, nella classe quarta, veniva assegnato il seguente problema: "Che cosa si può dire di un ingranaggio formato da tre ruote dentate? Come possono essere messe insieme? Potete costruire le varie situazioni possibili sia disegnandole, sia ritagliando modellini di carta. Ricordate che dovete dare spiegazioni e scrivere le vostre osservazioni". La lettura dei protocolli degli studenti è molto istruttiva: rimando a (Bartolini Bussi, Bergamini & al., 1997; 1999) per un esame più approfondito; qui riporto solo il seguente estratto del protocollo di un'alunna, che evidenzia la presenza di pensiero ipotetico-deduttivo (la descrizione è riferita a una fila di tre ruote denate):
"la ruota 1 gira, ma non sappiamo in quale direzione; diciamo che gira in senso orario, allora la ruota n.2 gira in senso antiorario, questo è sicuro e la n.3, come pensate che ruoti? Io lo so: gira come la ruota 1. Sapete perché? Perché esse devono *ingranare* in direzioni opposte. Possiamo fare questo anche con le dita. Ho disegnato due ruote con le frecce in direzioni opposte". (Bartolini Bussi, Bergamini & al., 1997)
Alle attività di osservazione, scoperta, produzione di congetture e ai tentativi di validazione effettuati dai bambini hanno fatto seguito discussioni guidate dall'insegnante alla presenza dell'intera classe. Lo scopo di queste discussioni era quello di rendere consapevoli gli allievi del fatto che molti di loro non erano riusciti a giustificare esaurientemente il *perché* le congetture prodotte erano valide. Riuscire a precisare il *perché* avrebbe contribuito a chiarire e capire meglio le situazioni prese in considerazione e descritte. La discussione matematica collettiva coordinata dall'insegnante era anche un modo per mettere a confronto le produzioni degli studenti e il sapere teorico istituzionale sull'argomento. A questo proposito, il gruppo di ricerca che ha coordinato la sperimentazione, si è occupato di preparare un documento approfondito sulla

teoria delle ruote dentate che è stato letto e commentato proprio con l'intento di confrontarlo con le produzioni degli studenti. (Bartolini Bussi, Bergamini & al., 1997).
Un lavoro di questo tipo consente di iniziare a effettuare dimostrazioni e a costruire piccole teorie locali: entrambe le attività consentono di precisare il concetto di dimostrazione che, nel bene e nel male, ha caratterizzato e caratterizza la matematica e che, pertanto, non può non essere preso in seria considerazione da ogni proposta che ambisca a considerarsi, in senso lato, formativa.

Un approccio alla dimostrazione nella scuola media: dalle ombre ai "teoremi" del Sole

Il lavoro che ora presento è stato progettato e realizzato nell'ambito delle iniziative del N.R.D. di Genova coordinato da Paolo Boero. L'ipotesi su cui si basa l'esperienza che descrivo è che gli allievi, anche di giovane età (in tal caso alunni di terza media), possono produrre congetture e validarle mediante controesempi o dimostrazioni se sono messi in un ambiente di apprendimento che favorisca processi di esplorazione dinamica delle situazioni proposte (Boero, Garuti, Lemut, Mariotti, 1996; Garuti, 1996). In particolare, si ritiene che questa prima fase di esplorazione, produzione di congetture, comunicazione delle esperienze effettuate e delle congetture prodotte, costituisca un processo al quale l'alunno si collega in modo coerente e significativo durante la successiva fase di dimostrazione degli enunciati prodotti.
L'esperienza si è svolta in due classi di terza media di 16 e 20 alunni, con la stessa insegnante che aveva seguito le due classi fin dal primo anno di scuola media. La descrizione dettagliata dell'esperienza si può trovare in (Garuti, 1996); qui di seguito riporto gli elementi che ritengo essenziali per comprenderla.
Gli alunni erano già abituati a produrre ipotesi in vari ambiti ed erano soliti trascrivere i loro ragionamenti, in modo da dare all'insegnante informazioni significative sui processi di pensiero messi in atto durante le attività proposte. Gli alunni avevano inoltre già svolto attività in cui si richiedeva l'esplorazione di situazioni di carattere aritmetico o geometrico, la produzione di congetture e la successiva validazione. Nel caso che sto descrivendo, la richiesta di produrre congetture, tradurle in enunciati linguisticamente precisi e, successivamente, dimostrare gli enunciati prodotti, è avvenuta nel campo di esperienza delle ombre del Sole. Nei due anni precedenti gli alunni avevano già svolto circa ottanta ore di attività in classe riguardanti l'osservazione e la registrazione del fenomeno in giorni diversi e, in alcuni giorni, durante le diverse ore della mattina. Gli allievi avevano anche risolto alcuni problemi relativi alla determinazione dell'altezza di oggetti inaccessibili utilizzando le ombre prodotte da tali oggetti in giornate di Sole. Il campo di esperienza delle ombre del Sole è

stato scelto perché offre la possibilità di effettuare (o ricordare) esperienze ed esplorazioni significative, che portano alla produzione di congetture di non facile dimostrazione e, soprattutto, non sostituibili con la realizzazione di disegni.
L'attività proposta nelle due classi si è articolata nelle seguenti fasi:

a) Assegnazione del seguente problema: "Abbiamo visto negli anni scorsi che le ombre di due bastoni verticali sul terreno orizzontale sono sempre parallele. Che cosa si può dire a proposito del parallelismo delle ombre nel caso di un bastone verticale e di un bastone non verticale? Le ombre possono essere parallele? Qualche volta? Quando? Sempre? Mai? Formula la tua congettura come enunciato generale" Durante questa fase gli allievi hanno lavorato sia individualmente, sia a coppie (a scelta degli alunni) e avevano a disposizione sottili bastoncini e piattaforme di polistirolo per poter effettuare esplorazioni dinamiche della situazione problematica. È bene precisare che si è lavorato in assenza di luce artificiale e che si è fatto in modo che esperienze di verifica diretta con la luce solare fossero difficilmente effettuabili.
b) Esplorazione della situazione problematica e produzione delle congetture: gli alunni lavorano con bastoncini e matite. In alcuni casi sono essi a muoversi, simulando le posizioni del Sole, in altri casi muovono matite e bastoncini. Altri alunni chiudono gli occhi, forse per richiamare esperienze relative alla "ombre del Sole".
c) Discussione, guidata dall'insegnante, sulle congetture prodotte: lo scopo è quello di scegliere collettivamente enunciati di congetture corrette, che rispecchino i diversi approcci al problema evidenziatisi nelle prime due fasi.
d) Sistemazione degli enunciati attraverso discussioni matematiche collettive guidate dall'insegnante: lo scopo era quello di pervenire ad enunciati più precisi dal punto di vista linguistico di quelli proposti dagli studenti. Dopo la discussione si è pervenuti ai due seguenti enunciati: 1. *Se raggi del Sole appartengono al piano verticale del bastone inclinato le ombre sono parallele. Le ombre sono parallele solo se raggi del Sole appartengono al piano verticale del bastone inclinato* 2. *Se il bastone inclinato si trova in un piano verticale contenente raggi del Sole, le ombre sono parallele. Le ombre sono parallele solo se il bastone inclinato si trova in un piano verticale contenente raggi del Sole* (Garuti, 1996 p. 72).
e) Preparazione delle dimostrazioni degli enunciati, attraverso un confronto delle analogie e differenze tra gli enunciati prodotti dagli studenti e i due enunciati ottenuti dopo la discussione matematica orchestrata dall'insegnante e attraverso la riflessione sull'opportunità e sulla possibilità di verificare sperimentalmente gli enunciati prodotti. Durante tale riflessione molti studenti hanno affermato che una verifica sperimentale è molto difficile,

perché bisognerebbe verificare l'enunciato "in tutte le infinite posizioni del Sole e in tutte le infinite posizioni dei bastoni" (Garuti, 1996, p.73).

f) Dimostrazione della sufficienza della condizione: si è trattato di un'attività svolta a coppie, con stesura finale della dimostrazione.
g) Dimostrazione della necessità della condizione: discussione collettiva guidata dall'insegnante seguita dalla stesura individuale della dimostrazione.
h) Discussione conclusiva e relazione finale (da svolgere a casa) sull'intera attività.

Da un esame dei protocolli emerge che nella fase di formulazione dell'enunciato i ragazzi capiscono ciò che stanno facendo, ma non hanno ancora le strutture linguistiche più adeguate per esprimere ciò che hanno in mente. In tal caso l'aiuto dell'insegnante diventa particolarmente significativo, perché l'allievo è pronto a recepire questo aiuto: l'aiuto non crea disorientamento, risolve una situazione.

21 studenti su 36 producono una congettura corretta con giustificazione; 6 alunni producono una congettura corretta senza dimostrazione; 9 alunni producono una congettura errata. Le congetture corrette prodotte dagli studenti sono essenzialmente di due tipi:

a) Movimento del bastone: si immagina il Sole fermo e si esplora la situazione lasciando un bastone verticale e muovendo l'altro.
b) Movimento del Sole: gli studenti fanno finta di essere il Sole ed esplorano la situazione muovendosi attorno ai bastoni.

Ecco un estratto del protocollo di Sara:

"Potrebbero essere parallele se io faccio finta di essere il Sole che vede e mi devo mettere nella posizione di vedere due bastoni paralleli. In questo modo il Sole manda i suoi raggi paralleli a illuminare i bastoni. Ma se il Sole cambia posizione non vedrà i bastoni paralleli e quindi non saranno parallele nemmeno le loro ombre. Le ombre potranno essere parallele se il bastone storto è sullo stesso piano verticale dei raggi del Sole". Dimostrazione: "se il Sole vede il bastone diritto e quello inclinato paralleli è come se ci fosse un altro bastone verticale alla base del bastone inclinato. Se questo bastone è davanti al bastone inclinato la sua ombra copre quella del bastone inclinato. Queste ombre sono sulla stessa linea, quindi le ombre del bastone inclinato e di quello verticale sono parallele" (Garuti, 1996, p.74).

La cosa interessante che si nota nella lettura dei protocolli, è che c'è una forte correlazione positiva tra la ricchezza di argomentazioni in fase di esplorazione e produzione della congettura e successo nella seguente attività di dimostrazione. Non solo, ma gli argomenti prodotti in fase di esplorazione a sostegno della congettura, vengono in qualche modo richiamati nella fase di dimostrazione. Si può quindi supporre una possibile continuità cognitiva tra la fase di esplorazione e produzione delle congetture e quella successiva della loro dimostrazione. Se gli studenti non sono messi in grado di compiere esplorazioni e di produrre

congetture, ma si chiede loro solo di dimostrare enunciati prodotti da altri, allora la continuità viene recisa: gli studenti non riescono a "ricostruire la complessità cognitiva di un processo in cui si intrecciano funzionalmente atti di pensiero di natura diversa a partire da consegne che per loro natura li inducono ad attività parziali, difficili da ricomporre unitariamente" (Garuti, 1996 p. 75). In altri termini, compiti del tipo "dimostra che…" sembrano inibire gli studenti all'attività dimostrativa.
Dal punto di vista didattico questa tesi è di importanza strategica: si tratta, infatti, di individuare ambienti di apprendimento che favoriscano esplorazioni dinamiche, produzioni di congetture e solo in seguito passare alla richiesta di dimostrazioni delle congetture prodotte. In tal modo si garantisce quella continuità cognitiva tra produzione dell'enunciato e sua dimostrazione che una certa prassi didattica impedisce.

Un approccio alla dimostrazione nella scuola superiore: Cabri géomètre
L'esperienza che ora descrivo può essere considerata un esempio, paradigmatico, delle attività sulla dimostrazione che sono state progettate e realizzate nell'ambito di un progetto di avvio al pensiero teorico dal N.R.D di Torino coordinato da Ferdinando Arzarello. Le attività che abbiamo progettato e sperimentato coprono l'intero corso di studi che va dalle scuole medie agli ultimi anni di scuola secondaria superiore.
È stato detto che per motivare alla dimostrazione bisogna evidenziarne gli aspetti legati alla funzione di convincere se stessi o qualcun altro (un amico e un nemico) della validità di un enunciato. Io ritengo che un vero avvio alla dimostrazione non possa essere fondato su funzioni legate al convincere qualcuno della validità di un certo enunciato. Per convincere qualcuno non si dimostra: si producono argomentazioni che hanno come unico vincolo quello di essere pertinenti. A mio avviso ha ragione Polya nel dire che la convinzione della validità di un enunciato è condizione necessaria per passare alla dimostrazione. In altri termini, prima ci si convince, poi si dimostra. Dimostrare non vuol quindi dire convincersi della validità di un enunciato, ma vuol dire spiegare perché questo enunciato vale all'interno di un sistema di conoscenze più o meno ben organizzato (idealmente all'interno di una teoria).
Cabri ha un pregio rispetto ad altri strumenti più o meno tradizionali: Cabri rende inutile la funzione della dimostrazione come attività atta a convincere qualcuno della validità di un determinato enunciato. Con Cabri in genere ci si convince della validità di un certo enunciato con un livello di fiducia spesso molto maggiore e sicuramente più immediato di quello che può produrre una dimostrazione. Se la funzione di una dimostrazione fosse quella di convincere qualcuno, allora Cabri avrebbe semplicemente reso inutili le dimostrazioni. Ma se la funzione della dimostrazione è, come io credo, quella di spiegare perché un

certo enunciato è valido all'interno di un sistema di conoscenze più o meno ben organizzato, allora Cabri motiva fortemente alla dimostrazione e, anzi, si rivela un formidabile supporto a tale attività che caratterizza in modo forte la matematica (Paola & Robutti, 2000; in stampa).

Presento un problema che ho proposto a studenti di una terza e una quarta liceo scientifico di Finale Ligure e che, contemporaneamente è stato proposto anche a un gruppo di studenti di Bristol che frequentano un corso Further Mathematics, A-Level.

Di questo problema darò un cenno di analisi delle strategie risolutive scelte da un gruppo di studenti di quarta liceo.

Situazione.

È stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:

vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2.

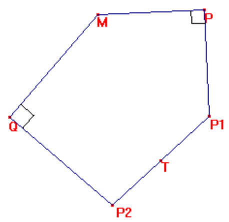
Problema.

Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

La consegna esplicita era quella di riportare sul foglio non solo la soluzione e la sua giustificazione, ma anche le strategie utilizzate, le difficoltà incontrate e ogni osservazione che gli studenti ritenessero utile per far capire all'insegnante il modo di lavorare del gruppo.

La situazione è stata descritta anche graficamente agli studenti, in modo tale che non vi fossero ambiguità nelle indicazioni fornite.

Tempo concesso per il lavoro in classe: 1 ora e 45 minuti.



La classe è composta da 19 studenti che conseguono risultati di profitto diversificati, ma mediamente più che discreti. I ragazzi sono abituati a lavorare con Cabri e in gruppo. Hanno effettuato diverse esperienze di lavoro su problemi

aperti in Cabri e molte esperienze di lavori in piccoli gruppi in classe. A casa lavorano spesso in gruppi di 2/3 studenti. In questa classe, inoltre, le diverse modalità d'uso di Cabri, in particolare la funzione di trascinamento (dragging), sono state esse stesse oggetto di discussione collettiva in classe (l'insegnante ha commentato spesso, confrontandole, le differenti strategie di approccio ai problemi aperti e i diversi usi del dragging messi in opera dai vari gruppi).
In questa classe la voce della teoria è stata sistematicamente evocata nel corso dell'anno scolastico che ha preceduto quello in cui è stata effettuata l'esperienza qui descritta, attraverso lavori in piccoli gruppi, condivisione delle diverse strategie utilizzate dai vari gruppi in successive discussioni matematiche orchestrate dall'insegnante alla presenza dell'intera classe, visione e commento dei punti ritenuti più significativi, da parte dell'insegnante, di discussioni collettive videoregistrate (vedere, per esempio, Furinghetti, Olivero & Paola, in stampa).
Descrivo ora le modalità di lavoro del gruppo Valentina, Gabriele, Vittorio (VGV).
Il protocollo del gruppo VGV inizia così: "Dopo avere disegnato la figura utilizzando Cabri abbiamo effettuato simulazioni osservando le relazioni che esistevano fra i punti e i cambiamenti della configurazione …"
I ragazzi hanno in effetti iniziato a costruire la situazione descritta nel testo del problema, controllando la correttezza delle figure costruite attraverso il trascinamento dei loro punti base. Nella fase successiva hanno utilizzato le potenzialità di Cabri (che consente di trascinare i punti base di una costruzione) per compiere operazioni sugli oggetti costruiti. In particolare usano una forma di trascinamento casuale che abbiamo chiamato wandering dragging (Arzarello & al., 1998), per scoprire regolarità e proprietà. In questa fase il processo è ascendente, dal livello empirico e percettivo delle osservazioni in Cabri, agli eventuali suggerimenti della teoria di riferimento (le conoscenze di geometria euclidea). La voce delle pratiche (in Cabri) è esplicita, anche se il fatto stesso che parlino di "simulazioni", suggerisce che sia in qualche modo presente pure la voce della teoria. Le pratiche vanno quindi verso la teoria e la tendenza è suggerita proprio da quel "simulazione " (che vuol dire "vediamo che cosa accade se…"). In altri termini si può dire che il percorso è quello dalla logica percettiva (osservo gli oggetti in Cabri sottoposti al trascinamento) alla logica matematica (se sono in questa configurazione, allora..). Una forte spinta dal piano percettivo verso quello teorico è fornita dalla funzione di trascinamento che modifica lo statuto degli oggetti percepiti facendoli diventare sempre più oggetti generici.
Ecco un altro estratto del protocollo degli studenti:
"Per osservare le proprietà della figura rispetto a P e Q abbiamo fatto variare la loro posizione cercando di capire come veniva variata la configurazione

geometrica (questo c'è stato di aiuto per capire che l'unica variabile che non influenzava la configurazione era M). In seguito facendo variare M abbiamo osservato che sia la distanza tra P1 e P2, sia la loro inclinazione variavano ma T rimaneva fermo nello stesso punto, quindi si poteva affermare che si generava un fascio di rette passanti per T"

Gli studenti lavorano con il wandering dragging, ma hanno uno scopo ben preciso: capire se ci siano e, in caso affermativo, quali siano gli invarianti della situazione. Trovano che T varia con P e Q, ma non varia con M. Il controllo è prima ascendente (ossia osservano e poi fanno ipotesi, mentre si chiedono: vediamo se c'è qualche invariante) e poi discendente (ossia prima si mettono in una certa ipotesi e poi vedono che cosa accade. In altri termini dicono: vediamo che facendo variare M , T non varia. Quindi suppongono che sia interessante concentrare l'attenzione sulla relazione tra M e T). In tutti i casi, però, i ragazzi rimangono sempre nel contesto esterno di Cabri: la voce della teoria, anche se talvolta evocata, rimane ancora sullo sfondo.

Vediamo che cosa scrive in seguito il gruppo VGV:

"A questo punto ci siamo accorti che congiungendo i punti Q e T si otteneva un segmento di lunghezza uguale a quello che si generava congiungendo P e T; abbiamo verificato queste intuizioni misurando i due segmenti con gli strumenti che fornisce il programma"

Qui gli strumenti che fornisce Cabri vengono usati per validare osservazioni fatte a occhio. La validazione è tutta all'interno della Cabri - teoria e non vi è quindi un controllo teorico della situazione (intendo dire un controllo nella teoria di riferimento della geometria).

"Abbiamo poi disegnato il segmento che collega Q a P; a questo punto era facilmente visualizzabile il triangolo PTQ. Misurati i due angoli alla base abbiamo osservato che erano di 45° e di conseguenza T era retto"

È chiara la presenza della voce delle pratiche in Cabri ("Abbiamo poi disegnato il segmento che collega Q a P; a questo punto era facilmente visualizzabile il triangolo PTQ. Misurati i due angoli alla base abbiamo osservato che erano di 45°"), ma, in tal caso, anche della teoria della geometria euclidea ("e di conseguenza T era retto").

"Come già spiegato in precedenza muovendo M la configurazione non cambiava, potevamo quindi descrivere ora una procedura per trovare il tesoro"

Vengono quindi fornite le istruzioni per trovare il tesoro:

"a) sull'isola troviamo una quercia (Q) e un pino (P).

1. guardando P e posizionandoti su Q ruota di 45° verso destra e traccia una retta
2. guardando Q posizionati su P, ruota di 45° verso sinistra e traccia una retta
3. il punto di incontro tra le due rette che hai tracciato indica il luogo dove si trova il tesoro"

Come si può notare, la procedura risolutiva risente delle scoperte fatte in fase esplorativa. Subito dopo i ragazzi scrivono:
"b) un altro modo per il ritrovamento del tesoro si basa su altre osservazioni che abbiamo fatto: dal momento che al variare di M la configurazione non cambia possiamo fissare un punto M a caso e ricostruire la figura indicata nel testo del problema"
Ed è proprio questa seconda affermazione che i ragazzi utilizzano nella dimostrazione finale.
Si noti che gli studenti hanno risolto il problema in pochissimo tempo (una decina minuti). Tutto il resto del tempo è stato dedicato alla stesura della relazione e alla ricerca di una dimostrazione di quanto affermato. La dimostrazione, però, è stata trovata solo dopo circa una settimana, nella quale gli studenti hanno lavorato al problema, sia individualmente, sia in gruppo, ma a casa.
Lo stesso problema è stato assegnato a Bristol a studenti di buon livello che frequentano un corso Further Mathematics, A-Level. Questi studenti hanno lavorato 20 minuti in carta e matita; poi 20 minuti in Cabri; poi l'insegnante ha chiesto le congetture prodotte; infine hanno avuto altri 20 minuti in Cabri per cercare la dimostrazione.
Sia con carta e matita, sia con Cabri, i ragazzi di Bristol hanno lavorato su una figura "privilegiata", una sorta di prototipo, di schizzo della situazione a cui si riconducevano anche durante le esplorazioni in Cabri, passando più tempo a ragionare su questa figura, che non a utilizzare le potenzialità dinamiche offerte dalla funzione di trascinamento di Cabri. Gli studenti di Bristol non sono riusciti a mettere in relazione il fatto che T è indipendente da M, con la particolare posizione in cui T si trova. Solo nella seduta successiva, quando all'inizio l'insegnante ha fatto una ricapitolazione delle congetture a cui gli studenti erano pervenuti, essi hanno iniziato a cercare di dimostrare che T sta sull'asse di PQ, ma a questo punto il fatto che T è indipendente da M non è più comparso nei tentativi di dimostrazione.
Nei ragazzi di Finale c'è stato un passaggio fra i seguenti livelli:
- livello percettivo in Cabri (vedo che T non si muove o si muove)
- livello relazionale in Cabri (vedo che, se muovo M, allora T non si muove, ma, se muovo P o Q allora T si muove)
- livello logico matematico (per qualunque M, T non varia).

A Bristol invece ci si è fermati ai primi due livelli.
Ora, in carta e matita i primi due livelli non ci sono, quindi si dovrebbe subito riuscire ad avere padronanza del livello logico. Però, dato che è difficile 'vedere' le relazioni di dipendenza tra M, P, Q e T, che, invece, sono osservabili in Cabri, a un certo punto il problema di studiare la relazione fra M e T viene dimenticato

e i tre punti M, Q, T assumono lo stesso statuto logico: la relazione logica con T (per ogni M, T è fissato) diventa inaccessibile.
Nel gruppo di Finale si è avuta una trasformazione funzionale della relazione tra il punto T e il punto M. Non siamo più a livello percettivo, di Cabri, nel quale si vede, si osserva il fatto che T non si muove al variare di M: a livello di Cabri siamo di fronte a una relazione tra variabili (M indipendente, T dipendente). Nel passaggio alla carta, nella dimostrazione del gruppo VGV lo statuto della relazione fra i punti cambia: acquista un senso logico, diventa che per ogni M, qualunque sia M, T non varia, T è centro del quadrato di lato PQ.
Se si nota che questa evoluzione non si riscontra negli studenti di Bristol, che sono di più alto livello di quelli di Finale, allora si può fare l'ipotesi che sia stata l'iniziale esplorazione in Cabri (i ragazzi di Bristol hanno iniziato a lavorare in carta e matita e si sono portati dietro in Cabri le osservazioni fatte in carta e matita) ad aver permesso il cambiamento di funzione della relazione tra M e T e ad aver consentito agli studenti di Finale di ottenere la dimostrazione.
Si noti che le esplorazioni fatte in Cabri davano agli allievi due mosse dimostrative: quella col mezzo quadrato e quella di T indipendente da M. Inizialmente gli studenti hanno provato a percorrere la prima strada, ma una volta che si è rivelata inefficace, sono passati alla seconda, che è quella percorsa nel protocollo riportato in appendice. Entrambe le strade, però, derivavano dalla precedente esplorazione in Cabri, il che supporta l'ipotesi di una continuità cognitiva tra fase di produzione della congettura e fase di dimostrazione già messa in luce dai lavori di Rossella Garuti e Paolo Boero per gli studenti messi in condizione di poter fare esplorazioni dinamiche.
Il cambiamento di strategia messo in atto da questi studenti e il fatto che anche la maggior parte degli altri gruppi abbia continuato per una settimana a produrre tentativi di dimostrazione (anche se non riusciti) suggerisce che l'aiuto di Cabri verso la teoria sia significativo non tanto nelle conoscenze, quanto nell'atteggiamento: gli studenti non si scoraggiano, non si stupiscono di fronte alle richieste dell'insegnante di dimostrare ciò di cui sono ormai sicuri.

CONCLUSIONI

Un significativo progetto che faccia della definizione oggetto di attenzione didattica non può fare a meno di porre:

- attenzione alla ricerca storico-epistemologica sulla costruzione della conoscenza relativa ai concetti matematici e alla loro definizione
- attenzione al dibattito sulla costruzione dei concetti e delle loro definizioni, distinguendo i problemi legati alla problematica del rigore da quelli della costruzione, validazione e condivisione di una determinata definizione
- attenzione alle tecniche di produzione di definizioni da parte di esperti e di studenti

- attenzione alla possibilità di individuare una continuità cognitiva fra l'attività di esplorazione di un concetto e la costruzione della sua definizione
- attenzione all'opportunità delle discussioni matematiche in classe come tecnica e strumento per condividere conoscenza e quindi per mediare fra le diverse rappresentazioni mentali dei concetti oggetto di studio
- attenzione alla ricerca, alla progettazione, alla realizzazione e alla valutazione di ambienti didattici che consentano di costruire definizioni partendo dalle rappresentazioni mentali degli studenti
- attenzione alle difficoltà degli studenti nelle varie fasi dell'attività del definire (esplorazione, costruzione, validazione, comunicazione)
- attenzione a rendere gli insegnanti (in servizio e coloro i quali stanno seguendo i corsi di specializzazione) consapevoli dei problemi che si celano dietro l'attività del definire.

Voglio sottolineare ancora l'importanza dell'attività del definire dal punto di vista dell'educazione matematica: si pensi che essa comporta attività di scoperta, in cui si affina la capacità di osservare e si sviluppano abilità di carattere induttivo e, soprattutto, abduttivo (Ciferelli & Sàenz-Ludlow, 1996) che sono importanti nella costruzione e nella sistemazione delle conoscenze matematiche; inoltre si affinano anche capacità di tipo deduttivo, perché le definizioni sono un punto essenziale dell'attività dimostrativa; infine, nello sforzo di condividere la conoscenza in classe e nel tentativo di ottenere informazioni sulle rappresentazioni mentali degli studenti, con le quali l'attività definitoria deve fare i conti, si sviluppano anche attitudini di carattere sociale, quali la capacità di ascoltare le idee altrui, sostenere in modo pertinente le proprie, partecipare a una discussione. Certo, l'obiezione che "ci vuole troppo tempo" è determinante se si continua a pensare che seguire un corso di matematica voglia dire acquisire abilità che un tempo potevano avere un senso, ma che oggi forse non sono più così determinanti. Se invece si ritiene che un corso di matematica debba avviare alla comprensione degli oggetti matematici, dare un'idea non distorta dell'attività del matematico, dare un'idea delle applicazioni della matematica nella vita sociale, allora il tempo da dedicare agli argomenti oggetto di studio non può essere predeterminato. Deve essere un tempo flessibile; si deve optare per una didattica lunga, contro ogni didattica breve. Lo ripeto per sgombrare il campo da ogni equivoco: con questa relazione non ho voluto indicare o suggerire possibili argomenti da affrontare a scuola. I temi che ho scelto mi sono serviti solo per dare un esempio di quella che io intendo azione didattica opportuna per consentire agli studenti di comprendere. Può anche darsi che gli argomenti che io ho scelto entrino presto e a ragione a far parte della matematica da *rottamare* (Cerasoli, 2000): non è un problema, perché il tipo di azione didattica che ho suggerito si può e si deve applicare anche ad altri temi e argomenti. L'essenziale è che, qualunque sia la scelta degli argomenti, l'azione didattica sia mirata al

conseguimento di obiettivi formativi di vasta portata culturale, quale l'avvio alla razionalità e, quindi, al sapere teorico, che richiedono tempi lunghi e interventi meditati.
Concludo con un'osservazione strettamente legata al tema che mi è stato proposto di sviluppare e che mi consente di ricordare un matematico che, da un cero punto in poi della sua carriera professionale, ha fatto della ricerca in didattica della matematica la principale occupazione. Francesco Speranza era sicuramente consapevole della delicatezza del problema delle definizioni. Andate a leggere una delle sue ultime fatiche portata avanti in collaborazione con Lucia Grugnetti, la versione italiana del dizionario di matematica di Stella Baruk. Lì è evidente l'attenzione ai vari punti di vista, logico, cognitivo ed espistemologico nella definizione degli oggetti della matematica. Ecco concludo con l'auspicio che la sua attenzione alle problematiche disciplinari, nelle tre componenti logica, cognitiva ed espistemologica, con pari dignità, possa farci riflettere maggiormente nella e sulla nostra quotidiana azione didattica.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello F.: 2000 Inside and Outside: Spaces, Times and Language in Proof Production, *Proceedings of PMEXXIV*, Hiroshima, Giappone.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*, Stellenbosh, South Africa, v. 2, 32-39.

Arzarello F., Olivero F., Paola D. & Robutti O.: 1999, Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 22B n. 3, 209 – 233.

Balacheff N.: 1990, Towards a "problématique" for research on mathematics teaching, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (4), 259-272.

Bartolini Bussi, M., Bergamini, B., Betti,B., Ferri, F., Fortini, C., Monari, F., Mucci, A. & Garuti, R.: 1997, I campi di esperienza dei meccanismi e degli ingranaggi tra esperienza quotidiana, tecnologia e geometria, Modena.

Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PMEXXI*, Lathi, v.1, 180-195.

Bartolini Bussi, M., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R. 1999, Early approach to theoretical thinking: gears in primary school, *Educational Studies in Mathematics,* vol 39, 67-87.

Bazzini, L: 2000, Linguaggio verbale e linguaggio simbolico nella costruzione-interpretazione di espressioni algebriche, *SFIDA IX, Seminario Franco-Italiano Didattica dell'Algebra*, (Jean-Philippe Drouhard et Maryse Maurel editors), IREM di Nizza.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. & Scali, E.: 1995, Aspects of the mathematics - culture relationship in mathematics teaching - learning in compulsory schhol, *Proceedings of PMEIXX*, Recife, v. 1, 151-166.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1996, Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures, *Proceedings of PME XX,* Valencia, v. 2, 121-128.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti, M.A.: 1996, Challenging the traditional school approach o theorems: an hypothesis about the cognitive unity of theorems, *Proceedings of PMEXX*, Valencia v.2, 113-120.

Cerasoli, M.: 2000, Riga, compasso e computer, in http://matematica.uni-bocconi.it/matetec/cerasoli.htm

Chassapis, D: 1999, The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example, *Educational Studieas in Mathematics*, vol n. 3, 275-293.
Chevallard, Y: 1985, *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y: 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche antropologique, *Recherches en Didactique des Matématiques*, 12(1), 73-112.
Cifarelli V. & Sàenz-Ludlow A.: 1998, Abductive processes and mathematics lerning, in E. Jakubowski, D. Watkins & H. Biske (editors), *Proceedings of the Eighteenth annual meeting of the North American chapter of the international group PME*, 161-166.
Cottril J., Dubinsky E., Nichols D., Schwingendorf K., Thomas K. & Vidakovic D: 1996, Understanding the limit concept: beginning with a co-ordinated process schema, *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 167-192.
D'Amore B.: 2000, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
De Villiers M.: 1994, The role and function of a hierarchical classification of quadrilaters, *For the learning of mathematics*, v.14, n.1, 11-18.
De Temple, D. W., 1990, A direct derivation of the equations of the conic sections, *Mathematics Teacher*, March, 190-193.
Dutto V.: 1996, *Questioni tecniche e problemi di sperimentazione didattica per lo sviluppo dell'argomentazione matematica e l'approccio alla dimostrazione nella scuola media*, Tesi di laurea, Dipartimento di Matematica Università di Genova.
Duval, R: 1988, Approche cognitive des problème de géometrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.
Duval, R.: 1998, Signe et Objet. Manoscritto.
Ernest, P: 1991, *The philosophy of matematics education.* London, Falmer Press.
Francone, N.: 1998, *Le coniche nella scuola superiore: un'introduzione mediante strumenti*, Dipartimento di matematica Università di Torino, Tesi.
Furinghetti F. & Paola D.: 1988, Context influence on mathematical reasoning, *Proceedings of PMEXXII,* Stellenbosh, v. 2, 313 - 320.
Furinghetti F. & Paola D.: (2000), Definition as a teaching object: a preliminary study, *Proceedings of PMEXXIV*, Hiroshima, Giappone.
Furinghetti, F., Olivero, F. & Paola, D.: (in print) Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.
Garuti, R.: 1996, Sfidando il tradizionale approccio scolastico ai teoremi: una ipotesi sull'unità cognitiva dei teoremi, *Atti XV Internuclei Medie*, Salice Terme, Pavia, 70-77.
Godino J.D. & Batanero C.: 1999, *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*, Pitagora Editrice Bologna, tard. it. dell'articolo comparso sulle *Recherches en didactique des Mathématiques*, 1994 vol 14, n. 3 p. 325-355 a cura di Angel Balderas Puga.
Gray E.M. & Tall D.O.: 1994, Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 115 - 141.
Gray E., Pinto M., Pitta D & Tall D.: 1999, Knowledge construction and diverging thinking in elementary & advanced mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, p 111 - 133.
Harel G., Kaput J: (1991), The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinnking*, p. 82-94, Dordrecht, The Nederlands: Kluwer.
Harel G., Tall D.: 1991, The general, the abstract and the generic in advanced mathematics, *For the learning of mathematics*, 11 (1), 38 - 42.
Kaput J.: 1987, Toward a theory of symbol use in mathematics, In C. Janvier (editor), *Problema of representation in mathematics learning and problem solving*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.
Marchini, C: 1992, Le definizioni e le notazioni: un problema didattico, *Quaderni Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce - Seminari di didattica* 1990/1991 e 1991/1992, Q.1 125-143.
Menghini, M.: 1991, "Punti di vista" sulle coniche, *Archimede*, n.2, 84-106.

Paola D. & Robutti O.: 2000, Dall'assiomatico al virtuale: Cabri-géomètre, *ITER, Treccani,* anno II, 6, 70 - 76.
Paola, D. & Robutti, O: (in stampa), La dimostrazione alla prova, nella collana *Quaderni del ministero - Documenti di lavoro*, Lugo di Romagna.
Piaget J.: 1967, *Biologie et connaissance*, Paris, Gallimard.
Piaget J: 1970, *L'épistémologie génetique*, Paris, Presses Univ. de France.
Radford, L.: 2000, 'Semioticizing the General: Students' signs and Meanings in algebraic generalisation', preprint, to appear in *Educational Studies in Mathematics*.
Schoenfeld A.H.: 1992, Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, in D.A. Grouws (e.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, MacMillan, New York, pp. 334-370.
Sfard A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Sudies in Mathematics* 22, 1-36.
Skemp R.R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics teaching*, 77, 20-26.
Tall D.O., Vinner S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational studies in mathematics*, 12, 151-169.
Thorndike E.L.: 1922, *The Psychology of Arithmetic*, MacMillan, New York.
Van Schooten, F.: 1657, *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus*.
Vergnaud G.: 1982, Cognitive and developmental psycology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics*, 3, 31-41.
Vygotskij, L.S: 1966: *Pensiero e linguaggio*, Giunti e Barbera, Firenze.
Vygotskij, L.S: 1978, *Mind in society. The Development of higher psychological processes*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.