Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe

Ivana Chiarugi, Grazia Fracassina, Fulvia Furinghetti & Domingo Paola

Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova
Dipartimento di Matematica. Università di Genova

SUMMARY

In this paper we consider the problem of variables, in particular parameters. We analyse how these concepts are presented in textbooks: this leads to outline a variety of approaches. Afterwards we comment paradigms of exercises in which parameters intervene and point out the difficulties encoutered by students. At the end we refer the results of interviews with teachers concerning their behaviour in dealing with parameters in classroom.

In our intention the study, for its exploratory character, should be a starting point for researchers in mathematics education and offer elements of reflection to teachers.

Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe

Ivana Chiarugi, Grazia Fracassina, Fulvia Furinghetti & Domingo Paola

Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova
Dipartimento di Matematica. Università di Genova

SOMMARIO. In questa nota si considerano tre aspetti distinti concernenti l'insegnamento della variabile in algebra, in particolare del parametro: la varietà degli approcci nei libri di testo, le difficoltà degli studenti, l'atteggiamento degli insegnanti. Gli elementi raccolti possono costituire un riferimento per studi sull'apprendimento in algebra e offrire agli insegnanti spunti di riflessione per il loro lavoro in classe.

INTRODUZIONE

Una delle attività curate nel nostro gruppo di ricerca è l'esplorazione delle difficoltà legate all'apprendimento dell'algebra nella scuola secondaria superiore. In quest'ottica abbiamo prodotto studi sul valore assoluto (Chiarugi, Fracassina & Furinghetti, 1990), sulla lettura degli enunciati in collegamento con problemi sulla dimostrazione (Furinghetti & Paola, 1991), sulla funzione (Furinghetti & Somaglia, in stampa *a* e *b*), sul significato delle lettere (Furinghetti & Paola, 1994).

Uno dei risultati di questi studi è l'individuazione del concetto di variabile come catalizzatore di molte difficoltà degli studenti, a conferma di quanto emerge nei lavori di vari autori del presente(1) e del passato(2). A questo concetto è collegato il concetto di parametro: di esso ci occupiamo in questa nota, cercando, per mezzo della discussione di alcuni esercizi paradigmatici della pratica scolastica, di mettere a fuoco come gli studenti lo incontrano, quali difficoltà trovano, che cosa c'è dietro queste difficoltà.

Fino a non molti anni fa l'insegnamento della matematica del liceo scientifico prevedeva un forte impiego di energie sulla discussione di equazioni con parametro che si configuravano come il filtro per essere considerati sufficienti o no in matematica. Mi pare si possa dire che tali energie finivano per essere indirizzate, al di là delle

(1) Per ulteriori riferimenti bibliografici su questo punto si veda (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994; Furinghetti, 1992; Furinghetti & Paola, 1991).
(2) È significativo un passo in (Vailati, 1909) che mette in evidenza i vari livelli nell'uso delle lettere e le relative difficoltà.

intenzioni, all'acquisizione di sole abilità manipolative, spesso ottenute a prezzo di un numero rilevante di esercizi di *routine* e senza la contropartita di una visione critica dei concetti. Le mode sono cambiate e attualmente l'enfasi è spostata su altri argomenti, ma non è cambiato il fatto che il parametro è un importante strumento per risolvere problemi e che gli studenti non sempre acquisiscono una reale padronanza dell'uso di questo concetto, anche nei casi in cui sembrano aver acquisito una certa padronanza manipolativa. La prova di ciò si ha quando nei corsi scientifico-tecnologici dell'università si usano i parametri (equazioni parametriche di una retta, di un cerchio, di una conica, ...) e si rileva lo sgomento degli studenti per questo ente anomalo, che essi tendono a evitare quanto più possibile. Così, per esempio, facendo la geometria analitica essi traducono le equazioni parametriche degli enti geometrici nella più familiare forma cartesiana anche quando questo cambio li porta a conti più complessi; maneggiando gli integrali indefiniti tendono a dimenticare (perché considerata irrilevante) la cosiddetta costante d'integrazione; hanno difficoltà a disegnare famiglie di curve dipendenti da un parametro; hanno difficoltà a capire le applicazioni del teorema di Rouché e Capelli a casi con infinite soluzioni (specie se parametri esistevano già nelle equazioni di partenza) e così via.

In sintesi si può dire che i parametri sono usati a due livelli diversi: in esercizi fini a se stessi come occasione per la manipolazione di formule algebriche (vedi le equazioni parametriche) e nella soluzione di problemi (l'operazione di integrazione di un'equazione differenziale, la soluzione dei problemi di geometria analitica, ...). Il primo impiego è più praticato nella scuola secondaria superiore, il secondo è più frequente all'università. In entrambi i casi (scuola e università) ciò che accade è che si introduce operativamente un concetto evitando di approfondirne i risvolti teorici, applicando inconsciamente un tacito principio, accennato in (Hanna, 1989), per cui ci sono fatti della matematica che è meglio lasciare agli studenti nella semioscurità. Quest'idea, che può sembrare spregiudicata, è in un certo senso già presente nell'opera di De Morgan, che fu non solo un importante matematico, ma anche un notevole autore di lavori nel campo dell'educazione matematica: egli, nel suo libro *On study and difficulties of mathematics* pubblicato dalla *Society for the diffusion of useful knowledge* nel 1831 mette in guardia gli insegnanti dall'entrare in discussioni di algebra 'puramente metafisiche'(3).

Va però detto che De Morgan sottolinea che gli insegnanti devono essere ben consci delle difficoltà, anche quando le aggirano con un pragmatico silenzio; per questo ci sembra utile esporre in questa nota alcune nostre riflessioni sui parametri e sulle difficoltà che gli studenti incontrano. Queste ultime sono sia concettuali (teoriche) sia calcolistiche (manipolative) e possono essere messe in relazione a un intreccio di elementi: libri di testo, ambiguità di linguaggio, difficoltà epistemologiche, difficoltà di applicazione dei procedimenti risolutivi. Nelle nostre intenzioni l'analisi di questi elementi riportata di seguito, per il suo carattere esplorativo, dovrebbe offrire spunti per ulteriori studi sul problema cruciale delle variabili in algebra e nello stesso tempo costituire un punto di partenza per individuare opportuni interventi didattici.

---

(3) La figura di De Morgan come educatore matematico è discussa in (Arcavi, Bruckheimer, & Ben-Zvi, 1989; Rauff, 1992).

Senza dubbio il problema del concetto di parametro è legato a quello del concetto di variabile e, come si è detto, quest'ultimo concetto è uno di quelli che stanno alla base di gran parte delle difficoltà degli studenti in algebra e analisi. La prima non trascurabile difficoltà è di tipo, per così dire, glottologico; infatti, se come è fatto in (Schoenfeld & Arcavi, 1988), proviamo ad elencare parole che sono (con più o meno pertinenza) usate in diversi contesti come sinonimi del termine 'variabile', troviamo: indeterminata, incognita, parametro, costante, simbolo, segnaposto, argomento, puntatore, nome, spazio vuoto, riferimento, indice, quantità, lettera, grandezza, ... In realtà ognuna di queste parole ha un uso e un contesto riservato (ma non ben definito) e ci sono tacite convenzioni (anche qui non ben definite) sulla loro rappresentazione (x, y, z, ... per incognita o indeterminata e a, b, c, k, ... per parametro e costante). Come si vede nei brani presentati in (Bottazzini, Freguglia & Toti, 1992) ulteriori suggestivi nomi si trovano nella storia dell'algebra: 'cosa' (*chosa*), 'numero' (per indicare l'incognita di un problema), 'censo' per indicare il quadrato dell'incognita, 'cubo' per indicarne il cubo e così via.

Questa varietà di denominazioni e di approccio all'uso e al significato delle lettere, emerge dall'analisi dei libri di testo per la scuola secondaria superiore. Nel seguito riportiamo qualche esempio[(4)] di questa varietà.

••• Battelli, M. & Moretti, U.: 1990, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio*, Le Monnier, Firenze, v.1. (Prima edizione, prima ristampa).

In questo testo gli argomenti si intersecano; la sua linea è quella classica dell'insegnamento, cioè introduce (senza definirle) le parole che ci interessano nel contesto di un problema come è esemplificato nei brani scelti riportati qui di seguito con alcuni commenti. Si parte dagli insiemi arrivando con cautela alle definizioni:

- p.7: in A = {x: ...} «La lettera x indica il *generico* elemento di A»
- p.141: per la prima volta introduce (senza definizione) la parola variabile nell'esercizio:

«Data la proposizione P(x): «x è un quadrato perfetto» contenente la **variabile** x, è evidente che nulla si può dire sul suo valore di verità perché esso **dipende** dall'oggetto che viene sostituito al posto della x stessa. [...] P(x) è chiamata **enunciato aperto**, o funzione proposizionale, **nella variabile** x»

- p.342: definita la funzione come particolare relazione tra due insiemi A e B «Il generico elemento x di A si chiama **oggetto**, oppure **variabile indipendente**.

Il corrispondente elemento $y = f(x)$, appartenente a B, si chiama immagine di x, oppure **variabile dipendente** da x».

••• Dodero, N., Baroncini, P. & Trezzi, D.: 1989, *Algebra e informatica 1*, Ghisetti e Corvi editori, Milano.

---

(4) Abbiamo, per quanto possibile, conservato la grafica del testo, eliminando alcune 'andate a capo'.

A pagina 47 del primo volume parlando dei predicati il concetto di variabile è usato come concetto primitivo (nel senso di intuitivamente noto agli studenti); a pagina 48 le equazioni sono definite come dei predicati in cui «la variabile si chiama *incognita*».

A pagina 241 troviamo: «Lo studio delle equazioni serve appunto a determinare i valori particolari che attribuiti alle lettere trasformano le uguaglianze in identità numeriche. A tali lettere si dà il nome di **incognite** e gli accennati valori particolari si chiamano **soluzioni** o **radici** dell'equazione. Si *suol anche dire che le radici soddisfanno (o verificano) l'equazione data*. Un'equazione oltre alle incognite può contenere altre lettere, ma che si ritengono rappresentare numeri fissi: queste lettere si chiamano **costanti**. Per indicare le incognite si adoperano di solito le ultime lettere dell'alfabeto x, y, z, ...; le costanti si indicano con a, b, c, ... [...]. Se poi si richiede di determinare una di queste costanti in modo tale che sia soddisfatta una certa condizione, allora tale lettera prende più propriamente il nome di **parametro**».

Nel capitolo dedicato alle coordinate cartesiane ortogonali (p.330) c'è ancora un'altra caratterizzazione dei concetti di costante e variabile.

••• Gallo (a cura di): 1988, *Attività, teoria, esercizi per fare matematica*, Sei, Torino, v.1.

Le variabili in $\mathbb{N}$ sono trattate nel capitolo 3 (p.57); a pagina 61 si mette in risalto il ruolo delle variabili nel processo di generalizzazione. A pagina 280 alcuni esempi cercano di suggerire la distinzione tra parametro e incognita e si conclude con queste parole: «a, b, c sono variabili in $\mathbb{N}$, dette *parametri* dell'equazione: al loro variare in $\mathbb{N}$ si ottengono tutte le equazione dei tre tipi precedenti. [...] Quando risolviamo un'equazione, l'attenzione è rivolta all'incognita; quando discutiamo la sua risolvibilità è rivolta ai parametri, chiamati anche *coefficienti dell'equazione*».

••• Maraschini, W. & Palma, M.: 1989, *Matematica di base 1*, Paravia. (Prima edizione, settima ristampa).

Nel glossario troviamo: «**Variabile**: simbolo che in un problema o in una formula rappresenta una grandezza di valore non fissato»

- p.220: con « $y = a \cdot x$ non indichiamo un solo problema ma ne indichiamo infiniti (tanti quanti sono i valori di a): in ognuno di questi, a ha un preciso valore e perciò è una costante. Una lettera che sta ad indicare una infinità di problemi (o di formule o di grafici), ma che all'interno di ognuno di essi si mantiene costante, si chiama **parametro**. Quindi le lettere rappresentano o variabili (che cambiano di valore all'interno dello stesso problema) o parametri (che cambiano valore all'interno di una classe di problemi, ma una volta scelto uno di essi restano costanti)». A pagina 221 è spiegato come le lettere e i numeri possono essere visti come simboli (indicatori o rappresentanti di qualcos'altro) o puri segni grafici di cui non interessa il significato. Il discorso sui simboli continua con le definizioni di alfabeto, stringa, espressione, successioni di simboli, formule ben formate, proposizioni, ...

••• Prodi, G.: 1984, *Matematica come scoperta*, D'Anna, Messina-Firenze. (Prima edizione, seconda ristampa), v.1.

- p.291: «Nello studio dei polinomi, e nell'impiego dei polinomi in problemi specifici, è necessario usare, oltre alle lettere che indicano le variabili (ad es. x, y, z, ...) altre lettere, che stanno ad indicare un elemento dell'anello dei coefficienti (ad esempio a, b, c, ...). Evidentemente nessuno può contestare il diritto di usare una lettera (che non deve essere considerata come una delle variabili del polinomio!) per indicare un coefficiente.

Ad esempio: sappiamo che, preso nel piano un riferimento cartesiano, una retta si rappresenta con l'equazione $ax + by - c = 0$, dove a e b non sono entrambi nulli. In questo contesto, si assumono dunque come variabili x e y e si considerano a, b, c come parametri numerici. (Tanto che si afferma che l'equazione della retta è di primo grado in x e y). In altre questioni [(5) ad esempio quando si volesse studiare il fascio delle rette che passano per $P(x, y)$ fissato] potrebbe convenire di considerare a, b, c come variabili e x e y come parametri. Se il polinomio $ax + by - c$ fosse considerato nelle variabili x, y, a, b, c esso risulterebbe evidentemente di secondo grado».

L'autore aggiunge: «Dal punto di vista formale quanto abbiamo ora detto può lasciare un po' insodisfatti: si può desiderare una presentazione del polinomio $ax + by + c$ (per restare nel solito esempio) da cui risulti chiaramente che x e y sono da considerarsi variabili mentre a, b, $-c$ sono da considerarsi elementi dell'insieme dei coefficienti. Ebbene, un modo elegante per sistemare le cose è il seguente: *tenere presente che* $\mathsf{R}[a, b, c]$ *è un anello* (*commutativo con unità*) *e che il polinomio* $ax + by - c$ *si può considerare come un polinomio nelle variabili x, y, con coefficienti in* $\mathsf{R}[a, b, c]$. Rovesciando le parti, cioè prendendo a, b, c come variabili, il polinomio verrebbe considerato come un polinomio a coefficienti in $\mathsf{R}[x, y]$. Considerando invece x, y, a, b, c come variabili il nostro polinomio potrebbe essere visto come un elemento di $\mathsf{R}[a, b, c, x, y]$. Contenti tutti?...».

••• Rossi Dell'Acqua, A. & Speranza, F.: 1971, *Matematica per il biennio delle scuole medie superiori*, Zanichelli, Bologna, v.1 e v.2.

A pagina 115 del primo volume si parla di «espressioni polinomie» che possono essere viste come «un sistema di simboli » o come «mappe [applicazioni]». Si istituisce (implicitamente) il duplice ruolo della lettera come indeterminata o come variabile.

Il termine «indeterminata» viene introdotto per la prima volta a pagina 21 del secondo volume: «L'espressione

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n \qquad (1)$$

si chiama **polinomio nella indeterminata** x **sopra l'insieme** A. [...] I numeri α_0, α_1, α_2, ..., α_n si chiamano coefficienti del polinomio». Si noti l'uso del termine «coefficienti».

A pagina 35 del secondo volume si introducono esplicitamente le variabili, presentate come «simboli (solitamente lettere dell'alfabeto) al posto dei quali si possono porre elementi di A, con la condizione che alla stessa lettera vada in tutta l'espressione sostituito lo stesso elemento». Notiamo che tale definizione non discrimina fra

(5) Le parentesi quadre sono nel testo.

variabile e indeterminata; nel testo stesso sono riportati esempi da cui si vede che anche all'indeterminata si possono sostituire elementi di A.

- p.36: «Quando [in un'equazione] compaiono più lettere variabili, esse si distinguono sovente in due tipi: certe si assumono come *parametri*, cioè si trattano provvisoriamente come se indicassero oggetti ben determinati e le altre funzionano da *incognite*: il problema è di trovare per quali valori delle incognite l'equazione è soddisfatta [...]. Spesso, in un secondo tempo si passa alla discussione, cioè allo studio del modo in cui i parametri influenzano le *soluzioni* trovate. Di solito le incognite si indicano con una delle ultime lettere dell'alfabeto, x, y, z, ...; le altre lettere indicano invece i parametri [...]».

Il concetto di variabile è associato a quello di funzione, in modo esplicito, per la prima volta solo a pagina 58 del volume 2. A pagina 168 in $y = ax + b$ il coefficiente a viene chiamato «*coefficiente* (o *parametro*) *angolare*».

••• Villani, V. & Spotorno, B.: 1979, *Matematica. Idee e metodi*, La nuova Italia editrice. (Prima edizione).

- p.172: «[...] $x + a = b$ [...]. In queste scritture, esiste una netta differenza di significato fra le lettere a, b, c ... e la lettera x. Infatti a, b, c, denotano numeri che si suppongono *noti* (anche se suscettibili di *variare* a seconda del problema a cui si riferiscono), mentre la x denota le *posizioni* che potrebbero essere occupate dalle soluzioni dell'equazione (soluzioni non ancora note e che addirittura non è detto che esistano). Per segnalare questa distinzione, si dirà che le lettere a, b, c ... designano delle **variabili** e si riserverà alla sola x il nome di **indeterminata** (o **incognita**).

L'importanza delle equazioni letterali sta nel fatto che il loro uso consente di sintetizzare in un'unica equazione tutta un'infinità di equazioni numeriche di *forma analoga*, ma con *dati numerici* di volta in volta *diversi*».

Nel seguito, parlando di proporzionalità si dice che in $y = kx$, x e y sono variabili; non si dice nulla di k (che è anch'essa una quantità variabile).

ERRORI DEGLI STUDENTI NEL RISOLVERE ESERCIZI CON PARAMETRI

Vediamo ora quali sono gli errori degli studenti nel trattare i parametri partendo da esercizi 'paradigmatici' usualmente svolti in classe (la scelta degli esercizi è stata fatta dagli insegnanti sulla base della loro esperienza di insegnamento). Poiché tali errori sono (come spesso accade in algebra) collegati a difficoltà di tipo sia teorico che operativo abbiamo fatto una prima distinzione tra gli esercizi in cui le difficoltà sono prevalentemente legate ai concetti e quelli che presentano difficoltà principalmente collegate alla manipolazione. Nella discussione vedremo che la distinzione dei due piani (teorico e operativo) è tutt'altro che netta.

• *Esempio* 1. Trovare a, b e c tali che la retta $ax + by + c = 0$ passi per due punti distinti assegnati $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Introducendo $ax + by + c = 0$ i coefficienti a, b e c sono presentati come costanti appartenenti ad un certo insieme, perché interessa mettere in evidenza la variabilità di (x, y) che descrive un certo ente. In realtà parlando successivamente di $ax + by + c = 0$ come di una retta generica del piano, cioè di un ente già caratterizzato, a, b e c vengono considerate variabili. Il primo grosso problema del parametro è proprio nel fatto che l'interpretazione del suo ruolo è legata al contesto.

Imporre le condizioni di appartenenza dei punti dati alla retta $ax + by + c = 0$ porta a risolvere il sistema formato dalle due equazioni $ax_1 + by_1 + c = 0$ e $ax_2 + by_2 + c = 0$. Una prima difficoltà consiste nel fatto che le incognite sono indicate con le lettere a, b e c; un'altra è nell'esistenza, oltre la soluzione nulla (che non ha significato geometrico), di 8^1 soluzioni. Dal punto di vista algebrico lo studente non sa come gestire quella terza incognita (che, invero, è diventata parametro senza che lui se ne accorgesse), quindi applica ripetutamente e inopportunamente la tecnica della sostituzione arrivando alla fine a identità. D'altra parte, dal punto di vista geometrico egli si aspetta una sola soluzione e il ritrovarsi due delle incognite in funzione della terza e quindi ancora una lettera nei coefficienti dell'equazione finale è motivo di imbarazzo. Queste difficoltà si ritrovano anche negli studenti all'università, anche se hanno già visto la teoria dei sistemi lineari (che, invero, in questo esercizio è eccessivo scomodare).

Una difficoltà di fondo è di tipo algebrico: quando ha eseguito i conti lo studente si ritrova con un'equazione in cui due delle tre lettere a, b e c di partenza non compaiono e la terza rimasta (che compare al primo grado) si può raccogliere. Se, per esempio, questa lettera è a, l'equazione finale è del tipo $af(x, y) = 0$ di primo grado in x e y, con a ? 0; si deve quindi applicare la legge di annullamento del prodotto e, ovviamente, avere ben chiaro il significato 'equazione di un ente geometrico' per liberarsi di a e ottenere l'equazione della retta cercata.

C'è anche una difficoltà (più sottile) di tipo geometrico che dipende da quella che in (Shenitzer, 1991) è chiamata 'mancanza di simmetria' del piano euclideo: in questo caso al variare di x e y (due parametri) si hanno gli infiniti punti della retta e al variare di a, b e c (tre parametri) si hanno le infinite rette del piano. Se si passasse a coordinate omogenee nel piano proiettivo l'equazione della retta sarebbe $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ e si recupererebbe la simmetria, con un certo vantaggio dal punto di vista concettuale.

• *Esempio* 2. Per quali valori di a e b la retta $ax + by + 3 = 0$ è parallela alla retta $2x - 7y + 5 = 0$?

• *Esempio* 3. Per quali valori di a e b la retta $ax + by + 3 = 0$ è parallela alla retta $y = x + 5$?

In questi due esempi c'è una delle difficoltà presenti nell'esempio precedente: si devono trovare a e b tali che il loro rapporto sia uguale a un dato numero, quindi anche in questo caso si hanno infinite 8^1 soluzioni e non un numero finito, come lo studente si aspetta accada in accordo con i casi che tratta abitualmente.

• *Esempio* 4. Date le due rette di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$ e $x = x_1 + pt$, $y = y_1 + qt$ trovare il loro punto di intersezione (se esiste).

Le difficoltà in questo esempio sono più riposte. I conti tornano se si danno ai parametri nomi diversi a seconda della retta, per esempio t nella prima, s nell'altra. Anche in questo caso potrebbe essere utile una spiegazione geometrica: il parametro ha il significato di un'ascissa (distanza da un punto fissato) sulla prima retta e lo stesso vale per la seconda. Stiamo svolgendo il problema nel piano cartesiano, ma col parametro ci mettiamo in un sistema di coordinate su ciascuna delle due rette e quindi l'ascissa va indicata con un simbolo diverso per ciascun sistema di riferimento.

DIFFICOLTÀ DI CALCOLO

Dal punto di vista della manipolazione di formule le cose si complicano quando i coefficienti non sono costanti, ma funzioni di un'altra variabile k, che può diventare incognita di un'equazione nel corso dello sviluppo dell'esercizio e quindi le difficoltà della sintassi del calcolo letterale si aggiungono a quelle dovute all'individuazione della strategia risolutiva del problema.

• *Esempio* 5. Per quali valori di k l'equazione
$(k - 1)x + 2ky + k - 3 = 0$
rappresenta una retta passante per O (0,0)?

Nella risoluzione l'attenzione è centrata su k che, una volta sostituito 0 a x e y, è l'unica cosa che si può calcolare e, in genere, lo studente è in grado di arrivare in fondo all'esercizio.

• *Esempio* 6. Per quali valori di k l'equazione
$(k - 1)x + 2ky + k - 3 = 0$
rappresenta una retta che stacca sull'asse y un segmento di lunghezza 10 a partire da O (0, 0)?

• *Esempio* 7. Per quali valori di k la
(*) $(k - 1)x + 2ky + k - 3 = 0$
rappresenta una retta che stacca sull'asse x un punto P tale che la lunghezza di AP sia 10, essendo date le coordinate di A?

L'esempio 6 è concettualmente dello stesso tipo dell'esempio 5 precedente, ma in questo caso il calcolo di k è successivo alla determinazione di un'altra variabile y che non è menzionata come 'cosa da determinare' nell'enunciato. Lo studente fissa l'attenzione sulla lettera di cui gli è richiesto trovare il valore e la sua risposta è $k = 3/(2y + 1)$ con qualche imbarazzo per quel 10 che non viene utilizzato.

La difficoltà è essenzialmente manipolativa e consiste nel dover applicare due successivi processi risolutivi (soluzione di equazioni di primo grado) che separatamente lo studente saprebbe risolvere: in generale, molte delle difficoltà nella manipolazione algebrica vengono proprio da questo fatto di dover sviluppare una successione di più processi. In queste successive applicazioni di processi capita inoltre che alla fine, dopo aver posto $x = 0$ e ricavato y in funzione di k ($y = (3 - k)/2k$), lo studente non ricordi né di porre k ? 0 né di vedere che cosa accade quando nella formula ottenuta si ha $k = 0$.

Oltre alle difficoltà manipolative l'esempio 6 presenta difficoltà concettuali: quella che incide di più nel procedimento risolutivo sbagliato è la perdita del significato della coordinata di un punto su una retta come distanza dall'origine e, collegabile a questa, la scarsa abitudine a rappresentare graficamente il problema. Inoltre entra in gioco, senza che lo studente se ne renda conto, la dualità del piano menzionata nell'esempio 1 per cui l'equazione nell'esercizio è sia l'equazione di una retta che l'equazione di un fascio di rette in un piano. Ciò comporta che ci sono due tipi di variabile: x e y coordinate di punti, k coordinata della retta nel fascio (coefficiente angolare rispetto ad una retta fissata).

Nell'esempio 7 è ancor più accentuato l'intreccio delle difficoltà nel calcolo del parametro e quelle nel calcolo letterale: c'è un accavallarsi di difficoltà manipolative e c'è troppa confusione di incognite. Tra l'altro si possono anche avere due soluzioni, può entrare in gioco il valore assoluto, occorre ricordare di porre k ? 1 e vedere che cosa accade quando si ha $k = 1$.

• *Esempio* 8. Quali sono, al variare di k, le soluzioni di $kx > 0$?

• *Esempio* 9. Quali sono, al variare di k, le soluzioni di $kx^2 - x > 0$?

• *Esempio* 10. Quali sono, al variare di k, le soluzioni di $2/(x - k) > 0$?

• *Esempio* 11. Quali sono, al variare di k, le soluzioni di $(kx^2 - x)/(x - k) > 0$?

In questi esempi le difficoltà nella manipolazione algebrica sono di vario tipo. Nell'esempio 8 k è ben evidenziato e l'attenzione è centrata su di esso; in genere, però $k = 0$ viene dimenticato. In (Furinghetti & Paola, 1994) si vede come la reazione dello studente a questo esercizio dipende dall'enunciato, poiché la simmetria della lettere nella formula può originare difficoltà se nell'enunciato non si evidenzia quale è il parametro e quale la variabile.

Nell'esempio 9 l'attenzione si sposta sul secondo grado, vengono trovate le soluzioni $x = 0$ e $x = 1/k$ (k ? 0), si analizza il segno di k, ma $k = 0$ viene dimenticato. Nell'esempio 10 l'attenzione si sposta sul denominatore che non deve annullarsi e la risposta è spesso del tipo $x - k$? 0, x ? k, k ? 0. Nell'esempio 11 le cose vanno ancor peggio, poiché oltre alle difficoltà già sottolineate, c'è anche da discutere il segno del rapporto.

• *Esempio* 12. Descrivere le linee di livello delle funzioni $z = 2y/x^2$

Le cose si complicano ulteriormente se, come in questo esercizio, non ci sono domande esplicite sul parametro, ma è lo studente che deve 'scoprire' che c'è un parametro, decidere quale delle tre variabili far diventare parametro e come. Quando infine si arriva a discutere, al variare di k, $2y = kx^2$ *si* dà per scontato che si tratti di parabole, forse perché in geometria analitica introducendo le parabole nella forma $y = ax^2$ resta in ombra che si suppone a ? 0.

Analogamente, se nel corso di un esercizio c'è da calcolare $kx - 2 > 0$ senza l'esplicita menzione di k, la risposta è $x > 2/k$, dando per scontato che sia $k > 0$, poiché, come è riscontrato nella già citata ricerca sulle difficoltà dietro al valore assoluto (Chiarugi, Fracassina & Furinghetti, 1990), per lo studente la lettera sta per un numero positivo.

DIFFICOLTÀ CONCETTUALI, DIFFICOLTÀ MANIPOLATIVE NEGLI ESERCIZI CON PARAMETRI

La nostra discussione su alcuni prototipi di difficoltà conferma quanto già affermato in (ˇ,S ediv´,y , 1976) e cioè che i problemi con parametri permettono di esplorare in profondità determinate conoscenze matematiche degli studenti e individuare fallimenti logici e strategie sbagliate nel *problem solving*. Non a caso recentemente l'interesse di alcuni autori si è accentrato esplicitamente su questo tema (Bloedy-Vinner, 1994; Foley, 1992 che non abbiamo a disposizione; Furinghetti & Paola, 1994). Riassumiamo e commentiamo ulteriormente alcuni punti fondamentali emersi nella presentazione degli errori.

Esistono delle difficoltà di manipolazione di formule algebriche che sono riconducibili alla difficoltà nel gestire i procedimenti risolutivi di equazioni e disequazioni; il crescere delle difficoltà non avviene per l'introduzione di nuovi processi risolutivi, ma per la presenza dello stesso processo reiterato più volte (esempi 5, 6, 7). Difficoltà di tipo manipolativo si intrecciano a difficoltà concettuali nel caso della discussione delle disequazioni contenenti parametri (esempi 9, 10, 11). Lo studente ha difficoltà nell'organizzare i processi risolutivi (discussione del segno del parametro k in rapporto al segno di x o del denominatore di una frazione), ma ha anche difficoltà nell'interpretazione dei simboli (dare alle lettere il valore di numeri che possono essere maggiori, minori o uguali a zero). In particolare il trascurare il caso del parametro $k = 0$ può esser collegato anche alla difficoltà degli studenti di accettare il numero 0. Da una parte questo numero non ha significato e non serve a nulla perché, per esempio, 'qualunque sia a si ha che $a + 0 = a$'; d'altra parte 0 è un numero cui bisogna fare attenzione, ‘poiché non si può dividere per 0’. Queste due condizioni portano a guardare con sospetto questo numero e quindi, anche inconsciamente, a evitarlo o a tirarlo in ballo a sproposito.

Negli esempi discussi intervengono comportamenti degli studenti che si riscontrano anche in altri ambiti dell’apprendimento della matematica: scarso uso della rappresentazione grafica, lettura scorretta degli enunciati, uso scorretto della deduzione.

La rappresentazione grafica e l’interpretazione geometrica del problema, che sarebbero un aiuto negli esempi 8, 9, 10, 11, abitualmente sono assenti nei processi risolutivi messi in atto dagli studenti. Questo comportamento (rifiuto della visualizzazione) è già stato rilevato nella ricerca didattica, si vedano i lavori (Dreyfus & Eisenberg, 1990; Vinner, 1989 e 1990). Le esperienze descritte da Vinner mettono in evidenza che gli studenti non hanno una particolare inclinazione verso la rappresentazione grafica, faticano a visualizzare (ossia a fornire il significato alle scrittura algebrica) e preferiscono l’utilizzazione di tecniche di calcolo algebrico. Risulta da queste esperienze che il livello sintattico è più gradito perché richiede meno partecipazione attiva, cioè minor intervento dell’attività di ragionamento. Anche in (Furinghetti & Somaglia, in stampa *a* e *b*) si discutono elementi che fanno pensare che la visualizzazione dei concetti è una conquista cognitiva che richiede un suo addestramento.

Sottolineiamo a proposito degli esempi 8, 9, 10, 11 l’esistenza della difficoltà di cui si è già parlato in (Furinghetti & Paola, 1991) di leggere correttamente gli enunciati degli esercizi, cioè dare un significato matematico al linguaggio naturale. La prestazione dello studente può essere condizionata dalla forma dell’enunciato nel senso che in un enunciato i rispettivi ruoli delle variabili e dei parametri possono essere diversamente esplicitati e specificati in dipendenza dal contesto (la locuzione ‘per quali x’ usata al posto di ‘risolvere’, ‘dato k’ al posto di ‘al variare di k’, ...). In sostanza il linguaggio gioca un ruolo rilevante nella possibilità di decodifica del problema. Questa rilevanza dell’esplicitazione e specificazione del linguaggio nel lavorare coi parametri ci sembrano collegate alla presenza ‘tacita’ di quantificatori universali e esistenziali che gli studenti devono gestire (si veda ad esempio l’esercizio 4) senza saperlo. Questo fatto è ben focalizzato in (Arzarello, 1988, p.116): «Equazioni, identità, equazioni parametriche, ecc. si configurano in una veste matematicamente significativa, cioè come formule matematiche contenenti dei quantificatori nascosti. Risolvere un’equazione vuol dire verificare se un enunciato esistenziale puro è vero; trovare che è vero il corrispondente enunciato universale significa scoprire che l’equazione è un’identità; introdurre *parametri* [corsivo nostro] nelle equazioni vuol dire passare a formule più complesse, con un quantificatore universale seguito da uno esistenziale». Si ha dunque che l’uso del parametro richiede due livelli di comprensione: il simbolismo del linguaggio algebrico e l’uso dei quantificatori.

La soluzione degli esercizi 8, 9, 10, 11 implica applicare un processo deduttivo (seppure non complesso): l’uso incerto dei quantificatori e del concetto di infinito a essi collegato costituisce una difficoltà, inoltre nella lettura dell’enunciato gli studenti tendono ad interpretare le varie condizioni non in senso ipotetico bensì in senso normativo.

CONCLUSIONI

Preso atto della varietà di impostazioni dei libri di testo che è sintomo di una consapevolezza del problema da parte degli autori e analizzate le difficoltà degli studenti, abbiamo intervistato cinque insegnanti sull'argomento parametri. In linea di massima ci pare si possa osservare che inconsciamente gli insegnanti seguono i suggerimenti di cui si è detto all'inizio (Hanna e De Morgan) e si mantengono su una strada di prudente reticenza. Le interviste hanno evidenziato i seguenti punti:

- gli insegnanti sono consci che i parametri sono un argomento difficile e tendono a sorvolare su una presentazione puntuale
- l'introduzione del parametro è fatta 'a posteriori' nel contesto di un problema (e in maniera molto morbida)
- si tende a sorvolare sulla differenza tra parametro e variabile
- chi insegna la fisica, oltre la matematica, sembra sottolineare più esplicitamente agli studenti la funzione dei parametri nella descrizione di situazioni; gli altri sembrano limitarsi (forse per rassegnazione) al livello sintattico
- il foglio elettronico costituisce un buon ambito per chiarire la distinzione tra incognita e variabile, anche se in tal caso c'è un problema di intersezione tra i due livelli sintattici, quello dell'algebra e quello del software specifico utilizzato.

Ci sembra che alcuni punti cruciali emergano da questo lavoro come meritevoli di riflessione da parte degli insegnanti (e dei ricercatori), anche perché i risultati possono essere trasferiti a altri ambiti dell'apprendimento-insegnamento della matematica:

- in quale tipo di problemi sia utile distinguere tra variabile e parametri
- se la logica potrebbe aiutare nella distinzione e nella loro comprensione
- se in classi tradizionali, dove si fanno molti esercizi su equazioni parametriche, il concetto di parametro risulti più chiaro che in altre
- quale potrebbe essere l'effettivo ruolo dell'informatica nel trattare certi concetti matematici (in particolare algebrici)
- quanto la rappresentazione grafica del problema aggiunge significato al processo risolutivo.

Malgrado il carattere esplorativo dello studio qui riportato ci sembra si possano trarre alcune indicazioni di carattere generale (cioè che trascendono lo specifico dei parametri) per affrontare il problema dell'insegnamento dell'algebra, così sintetizzate: esistono relativamente poche difficoltà e comportamenti ascrivibili a un determinato ambito (qui l'algebra, ma lo stesso varrebbe per geometria o altri ambiti); si hanno piuttosto difficoltà e comportamenti globali nell'apprendimento della matematica che 'si materializzano' sotto diverse sembianze nei vari ambiti e influenzano la specificità di apprendimento dei vari settori.

Arcavi, A., Bruckheimer, M. & Ben-Zvi, R.: 1989, ‘The didactical De Morgan: a selection of Augustus De Morgan’s thoughts on teaching and learning mathematics’, *For the learning of mathematics*, v.IX, n.1, 34-39.

Arzarello, F.: 1988, ‘L’insegnamento della logica nelle scuole medie superiori’, in Barra, M. & Zanardo, A. (a cura di) *Atti degli incontri di logica matematica, XII Incontro: La logica matematica nella didattica*, 115-120.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G.: 1994, *L’algebra come strumento di pensiero*, Quaderno n.6 TID-CNR.

Bloedy-Vinner, H.: 1994, ‘The analgebraic mode of thinking - The case of parameter’, in Ponte, J. P. & Matos, J. F. (editors) *Proceedings of PME XVIII* (Lisbona), v.II, 88-95.

Bottazzini, U., Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L.: 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Chiarugi, I., Fracassina, G. & Furinghetti, F.: 1990, ‘Learning difficulties behind the notion of absolute value’, in Booker, G., Cobb, P. & De Mendicuti, T. N. (editors) *Proceedings of the PME XIV* (Oaxtepec), v.III, 231-238.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T.: 1990 ‘On difficulties with diagrams: theoretical issues’, in Booker, G., Cobb, P. & De Mendicuti, T. (editors) *Proceedings of PME XIV* (Oaxtepec), v.I, 27-34.

Foley, G. D.: 1992, ‘The power of parametric representations’, *NTCM yearbook*.

Furinghetti, F.: 1992, ‘Insegnare ed apprendere l’algebra nella scuola secondaria superiore: due processi convergenti o divergenti?’, *Seminario nazionale di ricerca in didattica della matematica*, Pisa.

Furinghetti, F. & Paola, D: 1991, ‘On some obstacles in understandings mathematical texts’, in Furinghetti, F. (editor) *Proceedings PME XV* (Assisi), v.II, 56-63.

Furinghetti, F. & Paola, D.: 1994, ‘Parameters, unknowns and variables: a little difference?’, in Ponte, J. P. & Matos, J. F. (editors) *Proceedings of PME XVIII* (Lisbona), v.II, 368-375.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. M.: in stampa *a*, ‘Uno studio longitudinale sulla funzione’, in Piochi, B. (a cura di) *Atti del quarto internuclei scuola secondaria superiore* (Siena).

Furinghetti, F. & Somaglia, A.: in stampa *b*, ‘Functions in algebraic and graphical environments’, in Antibi, A. (editor) *Proceedings of CIEAEM 46* (Toulouse, 1994).

Hanna, G.: 1989, ‘More than formal proof’, *For the learning of mathematics*, v.IX, n.1, 20-23.

Rauff, J. V.: 1992, ‘Augustus De Morgan on the teaching of mathematics’, *The mathematical gazette*, v.76, n.475, 97-99.

Schoenfeld, A. & Arcavi, A.: 1988, ‘On the meaning of variable’, *The mathematics teacher*, v.81, 420-427.

ˇ,S ediv´,y , J.: 1976, ‘A note on the role of parameters in mathematics teaching’, *Educational studies in mathematics*, v.7, 121-126.

Shenitzer, A.: 1991, ‘The Cinderella career of projective geometry’, *The mathematical intelligencer*, v.13, n.2, 50-55.

Vailati, G.: 1909, ‘Sugli attuali programmi per l’insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane’, in Castelnuovo, G. (a cura di) *Atti del IV congresso internazionale dei matematici* (Roma, 1908), v.III, 482-487.

Vinner, S.: 1989, ‘The avoidance of visual considerations in calculus students’, *Focus on learning problems in mathematics*, v.11, 149-156.

Vinner, S.: 1990, ‘The function concept as prototype for problems in mathematics learning’, *Paper presented at the ‘Function conference’*, Purdue University; pubblicato anche in Harel, G. & Dubinsky, E. (editors): 1992, *The concept of function*, MAA Notes and Reports Series, 195-213.