

**ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DI LOGICA  
RELATIVO ALL'INTERO QUINQUENNIO**

Domingo Paola LS "G. Bruno", Albenga, Savona

La logica compare nei nuovi programmi di matematica a due livelli:

- come logica matematica
- come logica nella matematica o per la matematica

Nel primo caso conoscenze, concetti e strumenti della logica sono oggetto di studio a sé; nel secondo, invece, essi vengono utilizzati per meglio effettuare e comprendere attività di matematica. Per esempio, *riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi*, oltre a comparire esplicitamente fra gli obiettivi di apprendimento dei programmi Brocca per il biennio, è un'attività di logica *nella* o *per* la matematica. Lo studio esplicito delle regole di deduzione, che compare nel commento al tema 5 dei programmi Brocca del biennio, è un'attività di logica matematica.

Gli insegnanti appartenenti al gruppo di lavoro che si è occupato di elaborare un percorso di logica relativo all'intero quinquennio si sono trovati d'accordo, in particolare, sui seguenti punti:

- le attività di logica *nella* o *per* la matematica sono quelle da privilegiare nell'insegnamento secondario, in quanto aiutano lo studente ad acquisire consapevolezza delle proprie conoscenze
- gli elementi di logica devono pervadere tutto il curriculum quinquennale; è quindi opportuno presentarli come una riflessione man mano che si arricchisce l'esperienza matematica dello studente
- è opportuno, in continuità con la scuola media, evidenziare i legami tra logica e linguaggio comune; in seguito, senza abbandonare questo "filone", collegare la logica all'attività deduttiva e, alla fine del quinquennio, e con quegli alunni che avranno raggiunto una buona esperienza matematica, legare le attività di logica allo studio delle teorie matematiche, intese come sistemi ipotetico-deduttivi

• l'opportunità di trattare la logica in modo trasversale rende poco significativa la definizione di un vero e proprio percorso; è preferibile fornire le linee generali della proposta e trattare in modo più approfondito due esempi di possibili attività didattiche

La proposta che di seguito viene presentata è stata elaborata da insegnanti di licei scientifici, classici e di istituti tecnici; non si può negare, quindi, che sia stata pensata in particolare per alunni di questo tipo di scuole. Nonostante ciò ritengo che la maggior parte delle attività e degli argomenti proposti siano adatti anche a studenti di altri istituti.

#### *Le linee generali della proposta*

Biennio: logica e linguaggio.

L'obiettivo principale è quello indicato nel commento al tema 5 dei programmi Brocca del biennio: *fin dall'inizio bisogna abituare lo studente all'uso appropriato del linguaggio e delle formalizzazioni, a esprimere correttamente le proposizioni matematiche...*

Triennio: logica e dimostrazioni; logica e teorie matematiche

L'obiettivo principale è quello di utilizzare l'esperienza nell'attività dimostrativa effettuata dallo studente durante il biennio, in vari campi della matematica (aritmetica, algebra, probabilità, oltre alla geometria), per fare della dimostrazione un oggetto di studio e di didattica. Ciò porta, gradualmente, alla precisazione delle nozioni di assioma, definizione, teorema, regola inferenziale e consente di approfondire le relazioni tra piano sintattico e piano semantico, spesso confusi nella prassi didattica. Il passo finale, quando l'interesse e la preparazione degli studenti lo consentano, è quello di affrontare lo studio di una teoria matematica, enunciando alcuni risultati di carattere metateorico che la caratterizzano.

Nella prima colonna della tabella, che riporta sinteticamente la proposta elaborata dal gruppo di lavoro, vengono suggeriti alcuni esempi di attività; nella seconda colonna sono riportati gli argomenti di logica che possono essere introdotti durante le attività, proprio allo scopo di meglio precisare e far comprendere gli argomenti di matematica che caratterizzano quelle attività.

Esempi di attività di matematica	Contenuti di logica
Definizione di un'espressione numerica;	Alfabeto e formule ben

espressioni letterali come schemi di calcolo o come funzioni. Studio della sintassi di un linguaggio di programmazione	formate; sintassi e semantica; linguaggio e metalinguaggio
Calcolo della probabilità di eventi composti; algebra degli eventi e algebra degli insiemi. Analisi dell'enunciato di un teorema; individuazione delle ipotesi, della tesi e della relazione di conseguenza logica che le collega. Strutture di controllo di un linguaggio di programmazione	Logica proposizionale Connettivi logici Valore di verità di una proposizione
Insiemi e proprietà. Equazioni e disequazioni; equazioni parametriche	Variabili, predicati e quantificatori
Analisi logica di segmenti di dimostrazioni Analisi di alcuni tipi di dimostrazione (diretta, per assurdo, per induzione, dimostrazioni di esistenza costruttive e non costruttive, dimostrazioni che sono calcoli, dimostrazioni che sono correttezza di calcoli ....). Analisi di come varia la tesi al variare delle ipotesi di un teorema (l'attività è particolarmente significativa con i teoremi dell'analisi matematica)	Regole di inferenza nella logica dei predicati Conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria
Cenni alle geometrie finite. Cenni alle geometrie non euclidee. Assiomatizzazione di una parte della matematica nota agli studenti (a scelta tra: probabilità, aritmetica, geometria elementare)	Assiomi e modelli di sistemi di assiomi Risultati metateorici relativi ai sistemi formali

A scopo esemplificativo presento, più in particolare, due delle attività che sono state proposte. I riferimenti bibliografici possono offrire spunti più numerosi e significativi al lettore interessato.

1. *Definizione di un'espressione numerica*

Uno dei più frequenti e persistenti errori commessi dagli studenti riguarda il controllo della correttezza delle operazioni eseguite nella semplificazione di espressioni numeriche o letterali. In effetti difficilmente si dà, nella prassi didattica, una definizione soddisfacente di espressione: in genere si auspica che lo studente, dopo aver visto svolgere e aver svolto egli stesso molte espressioni, sia in grado di riconoscere o prevenire errori di sintassi nella semplificazione di un'espressione. Alcune tecniche della logica matematica, come per esempio quella delle definizioni induttive, potrebbero essere utilizzate per meglio definire e comprendere la nozione di espressione, nel caso qui preso in esame, quella di espressione aritmetica. Al tempo stesso l'esperienza degli studenti raggiunta nel campo delle espressioni aritmetiche potrebbe essere utile per far comprendere loro le potenzialità di alcuni argomenti della logica matematica.

Immaginiamo che gli studenti sappiano che cosa è un numero naturale, nel senso che supponiamo che gli studenti sappiano riconoscere se un dato numero è o non è un numero naturale. Il seguente sistema di regole definisce, induttivamente, che cosa si intende per espressione aritmetica (si sono prese in considerazione solo le espressioni in cui intervengono unicamente addizioni e moltiplicazioni):

- ogni numero naturale è un'espressione aritmetica
- se  $A$  e  $B$  sono espressioni aritmetiche, anche  $(A + B)$  e  $(A \cdot B)$  sono espressioni aritmetiche
- nient'altro è un'espressione aritmetica

Si può far notare la presenza, nelle regole, di segni del linguaggio e del metalinguaggio: le lettere calligrafiche  $A$  e  $B$  stanno per qualunque espressione del linguaggio oggetto. Si può far notare che, secondo le regole date,  $2^3$  non può essere considerata un'espressione aritmetica. L'esigenza di considerare anche espressioni del tipo  $2^3$  porta a due possibilità: o dare nuove regole o definire il nuovo oggetto nei termini di quelli che si hanno a disposizione. Così  $2^3$  può essere definito come  $((2 \cdot 2) \cdot 2)$ . Si può poi notare che la proprietà associativa, di cui vogliamo che goda la moltiplicazione porta all'identificazione di  $((2 \cdot 2) \cdot 2)$  con  $2 \cdot 2 \cdot 2$ , il che può essere fatto tramite un'altra definizione. In tal modo la logica contribuisce a precisare il concetto di espressione aritmetica, ma al tempo stesso l'esperienza

che gli studenti hanno acquisito nel calcolo delle espressioni può essere utile per una prima introduzione di nozioni come quelle di sintassi, semantica, linguaggio, metalinguaggio, regola...

## 2. Analisi logica di segmenti di dimostrazioni

Consideriamo il seguente cenno di dimostrazione dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ :

supponiamo, per assurdo, che  $\sqrt{2}$  sia razionale, ossia che  $2n^2 = m^2$  con  $m$  e  $n$  naturali primi fra loro. Considerando i possibili casi ( $n$  pari e  $m$  dispari,  $n$  dispari e  $m$  pari,  $m$  e  $n$  entrambi dispari) si ottiene sempre una contraddizione. Allora possiamo concludere che  $\sqrt{2}$  è irrazionale.

L'analisi logica della dimostrazione consiste nell'evidenziarne la struttura. Ciò può essere effettuato ricorrendo a un opportuno calcolo logico. Qui viene utilizzato quello della deduzione naturale:

	[ $\neg p$ ]			
	[ $a$ ]	[ $b$ ]	[ $c$ ]	
$a \vee b \vee c$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	
	----- (V Elim.)			
		$\perp$		
	----- (Abs <sub>C</sub> )			
		$p$		

Legenda.  $p$ :  $\sqrt{2}$  è irrazionale;  $a$ :  $n$  è pari e  $m$  è dispari;  $b$ :  $n$  è dispari e  $m$  è pari;  $c$ :  $m$  e  $n$  sono entrambi dispari;  $\perp$  è il simbolo per l'assurdo. Tra parentesi quadrata sono state indicate le premesse scaricate, mentre alla destra della riga che separa le premesse dalle conclusioni sono state riportate le regole inferenziali utilizzate nei segmenti della dimostrazione presi in considerazione ("eliminazione della  $\vee$ " e "assurdo classico")

## BIBLIOGRAFIA

- Bellissima, F. & Pagli, P.: 1993, *La verità trasmessa*, Sansoni, Firenze.
- Ciarrapico, L. & Mundici, D. (a cura di): 1995, *L'insegnamento della logica*, atti seminario AILA-MPI.
- Ciceri, C., Furinghetti, F. & Paola, D.: 1996, Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica della dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 19B, n.3, 209-234