Schede di lavoro

Scheda 1 di ingresso (lavoro a coppie)

1. Tracciate su un piano cartesiano xOy i punti riportati nella seguente tabella (O è l'origine del piano, ossia il punto di incontro dei due assi x e y di riferimento, x l'asse orizzontale e y quello verticale):

x	y
3	1
1	3
-2	5
1	-3

2. Se vi dicono che $y = 3x+1$, sapendo che $x = 5$, quanto vale y? E se y vale 4, quanto vale x?
3. Se vi dicono che $y = x^2$, sapendo che $x = 5$, quanto vale y? E se y vale 4, che valori può assumere x?
4. Avete mai sentito utilizzare, nel corso di matematica che hai seguito nella scuola media, il termine *funzione*? In caso affermativo, in quali occasioni? Sapreste dire che cosa significa questo termine con vostre parole, magari aiutandovi anche con esempi? Immaginate di rivolgervi a uno studente di seconda media, che, quindi, non può essere considerato un esperto in matematica.
5. Se vi dicono che $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, sapendo che $x = 2$, quanto vale y? E se $x = 0$?
6. Nel caso abbiate già sentito parlare di *funzione*, provate a disegnare il grafico della funzione rappresentata con l'equazione $y = 2x - 1$ e il grafico della funzione $y = x^2$. Giustificate la risposta.
7. Nel caso abbiate già sentito parlare di *funzione*, provate a disegnare il grafico della funzione rappresentata con l'equazione $y = x^3 - 2x^2 - 1$. Giustificate la risposta.
8. Se avete risposto alla richiesta dell'esercizio 6, immaginate di parlare al telefono con un vostro compagno e di volergli descrivere le caratteristiche della funzione $y = 2x - 1$. Che cosa gli direste? E per la funzione $y = x^2$?
9. Se avete risposto alla richiesta dell'esercizio 7, immaginate di parlare al telefono con un vostro compagno e di volergli descrivere le caratteristiche della funzione $y = x^3 - 2x^2 - 1$. Che cosa gli direste?
10. Provate a descrivere a parole le caratteristiche che vi sembrano più importanti e interessanti del grafico di una retta. Fate lo stesso con il grafico della funzione di proporzionalità quadratica $y = x^2$.

Grazie per la collaborazione. Le informazioni che ci avete fornito dovrebbero aiutarci a predisporre un percorso di insegnamento apprendimento adeguato a conseguire una buona comprensione del concetto di funzione, uno dei più importanti dell'intera matematica.

Scheda 2 : il moto e la variazione di posizione nel tempo in un moto rettilineo (lavoro individuale e in piccoli gruppi di 4 studenti)

1. A turno, ciascun coordinatore di ogni gruppo deve muoversi rispetto al sensore, osservando la traccia del proprio movimento proiettata su un muro dell'aula grazie al view screen posto sulla lavagna luminosa e collegato alla calcolatrice. Tutti gli studenti devono osservare attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula. Non parlate delle vostre osservazioni e delle vostre idee con i compagni; limitatevi a osservare e a pensare. Avrete tempo di discutere dopo.
2. Al termine del movimento dei 5 coordinatori, riunitevi nei gruppi di lavoro per riflettere e discutere nel vostro gruppo su quanto avete fatto o avete visto fare. Cercate di produrre qualche ipotesi (o di confrontare quelle eventualmente già pensate individualmente durante la precedente attività) sul come e perché il movimento era legato al grafico osservato sul muro.
3. La seguente attività deve essere effettuata da uno studente per ciascun gruppo, che non sia il coordinatore. Questo studente deve muoversi rispetto al sensore che, però, non è in funzione. Tutti gli altri studenti devono cercare di disegnare, sul proprio foglio, un grafico "spazio – tempo" simile a quello che si sarebbe prodotto sul muro se il sensore fosse stato in funzione. Subito dopo, lo stesso movimento prima eseguito senza sensore in collegato deve essere ripetuto con il sensore in funzione. Tutti gli studenti devono confrontare la traccia proiettata sul muro con il grafico posizione – tempo disegnato prima sul foglio.
4. In ciascun gruppo di lavoro rispondete, per scritto, alle seguenti domande: quando si ha un segmento orizzontale? Quando si ha un segmento obliquo che sale e quando un segmento obliquo che scende? Quando si ha una curva che sale? E quando si ha una curva che scende? Quando si ha una curva a $\cup$? E quando invece si ha una curva a $\cap$?
5. A turno, uno studente di ciascun gruppo che non si è ancora mosso rispetto al sensore, deve muoversi con il sensore in funzione e con la traccia proiettata alle sue spalle, in modo tale che egli, al contrario dei compagni, non possa osservare la traccia prodotta dal proprio movimento. Lo studente che si muove deve descrivere verbalmente, al tempo stesso, i propri movimenti e le caratteristiche significative della traccia proiettata sul muro e visibile a tutti gli altri studenti. I compagni di gruppo devono prendere nota di eventuali errori commessi dallo studente che si è mosso per poi discuterne, in gruppo al termine dell'esperienza.
6. A turno, tutti gli studenti che ancora non si sono mossi rispetto al sensore devono cercare di riprodurre, con il proprio movimento, un grafico posizione – tempo generato dalla calcolatrice.
7. Cinque studenti scelti all'interno dei cinque gruppi dall'insegnante devono riprodurre ciascuno un grafico diverso disegnato dall'insegnante sulla lavagna. I compagni di gruppo possono intervenire per migliorare la performance, prima dicendo a parole come fare e poi mettendolo in pratica.
8. A turno, ciascun coordinatore si muove rispetto al sensore e i compagni di gruppo riportano riportato, sul proprio quaderno, la traccia proiettata sul muro durante il movimento del coordinatore. Al termine del movimento, il coordinatore, utilizzando una specifica funzione fornita dalla calcolatrice, deve rilevare un certo numero di coppie di dati "tempo-posizione". I dati i raccolti devono essere elaborati a casa e potete utilizzarli per tracciare, a partire dal grafico "posizione – tempo" un grafico "velocità – tempo".

Scheda 3: il moto e la variazione di posizione e di velocità nel tempo in un moto rettilineo (lavoro in piccoli gruppi di 4 studenti)

1. Confrontate in ciascun gruppo i grafici "velocità – tempo" prodotti a casa e risponderete alle seguenti domande:
   - ❑ che cosa accade alla velocità avvicinandosi o allontanandosi dal sensore?
   - ❑ È possibile partire con velocità diverse da 0?
   - ❑ È possibile riprodurre, con il proprio movimento, un grafico tempo – posizione che presenti punti angolosi come quelli dei grafici generati dalla calcolatrice?

   Potete sottoporre le vostre ipotesi al vaglio dell'esperienza, utilizzando la calcolatrice, che può tracciare anche grafici di tipo "velocità – tempo" (chiedete all'insegnante come sia possibile predisporre la calcolatrice per avere grafici di tipo "velocità – tempo"
2. Preparate, completandola a casa e in gruppo, eventualmente lavorando a distanza, una relazione che abbia lo scopo di spiegare a un ragazzo che frequenta la seconda media le caratteristiche più significative delle funzioni che esprimono la variazione della posizione rispetto al tempo, oltre alle relazioni che legano fra loro grandezze come posizione, velocità, accelerazione e tempo.

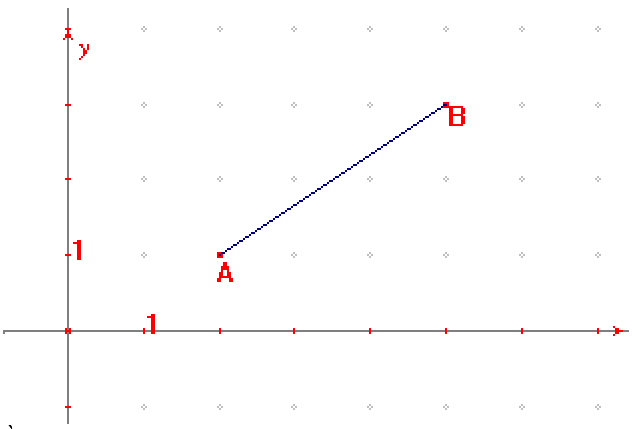
Scheda 4: la pendenza di un segmento
(lavoro individuale e in piccoli gruppi di 4 studenti)

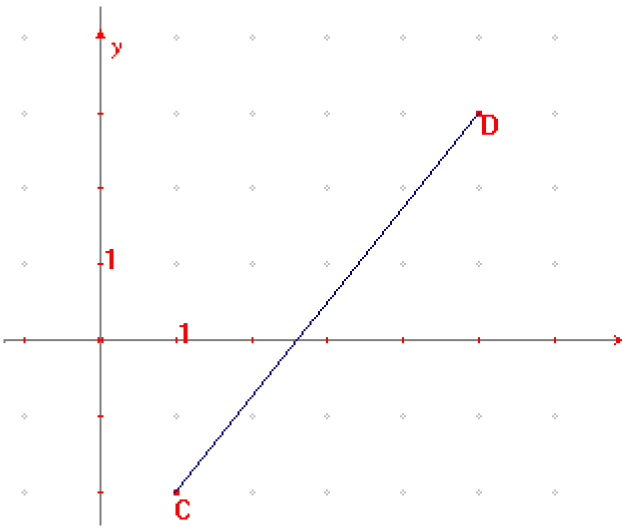
1. (Attività individuale. Tempo consentito: 5 minuti) Nel corso dei tuoi studi o, comunque, nella tua esperienza quotidiana, per esempio percorrendo una strada in salita è possibile che tu abbia incontrato il termine "pendenza". Che immagini ti vengono in mente leggendo la parola "pendenza"? Scrivi su un foglio (ricorda di mettere il tuo nome) quello a cui hai pensato e quello a cui stai pensando (esperienze, immagini, situazioni di riferimento …) relativamente alla "pendenza". Consegna il foglio al tuo insegnante.

2. (Attività da svolgere in gruppo: tempo consentito: al più venti minuti)
Confrontate, con i vostri compagni le idee sul concetto di pendenza; cercate di raggiungere un accordo che rappresenti l'idea del vostro gruppo sul concetto di pendenza (se non riuscite a raggiungere un accordo, esplicitate i punti di disaccordo). Avete al massimo venti minuti per discutere, raggiungere una posizione condivisa (o esplicitare i punti di disaccordo) e trascrivere su un foglio (ricordate di mettere il nome dei vari componenti del gruppo) le conclusioni della vostra discussione. Al termine dell'attività consegnate il foglio al vostro insegnante.

3. (Attività da svolgere in gruppo. Tempo consentito: fino alla fine dell'ora e poi da completare a casa, lavorando anche a distanza)
Quello di pendenza è un concetto fondamentale per approfondire la conoscenza delle funzioni: su di esso costruiremo la competenza di leggere in un grafico molte più informazioni di quelle che si possono vedere a prima vista. Su di esso costruiremo la possibilità di comprendere una parte molto importante nel corso di studi del liceo scientifico e in ogni corso di istituzioni di matematica all'università: l'analisi matematica che, in genere, si inizia a introdurre nel penultimo anno di liceo.
Le attività che seguono hanno lo scopo di precisare e generalizzare il concetto di pendenza, proponendo anche situazioni significative per la sua applicazione.
Che informazione viene data a un ciclista quando incontra un cartello del tipo seguente? Se, da quando ha incontrato il cartello, il ciclista ha percorso 50 metri di strada in salita può sapere di quanto è salito in altezza? In caso affermativo, come? In caso negativo, perché?

Considerate i segmenti AB e CD rappresentati sui seguenti piani cartesiani, nei quali è stata fornita l'unità di misura sugli assi:





È possibile determinare la pendenza di AB e di CD? In caso affermativo, come? In caso negativo, perché?
La pendenza indicata nel cartello stradale e la pendenza dei segmenti AB e CD vengono calcolate nello stesso modo, oppure esistono differenze nelle procedure di calcolo della pendenza di una strada e della pendenza di un segmento? Se ritenete che esistano differenze, precisate quali sono.

Abbiamo detto che il concetto di pendenza è particolarmente importante. Per questo motivo vi chiedo di definire sulla vostra calcolatrice una funzione pend(A,B) che, ogni volta che venga eseguita, fornisca la pendenza del segmento AB.
Come fare per definire la funzione pendenza? Alcuni suggerimenti (da seguire e leggere in gruppo, eventualmente utilizzando anche la comunicazione a distanza)
La prima cosa da fare è decidere la rappresentazione da utilizzare per inserire un punto nella calcolatrice. Se ci pensate, un punto nel piano cartesiano è una coppia ordinata di numeri: il primo numero, ossia il primo componente della coppia, rappresenta l'ascissa e il secondo numero l'ordinata. Per esempio, la coppia (3,4) indica un punto avente ascissa (x) uguale e 3 e ordinata (y) uguale a 4 (ricorderete che l'asse delle x è in genere quello orizzontale, mentre l'asse delle y è in genere quello verticale).
Identificare un punto con una coppia ordinata di numeri reali è il primo passo per rappresentare un punto nella calcolatrice. Infatti la calcolatrice accetta le *liste*, che sono strutture dati ideali per rappresentare sequenze ordinate di numeri (coppie, terne, quaterne,…). Poiché un punto è una coppia ordinata di numeri reali, per rappresentare nella calcolatrice il punto P(3,4) sarà sufficiente inserire nella calcolatrice la lista {3, 4} (nota che la lista viene riconosciuta dalla calcolatrice per l'uso delle parentesi graffe; gli elementi della lista sono separati l'uno dall'altro da una virgola).
Supponiamo di voler inserire nella calcolatrice i punti A(2,1) e B(5,-3). Allo scopo digitiamo
{2,1} STO a
{5, -3} STO b
la calcolatrice ha immagazzinato nelle due variabili *a* e *b* i due punti, ossia le due liste {2,1} e {5, -3}.
Provate ora a scrivere a[1] (attenzione: parentesi quadrate!) e a battere ENTER. La calcolatrice dovrebbe restituire 2, ossia la prima componente della lista *a*. Infatti la scrittura *a*[*n*] indica l'ennesimo componente della lista *a*. Provate a scrivere sulla calcolatrice b[1] e a battere invio. E se voleste ottenere –3, ossia l'ordinata del punto B, che cosa dovreste digitare?
Siete pronti per scrivere il programma, bastano le seguenti istruzioni e … un po' di spirito d'iniziativa!

APPS, Program editor (richiamiamo l'editor di programmi e funzioni), New (si tratta di una nuova funzione), function (vogliamo una funzione, non un programma), digitare su variabile: pend
Pend(a,b)
Func
Qui dovete precisare i calcoli che la macchina deve effettuare
EndFunc

Il fatto che si siano precisati, dentro le parentesi della funzione pend i parametri a,b consente di far sì che la calcolatrice richieda, quando si voglia calcolare la pendenza di un segmento XY, la scrittura pend(x,y). A questo punto la funzione pend viene computata sostituendo il parametro formale *a* con la lista *x* e il parametro formale *b* con la lista *y*, calcolando la pendenza di XY. Provate a vedere che cosa accade se al posto di pend(a,b) scrivete semplicemente pend(). Avete capito?
Provate ora se la vostra funzione pend(a,b) appena definita va bene, facendo calcolare alla macchina la pendenza dei seguenti segmenti :
PQ con P(2,4) e Q(1, 6)
MN con M(-1, 0) e N(-3, - 5)
EF con E(-21/3, 41/5) F(11/231, 7/561)
In alcuni casi può essere vantaggioso rendere automatici certi calcoli!

4. (attività individuale) La massima pendenza delle rampe per l'accesso dei disabili è 8.33%. (Cioè, l'inclinazione è 0.0833). La massima distanza da terra permessa per una singola rampa alla massima pendenza è 9m. Disegnate una rampa per una porta che ha la sua soglia a 1 m. sulla superficie. Qual è la lunghezza minima della rampa che può essere usata in questa situazione?

5. (Discussione in gruppo). Domanda da … un milione di dollari: ha senso parlare di pendenza di una curva? Può essere utile? Perché? Che informazioni dà? Può essere definita, calcolata in qualche modo? Giustificate le risposte fornite e, soprattutto, tenete traccia della discussione relativa a questa domanda.

Scheda 5. Ancora sul concetto di pendenza di un segmento
(Lavoro in piccoli gruppi di 4 studenti)
1. Confrontate il lavoro svolto a casa. Dopo aver chiesto all'insegnante eventuali chiarimenti, utilizzate il programma che avete costruito per calcolare la pendenza dei segmenti AB, CD, EF con A(1; - 1) B(2; -1/2) C(0; -3/4) D(-1 ; -2/3) E(-1; -2) F(-2/3; -7/8)
Eseguite un controllo di massima dei risultati ottenuti facendo uno schizzo che rappresenti i tre segmenti: quali informazioni utilizzate per effettuare questo controllo?
Provate a disegnare su un piano cartesiano un segmento che ha pendenza del 100%. Potreste disegnare un segmento che ha una pendenza del 200%? Se sì, come? Se no, perché? Potete calcolare la pendenza di un segmento verticale? Perché? Che risposta dà la vostra calcolatrice?
Vi chiedo di riprendere e ridiscutere la seguente questione:
Domanda da … un milione di dollari: ha senso parlare di pendenza di una curva? Può essere utile? Perché? Che informazioni dà? Può essere definita, calcolata in qualche modo? Giustificate le risposte fornite e, soprattutto, tenete traccia della discussione relativa a questa domanda.

Scheda 6: le funzioni lineari con graphic calculus
(Attività in laboratorio di informatica a coppie)

1. Entrate nell'ambiente "Line" di Graphic Calculus. Selezionate l'opzione "Fraction" nel menu "Numbers" e fate in modo che siano attivati tutti i menu "Formula", Intercept", "Slope", " "Zero". Con il mouse trascinate uno dei due punti rossi per cui passa la retta e vedete che effetto ha il vostro trascinamento su grafico, formula, intercept, slope e zero. Ogni volta usate anche i due bottoni del menu a icone in alto a sinistra "read slope". Cercate di dare un'interpretazione di ciascuno degli oggetti che state tenendo sott'occhio: slope, intercept, formula, zero. Che differenza c'è tra i due bottoni "read slope"?
2. Perché la pendenza è una caratteristica essenziale della retta? Si può dire che conoscendo la pendenza di una retta si individua la retta in modo univoco? Giustificate la risposta.
3. Se avete risposto in modo negativo all'ultima domanda dell'esercizio precedente, dite quali informazioni sono necessarie e sufficienti per individuare una retta in un piano cartesiano. Confrontate la vostra risposta con Cabri: quante informazioni e di che tipo potete dare a Cabri per far sì che sia possibile disegnare in Cabri una retta?
4. Sia data la retta di equazione $y = 2x + 1$. Costruite con un foglio elettronico una tabella con tre colonne e una ventina di righe. Nella prima fate variare la variabile x con passo costante a partire dal valore -4; nella seconda mettete i corrispondenti valori della y. La terza sia la colonna delle differenze fra valori consecutivi di y (ossia $y_2 - y_1$ nella seconda cella della colonna, $y_3 - y_2$ nella terza cella e così via, fino a $y_{20} - y_{19}$). Che cosa osservate nella terza colonna? Vi aspettavate questo risultato? Pensate che qualcosa di simile si ottenga per qualsiasi retta? Perché? Come potete giustificare le vostre risposte?
5. Si può dire, secondo voi, che data una successione di punti definita da un valore iniziale a e tale che la differenza tra due successivi valori è costante, allora i punti di questa successione sono allineati, ossia stanno su una retta? Per esempio, prova a determinare 10 punti della successione di punti tali che il primo abbia valore 5 e gli altri siano tali che la differenza tra due valori successivi valga 2. Questi punti stanno su una retta? Quale? Giustificate la risposta.
6. Come potreste definire con una formula, in generale, una successione che parta da un valore iniziale e che sia tale che la differenza tra due valori successivi resti costante? I punti di questa successione stanno sempre su una retta? Giustificate la vostra risposta spiegando *perché no*, se avete risposto *no* e scrivendo l'equazione della retta su cui stanno i punti se avete risposto *sì*.
7. (Attività da svolgere individualmente o a coppie a casa, come consolidamento) Visita il sito http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.5/index.htm e svolgi le attività in esso suggerite.

Scheda 7: trovare la formula dato il grafico di una retta

(Attività in laboratorio di informatica a coppie)

1. Data l'equazione di una funzione lineare è possibile determinarne il grafico trovandone due punti (infatti il grafico di una funzione lineare è una retta e per due punti passa una e una sola retta). Disegnate, per esempio, i grafici delle funzioni rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - 4$ y=-3x-3; $y = x/3 - 2/3$; $2x - y + 1 = 0$; $3x - 2y + 3 = 0$
2. Secondo voi è possibile, in teoria, dato il grafico di una funzione lineare, determinarne l'equazione? Cercate di giustificare la vostra risposta.
3. Entrate nell'ambiente di graphic calculus "Finding the formula"; alla richiesta del percorso, cercate la cartella "Fichiers" e poi lanciate il file "formula". Selezionate "Linear" e partite. Cercate di capire che cosa vi chiede questo ambiente di Graphic Calculus e provate a rispondere alla varie domande. Prima di rispondere, pensate attentamente e confrontate la vostra strategia risolutiva con quella attuata dal vostro compagno o dalla vostra compagna di banco. Lavorate con attenzione e concentrazione e non con fretta, altrimenti non riuscirete a svolgere l'attività conclusiva di questa scheda.
4. Che tipo di equazione ha, in generale, una funzione lineare? Quante informazioni vi servono per individuare una funzione lineare? Quali possono essere queste informazioni? Risolvete i seguenti esercizi:
   a) determinate l'equazione della funzione lineare che ha come pendenza (slope) 3 e quota (intercept) 5
   b) determinate l'equazione della funzione lineare che ha come pendenza (slope) 3 e passa per (1; 2)
   c) determinate l'equazione della funzione lineare che ha come pendenza (slope) 3 e zero 5
   d) determinate l'equazione della funzione lineare che passa per A(2; 4) e B (5; 6)
   e) determinate l'equazione della funzione lineare che passa per A(2; 5) e ha come zero 6
5. Cercate di scrivere una procedura che, in generale, risolva i cinque problemi dell'esercizio precedente.

Scheda 8: confronti di funzioni lineari

(attività di produzione individuale e di confronto in piccoli gruppi e poi, con discussione matematica alla presenza di tutta la classe guidata dall'insegnante. In questa discussione l'obiettivo è quello di mettere in risalto eventuali metafore legate al moto, come quelle che associano la pendenza alla velocità di un corpo e la quota alla posizione di partenza)

1. (individuale) Confronta le seguenti coppie di funzioni lineari (ossia di' per quali x la prima funzione di ogni coppia assume valori minori, uguali o maggiori della seconda)
   $y = 3x - 5$ $y = 2x + 10$
   $y = 0{,}5x - 3$ $y = 2x - 20$
   $y = -3x + 1$ $y = 2x - 3$
   $y = -5x + 1$ $y = -3x + 2$
   $y = -4x - 1$ $y = -5x + 2$
2. Confrontate nel vostro gruppo di lavoro i procedimenti risolutivi attuati e le risposte fornite al precedente esercizio. Esiste qualche strategia per accorgersi subito che da un certo valore di x in poi una delle due funzioni assume valori maggiori dell'altra? Giustificate la risposta.
3. Dedicate cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema: "come si può determinare il segno della funzione $f(x) = (2x - 1)/(1 - 3x)$?". In seguito confrontate e discutete le strategie risolutive.
4. Dedicate cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema "come potete determinare il punto di intersezione delle due rette di equazione $y = 3x - 2$ e $y = 4x + 1$?". In seguito confrontate le strategie risolutive.
5. Prestate particolare attenzione alla fase di discussione collettiva delle strategie messe in atto per risolvere gli esercizi proposti.
6. (Individuale) 5. Confronta le due espressioni $\frac{1}{5}x - 4 \quad e \quad \frac{1}{10}x + 9$

Scheda 9. Modelli lineari
(Attività in coppie).
Per **modello di una situazione** si intende, in genere, una descrizione, in un determinato linguaggio, di quello che si conosce e che si ritiene interessante di quella situazione. Un modello matematico è una rappresentazione (una descrizione) che fa uso del linguaggio matematico (e quindi di numeri, espressioni, equazioni, tabelle, grafici,…).
Avere una buona descrizione di una situazione può essere utile, in quanto una buona descrizione può aiutare a comprendere meglio la situazione, a fare previsioni, insomma a effettuare, quando se ne presenti la necessità o l'opportunità, delle scelte.
Quando si costruiscono modelli (e quindi descrizioni) di situazioni, si deve spesso fare i conti con il tempo e le informazioni a disposizione: in genere è vero che con maggior tempo a disposizione si potrebbero costruire modelli migliori, più raffinati e soddisfacenti. Non è detto, però, che sia sempre possibile poter disporre del tempo necessario a costruire un modello che ci soddisfi del tutto: spesso è meglio avere una descrizione molto approssimativa, piuttosto che non poter disporre di alcuna descrizione. Facciamo un piccolo esperimento:
prova a stimare in un minuto il massimo numero di monete da 100 lire che puoi disporre sul tuo banco in modo tale che siano a due a due non sovrapposte (nemmeno parzialmente).
È chiaro che con più tempo a disposizione avresti potuto fornire una risposta più accurata, ma il compito in cui eri impegnato aveva fra i suoi vincoli quello di essere completato in un minuto … e i vincoli sono importanti, perché allentarli in genere costa tempo e denaro. Usiamo una metafora che sembra appropriata: tu sai che cosa è la risoluzione di un'immagine. Sai anche che l'aumento della risoluzione costa tempo e risorse e quindi non sempre è utile e possibile utilizzare la migliore risoluzione a disposizione. Ciò accade anche con i modelli, che sono caratterizzati da una propria risoluzione: non sempre è utile e opportuno scegliere la migliore risoluzione.
Nelle attività che hai svolto fino ad ora hai spesso avuto a che fare con modelli matematici: uno di essi è l'ottica geometrica, che utilizza il linguaggio della geometria per descrivere il fenomeno della visione. Sono modelli (che descrivono come varia la posizione di un mobile rispetto al tempo) quei grafici che hai visto proiettai sul muro mediante la lavagna luminosa nell'esperienza con il sensore di posizione. Sono modelli le funzioni lineari che abbiamo detto descrivono successioni per cui è costante la differenza tra due termini successivi. È un modello il diagramma ad albero che hai tracciato nella prima attività che hai svolto quest'anno per stabilire un'equa suddivisione della somma giocata fra due persone una volta che il gioco era stato interrotto prima che fosse finito. Il linguaggio delle lettere consente di esprimere relazioni fra variabili significative e quindi è utilissimo per costruire modelli matematici di situazioni. D'ora innanzi lavoreremo più sistematicamente sul concetto di modello, attraverso la proposta e la discussione di alcune attività sistematiche.
Prima, però, ancora un piccolo esperimento: provate a stimare, in dieci minuti, la superficie della Liguria utilizzando la cartina di un atlante geografico

1. In un recente scavo archeologico in Calabria sono stati ritrovati i resti di una statua greca, probabilmente un guerriero, che era posto davanti a un tempio. L'unica parte intatta della statua è un piede che misura in lunghezza 76 cm. Vorremmo stabilire quanto era alta approssimativamente questa statua. Conosciamo le misure del David di Michelangelo: lunghezza del piede 54 cm e altezza della statua 432 cm. Cerca di stabilire l'altezza della statua greca. Spiega le ipotesi che fai e il tuo procedimento risolutivo.
2. Si sa che la luce viaggia alla velocità di circa 3×10^5 km / s. Sapendo che Alpha Centauri dista dalla Terra circa 4,5 anni luce e che un anno luce è la distanza che la luce percorre in un anno, puoi determinare la distanza in metri della Terra da Alpha Centauri? In caso di risposta affermativa, di' quale è questa distanza.
3. Nel 1999 l'Italia è stata segnata da ben 219 032 incidenti stradali; nel 1998 da 204 703. Gli incidenti del 1999 hanno comportato la morte di 6 600 persone e il ferimento di 316 000. Negli ultimi dieci anni, sulle strade italiane si sono contate 72 000 vittime e 2 400 000 feriti. In base ai dati precedenti, di' se è possibile stimare:
    a) di quale percentuale è aumentato il numero degli incidenti stradali dal 1998 al 1999
    b) qual è la percentuale di italiani che sono stati interessati da un incidente stradale negli ultimi dieci anni
    c) quanti sono gli incidenti stradali nel mondo

   Giustifica le tue risposte, precisando anche i limiti degli eventuali modelli che hai scelto per rispondere.
4. Un ciclista A parte da Milano alle 7.30 e viaggia quasi costantemente a 35 km/h, dirigendosi verso Mestre (che è vicino a Venezia). Un secondo ciclista B parte da Mestre dirigendosi verso Milano, viaggiando con velocità quasi costante di 30 km/h. Se i due ciclisti fanno la stessa strada, dopo quanto tempo e a quanti km. Da Milano si incontreranno?

5. Confronta fra loro almeno due offerte telefoniche presenti in rete

Scheda 10: operazioni con le funzioni lineari

1. (Individuale) E' vero che la somma e la differenza di due funzioni lineari sono ancora funzioni lineari? Giustifica la risposta.
2. (Individuale) E' vero che il prodotto e il quoziente di due funzioni lineari sono ancora funzioni lineari? Giustifica la risposta.
3. (Individuale). Considera le due funzioni lineari $y = 2x - 5$ e $y = - 3x + 2$; Calcolane le funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente. Cerca di immaginare le principali caratteristiche del loro grafico (soprattutto cerca di pensare a quali strategie ti consentono di avare un'idea del grafico delle funzioni quoziente e prodotto).
4. Fai disegnare alla tua calcolatrice i grafici delle funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente considerate nel precedente esercizio. Ti aspettavi ciò che osservi? Confronta con i tuoi compagni di gruppo le tue perplessità, gli eventuali elementi di sorpresa e verifica se cono comuni oppure no.
5. (Attività individuale) Ricorda che abbiamo considerato una funzione come una scatola nera con uno o più ingressi e un'uscita:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

Secondo questa rappresentazione, comporre due funzioni f_1 e f_2 vuol dire applicarle in successione. Così, per esempio, la composta di f_1 e f_2 con f_2, che si indica con la scrittura $f_1(f_2(x))$, vuol dire applicare a x la funzione f_2 e, in seguito, alla sua uscita $f_2(x)$ la funzione f_1. Viceversa per $f_2(f_1(x))$. Considerate le due funzioni $f_1(x) = 2x - 5$ e $f_2(x) = - 3x + 2$, scrivi le equazioni delle composte $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$.

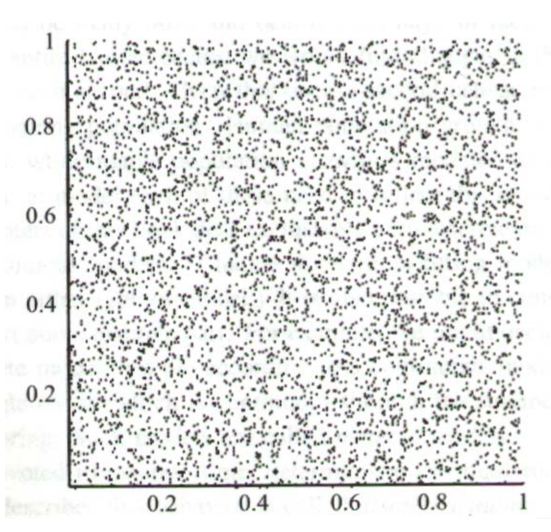
6. (Attività di gruppo) E' vero che la composta di due funzioni lineari è ancora una funzione lineare? Giustificate le risposte.
7. (Attività individuale). Che cosa si può dire della relazione che lega pendenza e quota di una funzione composta di due funzioni lineari alle pendenze e quote delle due funzioni componenti?
8. (Attività in gruppo) Come è possibile avere un'idea dei grafici delle due funzioni $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$ dell'esercizio 5, a partire dai grafici di f_1 e di f_2? In generale, è possibile dire qualcosa dei grafici di $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$ a partire dai grafici di f_1 e di f_2? Verificate le vostre congetture con l'aiuto della calcolatrice o di graphic calculus.

.

Scheda 11: Modelli matematici lineari e non lineari

(Attività da svolgere in piccoli gruppi)

1. La seguente figura rappresenta una fotografia, scattata da un aereo, di una piantagione di alberi; in essa ogni punto rappresenta un albero.



Sapendo che la scala di rappresentazione è 1 : 2000 (ossia, ogni centimetro sulla rappresentazione della fotografia corrisponde a 20 metri nella realtà), stimate, per conto di una compagnia che commercia legna e che è interessata all'acquisto della piantagione, il numero di alberi in essa contenuti.

Supponendo costante la densità media di alberi, quanti alberi conterrebbe una piantagione di area doppia di quella rappresentata? E di area tripla? E la piantagione di un rettangolo avente la base uguale al lato della piantagione rappresentata e altezza doppia del lato?

2. Trovate una legge che esprima il numero di alberi in funzione del lato di una piantagione a pianta quadrata (come quella rappresentata in figura), supponendo che la densità media di alberi sia uguale a quella della piantagione rappresentata in figura.

3. La compagnia per la quale avete lavorato ha un altro bosco che quest'anno ha 1000 alberi. Ogni anno taglia il 20% degli alberi del bosco e ne pianta 50. Quanti alberi ci saranno tra vent'anni? Il numero d'alberi tende ad aumentare con il passare degli anni, oppure a diminuire o a stabilizzarsi? Giustificate le risposte.

4. Un volo dall'Aeroporto SeaTac di Washington all'Aeroporto LAX di Los Angeles deve giraresu LAX diverse volte, prima di essere autorizzato ad atterrare. Tracciare un grafico della distanza dell'aereo da Washington in funzione del tempo dal momento del decollo fino all'atterraggio

5. Per tempo di dimezzamento di un elemento radioattivo, si intende il tempo necessario affinché la metà dei nuclei di quell'elemento decada. Lo ^{90}Sr (stronzio 90) ha un tempo di dimezzamento di 27 anni. Dato un milione di nuclei di ^{90}Sr, quanti ne rimarranno, all'incirca, fra cento anni? E fra mille anni? Quanti anni dovranno trascorrere affinché i nuclei, da un milione si riducano a centomila? E da un milione a un centinaio? Sia $N(t)$ il numero di nuclei presenti al tempo t; quanti nuclei saranno presenti fra 27 anni? E fra 54? E fra 108? Sia $N(0)$ il numero di nuclei presenti all'istante iniziale. Determina una legge che rappresenti l'evoluzione del numero di nuclei $N(t)$ al variare del tempo t.

Scheda 12: cenni di calcolo letterale

(Attività da svolgere individualmente con eventuale supporto e confronto del compagno o della compagna di banco).

1. Inserisci nella tua calcolatrice la seguente espressione letterale: $(2x - 3y)(2x+y-1)$. Scrivi sul tuo foglio il risultato che la calcolatrice fornisce e poi giustifica la correttezza del calcolo utilizzando le proprietà fondamentali del calcolo letterale che abbiamo precisato in classe.
2. Che cosa puoi dire della parità o disparità della differenza dei quadrati di due numeri naturali consecutivi? Giustifica la risposta.
3. È vero che la differenza di due quadrati è uguale al prodotto fra la somma e la differenza delle loro basi? Giustifica la risposta.
4. È vero che il quadrato della somma di due termini x e y è uguale a una somma di tre termini, due dei quali sono i quadrati di x e y e l'altro è il loro doppio prodotto? Giustifica la risposta.
5. (In piccoli gruppi) Come si può sviluppare il cubo di una somma?
6. Come si può sviluppare il prodotto della differenza di due termini x e y per un trinomio che ha come termini i quadrati di x e di y e il prodotto di x con y?
7. Come si può sviluppare il prodotto della somma di due termini x e y per un trinomio che ha come termini i quadrati di x e di y e l'opposto del prodotto di x con y?
8. Scrivete sulla vostra calcolatrice l'espressione $3x^3 + 6x^2$, poi digitate, nell'ambiente "algebra" (F2) , il comando FACTOR. Osservate quello che ottenete. Ora scrivete sulla vostra calcolatrice l'espressione $3x^2\ (x + 2)$ e, in ambiente "algebra" (F2), digitate il comando EXPAND. Dopo aver osservato ciò che si ottiene, riuscite a formulare una congettura sul significato dei comandi FACTOR ed EXPAND? Verificate su altri casi la vostra congettura, chiedendo anche alle coppie di compagni che sono vicini al vostro banco.
9. (Individuale) Prova a sviluppare le seguenti espressioni (e poi verifica la correttezza con la tua calcolatrice):
   a) $(A+B)^2$
   b) $(A - B)^2$

c) $(- B - A)^2$
d) $(A - B)(A + B)$
e) $(- A + B)(- A - B)$
f) $(- A+B)(A+B)$
g) $(A + B)^3$
h) $(A - B)^3$
i) $(B - A)^3$
j) $(- B - A)^3$
k) $(A - B)(A^2 + AB + B^2)$
l) $(B - A)(A^2 + AB + B^2)$
m) $(A + B)(A^2 - AB + B^2)$

è, a tuo avviso, ricalcolarsi le espressioni c), d), e) f), h), i), j), l) dopo aver calcolato a), b), g), k? Giustifica la risposta. Quanto vale $(-A - B)(A^2 - AB + B^2)$? (Attento, non dovrebbe essere necessario effettuare tutto il calcolo….!)

10. (Individuale a casa): leggi la parte del tuo libro che si riferisce ai prodotti notevoli e alle scomposizioni in fattori mediante raccoglimenti e prodotti notevoli. Esegui gli esercizi presenti sulla pagina destra (per chi legge) del libro e quelli consigliati negli esercizi di base. Confronta i dubbi con i tuoi compagni di gruppo o con altre compagne e compagni della classe, anche mediante posta elettronica. Prepara una serie di domande su questioni che non sei riuscito a risolvere, nemmeno confrontandoti con i tuoi compagni. Proponi queste domande al tuo insegnante nei successivi giorni di lezione.

Scheda 13: **Calcolo letterale – scomposizione in fattori**
(Attività in gruppo).

1. Preparate un documento che spieghi a uno studente di terza media, che sa moltiplicare fra loro due polinomi, e che conosce i significati di moltiplicazione, addizione, sottrazione e divisione, che cosa vuol dire scomporre in fattori.
2. Considerate le espressioni $x^2 + 5x + 6$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + x - 2$; $x^2 + 7x + 12$; $2x^2 - 5x - 3$ $4x^2 - 4x - 8$; $x^3 + 2x^2 - x - 2$; $2x^3 + 5x^2 - 23x + 10$. Senza utilizzare il comando FACTOR, ma aiutandovi con il menu grafico, dividete successivamente i polinomi dati per binomi di primo grado fino a ottenere una funzione costante. Provate, per ogni polinomio, a moltiplicare questa costante per ciascuno dei binomi per cui avete successivamente diviso il polinomio. Che cosa ottenete? Vi stupisce o è naturale che sia così? Giustificate la risposta.
3. Dall'attività precedente potete congetturare qualche proprietà generale? In caso affermativo, verificate questa congettura aiutandovi con la calcolatrice e poi discutetela con l'insegnante.

Scheda 14: Le tabelle delle differenze
(Attività individuale)
La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2- B1, B3- B2, B4- B3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3-C2, C4-C3, C5-C4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	B	C	D
0	3		
0,1	3,2	0,2	
0,2	3,4	0,2	0
0,3	3,6	0,2	0
0,4	3,8	0,2	0
0,5	4	0,2	0
0,6	4,2	0,2	0
0,7	4,4	0,2	0
0,8	4,6	0,2	0
0,9	4,8	0,2	0

Scheda 15: Problemi di massimo e minimo con Cabri géomètre
Attività da svolgersi a coppie in laboratorio di informatica

1. Considerate tutti i rettangoli di perimetro fissato e uguale a 12. Che cosa si può dire della loro area? Provate a discutere una decina di minuti con il vostro compagno o con la vostra compagna di banco. Quindi seguite il vostro insegnante che vi proporrà una possibile soluzione con l'aiuto di Cabri géomètre. Cercate di capire bene la tecnica utilizzata per aiutarvi con essa anche nei prossimi lavori.
2. Considerate tutti i triangoli isosceli di lato fissato uguale a 5. Che cosa si può dire relativamente alle loro aree?
3. Considerate tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza di raggio fissato. Che cosa si può dire della loro area? E del loro perimetro?
4. Sia dato un segmento AB di lunghezza fissata. Prendete su AB un punto C e costruite su AC e su CB due quadrati di lati, rispettivi, AC e CB. Che cosa si può dire dell'area e del perimetro della figura formata dai due quadrati? Giustificate le risposte.

Scheda 16. Modelli matematici
(Attività individuale; è possibile un confronto con il compagno o la compagna di banco)
1. Calibano è stato assunto in un'azienda statale con il seguente contratto di lavoro (relativamente all'aumento dello stipendio nel tempo):
Stipendio base di 800 euro e scatto annuale di anzianità uguale all'1,5% dello stipendio di base. Supponendo che l'inflazione rimanga costante e che quindi non vi siano motivi per adeguare lo stipendio base all'inflazione, quanto guadagnerà Calibano fra 5 anni? E fra dieci? Esprimete una funzione che descriva l'aumento nel tempo dello stipendio di Calibano. Quale valore massimo raggiungerà tale stipendio, sapendo che Calibano ha 30 anni e che potrà lavorare fino a 65 anni? Sapendo che al conseguimento dell'età pensionabile Calibano riceverà un trattamento di fine carriera di 40 000 euro e una pensione mensile pari all'80% dello stipendio medio mensile percepito negli ultimi dieci anni, quale soluzione, fra le seguenti, consigliereste a Calibano e perché:

a) lasciare i 40 000 euro in banca (interesse composto dell' 1,5% annuo)
b) investire per dieci anni i 40 000 euro all'interesse composto del 6% annuo, senza però poterne disporre prima che siano trascorsi i dieci anni
c) commutare i 40 000 euro con una rendita mensile di 300 euro

2. Ariele è stato assunto in un'azienda privata con il seguente contratto di lavoro (relativamente all'aumento dello stipendio nel tempo):
Stipendio base di 700 euro e scatto annuale di anzianità uguale all'1,6% dello stipendio dell'anno precedente. Supponendo che l'inflazione rimanga costante e che quindi non vi siano motivi per adeguare lo stipendio base all'inflazione, quanto guadagnerà Ariele fra 5 anni? E fra dieci? Esprimete una funzione che descriva l'aumento nel tempo dello stipendio di Ariele. Quale valore massimo raggiungerà tale stipendio, sapendo che Ariele ha 30 anni e che potrà lavorare fino a 65 anni?

3. Confrontate le due funzioni che esprimono come variano nel tempo gli stipendi di Ariele e Calibano; quale contratto preferireste e perché?

4. Esprimete le funzioni che legano l'area laterale di un cubo e il suo volume alla misura dello spigolo (in pratica, detto x lo spigolo, quanto misurano la superficie laterale e il volume del cubo)?
Confrontate le due funzioni appena ricavate. Sapendo che la resistenza della struttura ossea è proporzionale alla sezione delle ossa e che il peso è proporzionale al volume di un corpo, sapreste dire se può esistere un uomo che sia alto dieci metri, ma che sia in proporzionato (nel senso che appaia come ingrandimento proporzionato di un uomo normale)? Sapresti dire perché gli elefanti hanno le zampe così larghe?

Scheda 17: la migliore approssimazione di una funzione nell'intorno di un punto
(lavoro individuale con la calcolatrice, ma con la possibilità di confrontarsi con il proprio compagno di banco)
1. Seguite le indicazioni del vostro insegnante per imparare a utilizzare l'editor funzioni, a disegnare il grafico di tali funzioni e a utilizzare la funzione "zoom in".
2. Considerate le seguenti funzioni, disegnatene il loro grafico, effettuate, per ciascuna di esse, vari zoom in (almeno cinque o sei per le funzioni non lineari) nei punti a fianco indicati… che cosa potete concludere dalle osservazioni effettuate? Scrivete le vostre osservazioni e le vostre conclusioni e confrontatele con quelle del vostro compagno di banco (ovviamente potete effettuare altre esplorazioni in altri punti delle funzioni date e effettuare esplorazioni con altre funzioni da voi assegnate).
$y = 3x - 2$ zoom in in 0 e in 3 ; $y = 2x - 1$ zoom in in 1 e in 2 $y = x^2$ zoom in in 0 e in 2
$y = x^3 - 2x$ zoom in in 0 e in 1 $y = |x|$ (digitate sulla calcolatrice abs(x)) zoom in in 0 e in 2
$y = \sin(x)$ zoom in in 0 e in 1 $y = 1/x$ zoom in in -1 e in 4

Scheda 18: Modelli matematici
Attività da svolgere in coppie in laboratorio di informatica o a casa (se si possiede un accesso a internet)
Visitate il sito:
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.2/index.htm#applet
e lavorate secondo le indicazioni in esso fornite. Utilizzate la successiva lezione per eventuali richieste di chiarimento da proporre alla discussione collettiva.

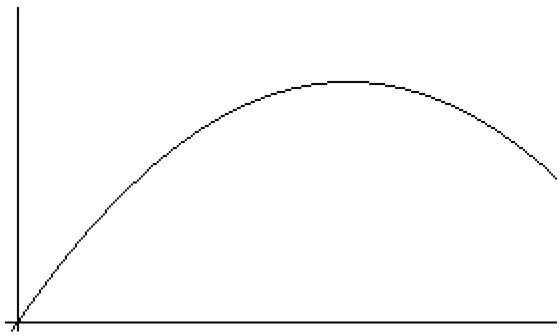
Scheda 19: Modelli matematici (Attività da svolgere in piccoli gruppi)
Situazione
Una studentessa si è fatta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco anti-infiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. Il suo rene filtra il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore.
(Dagli NCTM, 2000).
Problema (da risolvere in gruppo, discutendo le diverse strategie risolutive e riportandole nella relazione che verrà consegnata alla fine della mattinata)
Quanta medicina c'è nel suo organismo dopo 3 giorni? E dopo 4 giorni? E dopo 10 giorni? Cercate di studiare l'evoluzione del farmaco nel tempo; in particolare, cercate di capire che cosa accadrebbe se la studentessa continuasse a prendere il farmaco per molto tempo: pensate che la presenza del farmaco nel suo organismo tenderebbe prima o poi a diminuire o aumenterebbe sempre? E, nel caso aumentasse sempre, pensate che potrebbe superare un qualunque valore prefissato, oppure tenderebbe a un valore che non è superabile nemmeno lasciando passare molto tempo? Come evolve la presenza del farmaco se, dopo dieci giorni, la studentessa non lo assume più? Quanto tempo impiega a ridursi a 1/00 del farmaco presente dopo dieci giorni?
Suggerimenti
Provate a costruire una tabella del tipo

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ = farmaco che rimane in mg.
0	1	0	
1	1	8	
2	1	16	
3	2	24	
…	…	…	
n			

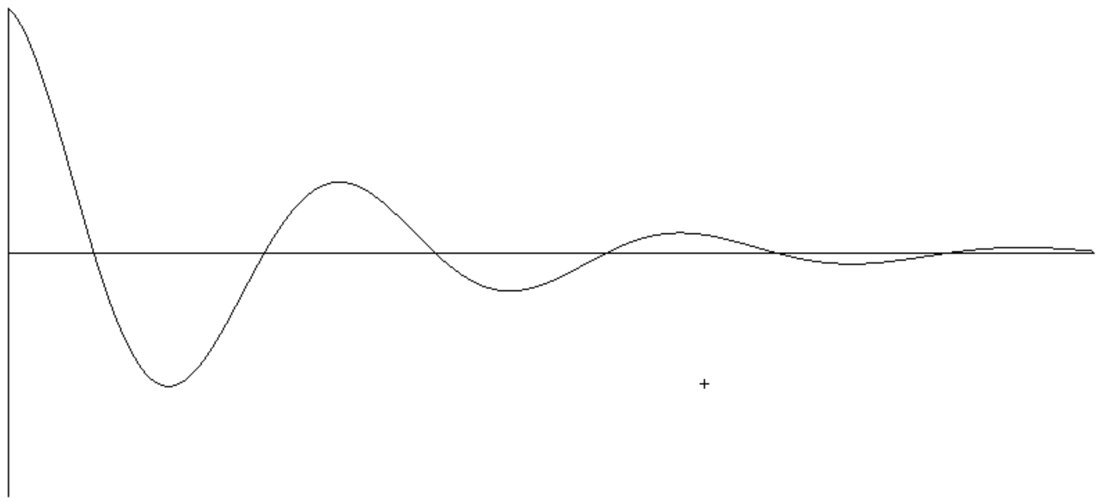
Ricordate che organizzare i dati in modo intelligente aiuta … vi aiuta a definire una funzione che rappresenti l'andamento della presenza di farmaco nell'organismo della studentessa? Riprendete in considerazione le varie domande che vi sono state poste dal testo del problema … ovviamente, per rispondere, aiutatevi anche con la calcolatrice… ricordate la funzione che abbiamo definito nella calcolatrice e che consentiva di studiare l'evoluzione degli alberi della piantagione di una precedente scheda di lavoro? Guardate come abbiamo definito quella funzione nella calcolatrice: potrebbe aiutarvi nel definire la funzione che descrive l'evoluzione del farmaco nell'organismo della studentessa.
Potete anche visitare il sito http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap7/7.2/index.htm.

Scheda 20: I grafici "parlano"
(Attività da svolgere con il proprio compagno o con la propria compagna di banco)

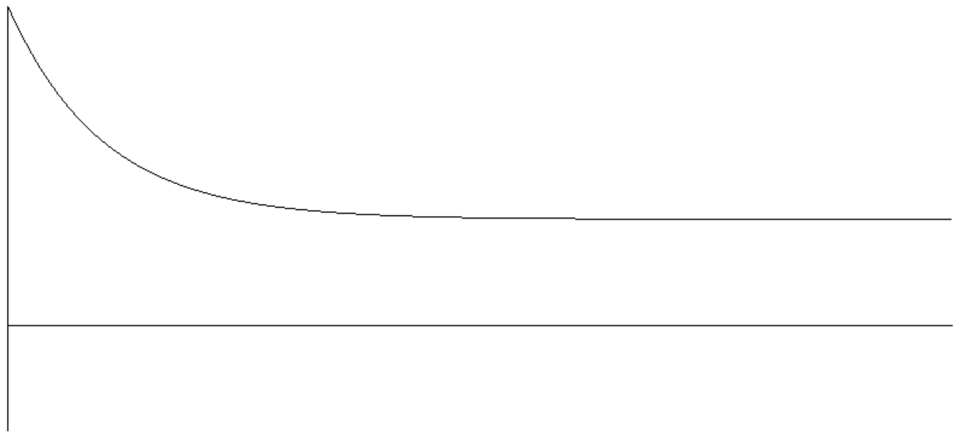
1. Descrivere e commentare le informazioni offerte dal seguente grafico che riporta in ordinate la produttività di un'azienda e in ascisse il numero di lavoratori.



2. Descrivere e commentare le informazioni offerte dal seguente grafico che riporta in ascisse il tempo e in ordinate la distanza rispetto all'origine del sistema di riferimento di una massa collegata a una molla e posta su un piano orizzontale. La massa si può considerare pressoché puntiforme e l'origine del sistema di riferimento si trova nella posizione di riposo della massa (quando la molla non viene allungata né compressa).



3. Descrivere e commentare le informazioni fornite dal seguente grafico che riporta in ordinate la temperatura di una tazza di caffè e in ascisse il tempo



Scheda 21 : Parlare con i grafici
(Attività da svolgere con il proprio compagno o con la propria compagna di banco)
In tutti gli esercizi seguenti le risposte fornite vanno giustificate.

1. Generalmente, quanto più fertilizzante si utilizza, tanto più si garantisce la produzione del raccolto. Tuttavia, se si usa una quantità eccessiva di fertilizzante, si avvelena il raccolto e la produzione decresce rapidamente. Tracciate un possibile grafico che mostri la produzione del raccolto in funzione del fertilizzante utilizzato.
2. Un aereo in volo da Roma a Genova deve girare intorno all'aeroporto di Genova per cinque volte prima di ottenere il permesso di atterrare. Tracciate un grafico che rappresenti la distanza, al variare del tempo, dell'aereo da Genova.
3. Un organismo unicellulare che si riproduce per scissione è posto in un brodo nutritivo con risorse praticamente illimitate. Tracciare un grafico che descriva un possibile andamento dell'evoluzione del numero di organismi nel tempo.
4. Una popolazione si riproduce inizialmente in modo tale che il tasso di crescita è direttamente proporzionale al numero di individui presenti. Con il passar del tempo la crescita della popolazione tende a rallentare in seguito a problemi legati alla gestione delle risorse limitate. Tracciare un grafico che descriva un possibile andamento dell'evoluzione del numero di individui della popolazione nel tempo.
5. In un ambiente a risorse limitate vivono due specie di animali, A e B. A serve di nutrimento a B. Supponiamo che in assenza di individui della popolazione B (predatori), la popolazione A (prede) si sviluppi in modo che il tasso di crescita sia direttamente proporzionale al numero di individui. Supponiamo anche che l'effetto dei predatori sulla preda consista nel ridurre il tasso di crescita in misura proporzionale al numero di predatori presenti. Supponiamo ancora che in assenza di prede il predatore si estingua rapidamente. Supponiamo infine che la presenza delle prede abbia come effetto di incrementare il tasso di crescita del predatore in misura proporzionale al numero delle prede. Tracciare un grafico che rappresenti un possibile andamento delle due popolazioni A e B nel tempo.

Scheda 22: Modelli matematici
(Attività da svolgere in coppie in laboratorio o a casa, se si possiede un accesso a internet)
Visitate il sito:
http://illuminations.nctm.org/imath/912/TroutPond/student/index.html
e lavorate secondo le indicazioni in esso fornite. Utilizzate la successiva lezione per eventuali richieste di chiarimento da proporre alla discussione collettiva

Scheda 23: Le funzioni quadratiche con Graphic Calculus
(Attività in laboratorio di informatica a coppie)

1. Entrate nell'ambiente "Parabola" di Graphic Calculus. Selezionate l'opzione "Graph" nel menu a destra e fate in modo che siano attivati tutti i menu "Formula" e "Zero". Con il mouse trascinate uno alla volta i due punti rosso e verde per cui passa la parabola e vedete che effetto ha il vostro trascinamento su grafico, formula, e zero. Cercate di dare un'interpretazione di ciascuno degli oggetti che state tenendo sott'occhio: grafico, formula, zero.
2. Che cosa sono quelle due formule che a volte compaiono nel menu "Formula"? Perché a volte ce ne è una sola e a volte due? Come sono legate fra loro le due formule, quando presenti?
3. Stesso esercizio precedente, ma ora attivate invece di GRAPH, AXES. Che cosa cambia?
4. Si può parlare come per la retta di pendenza di una parabola? Giustificate la risposta.
5. Sia data la parabola di equazione $y = x^2 + 1$. Costruite con un foglio elettronico una tabella con quattro colonne e una ventina di righe. Nella prima fate variare la variabile x con passo costante a partire dal valore –4; nella seconda mettete i corrispondenti valori della y. La terza sia la colonna delle differenze fra valori consecutivi di y (ossia $y_2 - y_1$ nella seconda cella della colonna, $y_3 - y_2$ nella terza cella e così via, fino a $y_{20} - y_{19}$); nella quarta colonna mettete le "differenze seconde". Che cosa osservate nella quarta colonna? Vi aspettavate questo risultato? Pensate che qualcosa di simile si ottenga per qualsiasi parabola? Perché? Come potete giustificare le vostre risposte? (Potete aiutarvi anche con un software di manipolazione simbolica)

Scheda 24.

1. Esplorate, aiutandovi anche con la calcolatrice, il grafico $f(x)=nx^2$ per differenti valori di n. I cambiamenti su n che effetto hanno sul grafico?
2. Se $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=(x+1)^2$, completate la tabella seguente.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
2			80	16
		4		81

Scheda 25: trovare la formula dato il grafico di una parabola
(Attività in laboratorio di informatica a coppie)

1. Data l'equazione di una funzione quadratica è possibile trovarne quanti punti si vogliono e disegnarne un grafico approssimato (perché il disegno del grafico di una parabola è approssimato, mentre quello di una retta si considera esatto?) Disegnate, usando per ciascuna funzione quadratica sei punti, i grafici delle funzioni rappresentate dalle equazioni: $y = 3x^2 - 4$ $\quad y= -3x^2 +4$; $\quad y = (x + 1)^2$; $\quad y = - x^2 - 2x - 1$ $\quad y=x^2 + x$
2. Secondo voi è possibile, in teoria, dato il grafico di una funzione lineare, determinarne l'equazione? Cercate di giustificare la vostra risposta.
3. Entrate nell'ambiente di graphic calculus "Finding the formula"; alla richiesta del percorso, cercate la cartella "Fichiers" e poi lanciate il file "formula". Selezionate "Quadratic" e partite. Cercate di capire che cosa vi chiede questo ambiente di Graphic Calculus e provate a rispondere alla varie domande. Prima di rispondere, pensate attentamente e confrontate la vostra strategia risolutiva con quella attuata dal vostro compagno o dalla vostra compagna di banco. Lavorate con attenzione e concentrazione e non con fretta, altrimenti non riuscirete a svolgere l'attività conclusiva di questa scheda.
5. Che tipo di equazione ha, in generale, una funzione quadratica? Quante informazioni vi servono per individuare una funzione quadratica? Quali possono essere queste informazioni? Risolvete i seguenti esercizi:
   a) determinate l'equazione della funzione quadratica che passa per (5; 2) e ha come vertice (0; 0)
   b) determinate l'equazione della funzione quadratica che ha come vertice (3; 0) e passa per (1; 2)
   c) determinate l'equazione della funzione quadratica che passa per A(2; 4) ; B (5; 6) e O (0, 0)
   d) determinate l'equazione della funzione quadratica che passa per A(2; 5) e ha come zeri 6 e - 1
5. Cercate di scrivere una procedura che, in generale, risolva i cinque problemi dell'esercizio precedente.

Scheda 26: confronti di funzioni quadratiche
(attività di produzione individuale e di confronto in piccoli gruppi e poi, con discussione matematica alla presenza di tutta la classe guidata dall'insegnante)

1. (individuale) Confronta le seguenti coppie di funzioni quadratiche (in alcuni casi, di funzioni quadratiche con una retta) graficamente, aiutandoti con le calcolatrici o con Graphic Calculus o con Derive (ossia di' per quali x la prima funzione di ogni coppia assume valori minori, uguali o maggiori della seconda)
   $y = 3x^2 – 5$ $\quad y = 2x^2 + 10x$
   $y = 0{,}5x^2 – 3$ $\quad y = 2x^2 – 20$
   $y = -3x^2 + x + 1$ $\quad y = 2x^2 – 3x + 1$
   $y = -5x^2 + 2x$ $\quad y = - 3x^2 + 2x$
   $y = - 4x^2 – 1$ $\quad y = - 5x + 2$
   $y = 3x^2 – 5x + 1$ $\quad y = 2x$
2. Confrontate nel vostro gruppo di lavoro i procedimenti risolutivi attuati e le risposte fornite al precedente esercizio. Che cosa cambia rispetto al confronto fra due rette?
3. Dedicate cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema: "come si possono determinare gli zeri (se ci s sono) di una funzione quadratica che può essere scomposta nel prodotto di due funzioni lineari? Fate almeno sei esempi.
4. Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = (2x – 1)*(1 – 3x)$?". Confrontate e discutete le strategie risolutive.
5. Come si possono trovare gli zeri della funzione $y = x^2 + x – 5$? Confrontate le strategie risolutive.
6. Come si possono trovare, se ci sono, gli zeri di una funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$? Dopo aver pensato al problema per una decina di minuti individualmente, confrontate le proposte di strategie risolutive e provate ad attuarle.
7. Dedicate cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema "come potete determinare, se esistono, i punti di intersezione della retta e della parabola di equazione $y = 3x – 2$ e $y = 4x^2 + x$?". In seguito confrontate le strategie risolutive.
8. Determinate, se esistono, i punti di intersezione delle due parabole di equazione $y = x^2 – 2x + 3$ e $y = x^2 + x$
9. Prestate particolare attenzione alla fase di discussione collettiva delle strategie messe in atto per risolvere gli esercizi proposti.
10. (Individuale) 5. Confronta le due espressioni $\frac{1}{5}x^2 - 4x \quad e \quad \frac{1}{10}x^2 + 9$
11. (In gruppo) Determinare una procedura che consenta, individuato uno zero di una funzione quadratica, di determinarlo con una voluta approssimazione.
12. (In gruppo) Determinate una procedura che consenta di dire se una funzione quadratica ha o non ha zeri e, nel caso li abbia, di determinarli.
13. (In gruppo) Determinate una procedura che consenta di confrontare due funzioni quadratiche.
14. Individuale) Siano date le seguenti funzioni
   $f(x) = x^2$; $f(x) = x^2 – 4$; $f(x) = x^2 + 4$

a) per ciascuna di esse costruite una tabella che contenga almeno 5 punti delle funzioni date.
b) Fate disegnare il grafico di $y = x^2$ alla vostra calcolatrice e riportatelo sul vostro foglio. Come pensate che siano fatti i grafici di
   $y = x^2 – 4$, $y = x^2 + 4$, $y = – x^2$, $y = 1 – x^2$, $y = (x – 1)^2$, $y = (x +1)^2$? Provate a disegnarli sul vostro foglio e confrontate i vostri disegni con i grafici prodotti dalla vostra calcolatrice. Sapete spiegare eventuali differenze?
c) Siano dati $f(x) = 2x – 3$ e $g(x) = x^2 – 2x$. Come potete dire se f e g hanno punti in comune, ossia se esistono valori di x tali che $2x – 3 = x^2 – 2x$?
d) Siano f e g le funzioni definite nel precedente punto c). Determinate l'espressione di $f(g(x))$ e di $g(f(x))$. Esistono valori di x per cui $f(g(x)) = g(f(x))$? Giustificate la risposta.

Scheda 27: le tabelle delle differenze

1. La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2- B1, B3- B2, B4- B3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3-C2, C4-C3, C5-C4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	B	C	D
0	0		
0,3	-0,51	-0,51	
0,6	-0,84	-0,33	0,18
0,9	-0,99	-0,15	0,18
1,2	-0,96	0,03	0,18
1,5	-0,75	0,21	0,18
1,8	-0,36	0,39	0,18
2,1	0,21	0,57	0,18
2,4	0,96	0,75	0,18
2,7	1,89	0,93	0,18
3	3	1,11	0,18
3,3	4,29	1,29	0,18
3,6	5,76	1,47	0,18

2. La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2- B1, B3- B2, B4- B3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3-C2, C4-C3, C5-C4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	B	C	D
-0,8	-1,152		
-0,75	-0,98438	0,167625	
-0,7	-0,833	0,151375	-0,01625
-0,65	-0,69713	0,135875	-0,0155
-0,6	-0,576	0,121125	-0,01475
-0,55	-0,46888	0,107125	-0,014
-0,5	-0,375	0,093875	-0,01325
-0,45	-0,29363	0,081375	-0,0125
-0,4	-0,224	0,069625	-0,01175
-0,35	-0,16538	0,058625	-0,011
-0,3	-0,117	0,048375	-0,01025
-0,25	-0,07812	0,038875	-0,0095
-0,2	-0,048	0,030125	-0,00875
-0,15	-0,02588	0,022125	-0,008
-0,1	-0,011	0,014875	-0,00725
-0,05	-0,00262	0,008375	-0,0065
0	0	0,002625	-0,00575
0,05	-0,00238	-0,00238	-0,005
0,1	-0,009	-0,00663	-0,00425
0,15	-0,01913	-0,01013	-0,0035
0,2	-0,032	-0,01288	-0,00275

3. La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A); nella seconda colonna i valori

corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2- B1, B3- B2, B4- B3 … e così via). Nella quarta colonna sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3-C2, C4-C3, C5-C4 … e così via). Nella quinta colonna sono riportati i rapporti tra i successivi valori della variabile B (ossia B2/B1, B3/B2, B4/B3 e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	B	C	D	E
-1	0,5	0,033484	0,00224229	1,071773
-0,9	0,535887	0,035887	0,002403227	1,071773
-0,8	0,574349	0,038462	0,002575715	1,071773
-0,7	0,615572	0,041223	0,002760583	1,071773
-0,6	0,659754	0,044182	0,00295872	1,071773
-0,5	0,707107	0,047353	0,003171077	1,071773
-0,4	0,757858	0,050752	0,003398676	1,071773
-0,3	0,812252	0,054394	0,003642611	1,071773
-0,2	0,870551	0,058298	0,003904054	1,071773
-0,1	0,933033	0,062482	0,004184261	1,071773
0	1	0,066967	0,00448458	1,071773
0,1	1,071773	0,071773	0,004806454	1,071773
0,2	1,148698	0,076925	0,00515143	1,071773
0,3	1,231144	0,082446	0,005521166	1,071773
,4	1,319508	0,088363	0,005917439	1,071773
0,5	1,414214	0,094706	0,006342154	1,071773
0,6	1,515717	0,101503	0,006797353	1,071773
0,7	1,624505	0,108788	0,007285222	1,071773
0,8	1,741101	0,116596	0,007808108	1,071773
0,9	1,866066	0,124965	0,008368523	1,071773
1	2	0,133934	0,00896916	1,071773

Scheda 28. Operare con le funzioni quadratiche

1. (Individuale) E' vero che la somma e la differenza di due funzioni quadratiche sono ancora funzioni quadratiche? Giustifica la risposta.
2. (Individuale) E' vero che il prodotto e il quoziente di due funzioni quadratiche sono ancora funzioni quadratiche? Giustifica la risposta.
3. (Individuale). Considera le due funzioni quadratiche $y = 2x^2 - 5$ e $y = -3x^2 + 2x - 1$; calcola le funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente. Cerca di immaginare le principali caratteristiche del loro grafico (soprattutto cerca di pensare a quali strategie ti consentono di avare un'idea del grafico delle funzioni quoziente e prodotto).
4. Fai disegnare alla tua calcolatrice i grafici delle funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente considerate nel precedente esercizio. Ti aspettavi ciò che osservi? Confronta con i tuoi compagni di gruppo le tue perplessità, gli eventuali elementi di sorpresa e verifica se cono comuni oppure no.
5. (Attività individuale) Ricorda che abbiamo considerato una funzione come una scatola nera con uno o più ingressi e un'uscita:

$$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$$

Secondo questa rappresentazione, comporre due funzioni f_1 e f_2 vuol dire applicarle in successione. Così, per esempio, la composta di f_1 e f_2 con f_2, che si indica con la scrittura $f_1(f_2(x))$, vuol dire applicare a x la funzione f_2 e, in seguito, alla sua uscita $f_2(x)$ la funzione f_1. Viceversa per $f_2(f_1(x))$. Considerate le due funzioni $f_1(x) = 2x^2 - 5$ e $f_2(x) = -3x^2 + 2x - 1$, scrivi le equazioni delle composte $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$.

6. (Attività di gruppo) E' vero che la composta di due funzioni quadratiche è ancora una funzione quadratica? Giustificate le risposte.
7. (Attività in gruppo) Come è possibile avere un'idea dei grafici delle due funzioni $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$ dell'esercizio 5. a partire dai grafici di f_1 e di f_2? E in generale, dati i grafici di due funzioni quadratiche f_1 e f_2 è possibile avere informazioni sui grafici di $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$? Verificate le vostre congetture con l'aiuto della calcolatrice o di graphic calculus.

Scheda 29. Modelli quadratici
1. (A coppie). Riprendete in considerazione e descrivete alcuni modelli già visti in precedenza, in particolare:
   a) reazione nucleare non controllata
   b) crescita di una popolazione cellulare per scissione in assenza di limitazioni di risorse
   c) interesse composto

2. (A coppie) Quali sono i limiti di questi modelli? Come evolve in realtà un'epidemia? Una "catena di Sant'Antonio"?
3. (In piccoli gruppi). Dopo aver confrontato le risposte date nei due precedenti esercizi, provate ad affinare il modello: non considerate più costante il tasso di crescita, ma consideratelo una funzione del numero di individui presenti. Ovviamente deve essere una funzione decrescente del numero di individui presenti. Perché? Quale è la più semplice funzione decrescente? Quale espressione potete quindi utilizzare per il tasso di crescita?
4. Considerate il modello $x(n+1) = r * x(n)*(1 - x(n))$ con $0 =< x =< 1$, o anche $f(x) = r\, x\, (1 - x)$ (x rappresenta il rapporto fra il numero di individui e la capacità massima sopportabile dall'ambiente; r è proporzionale alla velocità di riproduzione in assenza di limitazione di risorse). I modelli rappresentati da una funzione lineare che lega $x(n+1)$ a $x(n)$ avevano un'evoluzione in qualche modo fissata (ricorda come si poteva determinare il numero finale di individui di una popolazione la cui evoluzione era espressa da una relazione del tipo $x(n+1) = k\, x(n) + b$). In questo caso, la dipendenza tra $x(n+1)$ e $x(n)$ è di tipo quadratico. A vostro avviso anche in questo caso l'evoluzione è fissata? Fate un po' di prove modificando i vari parametri, aiutandovi con un software di manipolazione simbolica. Che cosa scoprite? Riportate su un foglio i risultati della vostra esplorazione.
5. (Discussione alla presenza di tutta la classe). Seguite con attenzione la discussione guidata dal vostro insegnante sull'esplorazione che avete effettuato.

Scheda 30. Les clés du Second degré
1. (A coppie) Leggete con attenzione le pagine 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 28 – 29 – 30 31 – 32 – 33 della rivista Equations du second degré, svolgendo gli esercizi proposti.
2. (In gruppo) Preparate un ipertesto o una presentazione in power point che possa spiegare, a un alunno che si trova nel mese di maggio in prima liceo, le equazioni di secondo grado.

Scheda 31. Approssimazioni di funzioni in un punto con funzioni quadratiche: che cosa migliora rispetto alla retta tangente?
1.(In gruppo). Domanda da un milione di dollari: perché si dice che basta un polinomio di secondo grado per rappresentare bene una funzione nell'intorno di un suo punto? Giustifica la tua risposta, precisando limiti e potenzialità dell'affermazione
2. (Discussione collettiva guidata dall'insegnante). Confrontate e commentate, con l'aiuto del vostro insegnante, le risposte fornite al precedente esercizio.

Scheda 32. Modelli

1. Su “La Repubblica” del 10 Agosto 2002, a pagina 12, nell’articolo di Antonio Cianciullo, “Tra deserti e terre sommerse così l’Italia tra cinquant’anni”, si legge: “Ma nella futura Italia mancherà un elemento fondamentale per mantenere inattivo il bilancio agricolo, l’acqua: si prevede una diminuzione delle piogge dell’1% a decade. Una statistica ottenuta sommando zone come la Padania, che manterranno la media, e il Sud, che subirà un vero e proprio tracollo idrico”. Supponendo che la diminuzione dell’1% a decade sia costante sul suolo italiano, quanto tempo sarà necessario perché l’acqua piovana cali del 50% rispetto all’attuale quantità? Questo tempo dipende dalla quantità d’acqua piovana iniziale o è indipendente da essa? Perché? Costruite una successione che consenta di ottenere la quantità d’acqua piovana al variare delle decadi, definendola sulla calcolatrice grafico - simbolica. Che tipo di grafico avrà una successione di questo tipo? A che valore tenderà la quantità di acqua piovana al crescere del tempo? Giustificate le risposte, l’ultima in particolare.
2. Su “La Repubblica” del 10 Agosto 2002, a pagina 12, nell’articolo di Antonio Cianciullo, “Tra deserti e terre sommerse così l’Italia tra cinquant’anni”, si legge: “Al tempo dei romani c’erano tre milioni di ettari di zone umide, il 10% dell’Italia. Oggi ne sono rimasti 200 mila. Salvare questi habitat, che hanno la più alta biodiversità d’Italia, sarà un’impresa titanica”. Quale percentuale del suolo italiano, secondo quanto si legge nell’articolo, è formata attualmente da zone umide? Costruite un modello matematico che descriva la diminuzione delle zone umide dal tempo dei romani a oggi, evidenziandone gli inevitabili limiti.
3. Una palla magica viene lasciate cadere da un’altezza h. Supponendo che la palla perda il 15% dell’energia a ogni urto con il terreno, studiare l’evoluzione dell’altezza della palla dal suolo all’aumentare del numero di urti, determinando una legge analitica che rappresenti la variazione dell’altezza della palla dal suolo. Come sarebbe il grafico dell’altezza della pallina dal suolo al variare del tempo? Che relazione c’è tra i due grafici appena descritti?
4. Una popolazione di batteri presente in un brodo nutritivo raddoppia ogni due ore. Se inizialmente vi sono 1000 batteri, quanti batteri vi saranno dopo una settimana, supponendo che le risorse del brodo nutritivo siano in pratica illimitate?
5. In un recente film, *Un sogno per domani*, un bambino di scuola medie ha un’idea per migliorare il mondo: questa idea prevede di *passare un favore a tre persone diverse*, richiedendo che ciascuna di esse faccia altrettanto con altre tre persone. Supponendo che, mediamente, ogni persona impieghi un mese a passare i tre favori, quanto tempo sarebbe necessario affinché ogni abitante della terra venisse coinvolto in questo grandioso progetto?
6. Mr. Smoke ha deciso di avviare una forma di risparmio *salutare*: invece che compare i due soliti pacchetti di sigarette al giorno, smetterà di fumare e alla fine di ogni mese investirà i soldi risparmiati in un conto bancario che assicura un interesse del 4% annuo. Quanti soldi avrà Mr. Smoke fra vent’anni? Pensate di poter consigliare a Mr. Smoke forme di investimento più redditizio? Come e perché? (suggerimento: per rispondere a questa domanda chiedete aiuto e consiglio anche ai vostri genitori, a parenti ed amici. Ascoltate attentamente che cosa vi consigliano; quindi progettate un piano di investimento da consegnare, alla fine del quadrimestre, a Mr. Smoke e al vostro insegnante. I piani più di investimento più interessanti verranno discussi e, magari, anche attuati!)
7. Supponiamo che in una reazione nucleare non controllata, ogni neutrone produca tre neutroni ciascuno dei quali concorre alla fissione di altrettanti nuclei. Studiare l’evoluzione della reazione al variare del numero di urti. Tracciare un grafico dell’evoluzione del numero di nuclei interessati alla reazione e determinare una legge analitica che rappresenti la variazione del numero di questi nuclei.
8. Supponiamo di studiare la disintegrazione di una massa di materiale radioattivo. Sia t il tempo contato a partire da quando si inizia a studiare il fenomeno e sia $m = m(t)$ la massa che al tempo t non si è disintegrata. Supponiamo che la velocità di disintegrazione sia proporzionale, in ogni istante, alla massa $m(t)$ non ancora disintegratasi. Come evolverà la massa $m(t)$? Dopo aver prodotto qualche congettura di tipo qualitativo, provate a fare qualche ipotesi quantitativa (per esempio potreste ipotizzare che in ogni unità di tempo si disintegri, mediamente, il 5% della massa) e verificate la risposta data in precedenza aiutandovi con le calcolatrici.
9. (Attività da svolgere in coppie in laboratorio o a casa, se si possiede un accesso a internet) Visitate il sito: http://illuminations.nctm.org/imath/912/Whelk/student/index.html e lavorate secondo le indicazioni in esso fornite. Utilizzate la successiva lezione per eventuali richieste di chiarimento da proporre alla discussione collettiva
10. (In gruppo) Una massa oscilla se attaccata a una molla e spostata dalla posizione di equilibrio. Prevedi l'andamento del grafico spazio-tempo e velocità-tempo dall'osservazione del fenomeno, discutendone con i tuoi compagni. Esegui l'esperienza con il CBR e confronta le tue previsioni con il grafico che riproduce la calcolatrice. Cerca di riprodurre il grafico disegnato muovendoti tu rispetto al sensore.
11. (In gruppo) Situazione. Una pentola d’acqua viene riscaldata mediante un fornello elettrico. Quindi il fornello viene spento e la pentola con l’acqua riscaldata viene lasciata a contatto con l’ambiente. Gli strumenti che abbiamo a disposizione sono una sonda di temperatura che, collegata a un computer, consente di rilevare misure di temperatura e di rappresentare graficamente i dati acquisiti e di effettuare su essi alcune analisi statistiche. Richiesta Quali problemi pensate sia significativo porsi e tentare di risolvere in una situazione come quella sopra delineata? Risolvete i problemi che vi siete posti.

Scheda 33. La “pendenza di una curva”… ma che senso ha?
1. (Individuale) In precedenti attività abbiamo visto che alcune funzioni possono essere localmente approssimate (ossia approssimate in un punto) con una funzione lineare il cui grafico è quello della retta tangente alla funzione in quel punto. Riprendi in considerazione quelle schede e cerca di individuare le condizioni per cui una funzione può essere approssimata da una funzione lineare in un punto.
2. (In gruppo). Come è possibile avere un’idea della pendenza della funzione lineare che approssima una funzione in un punto? Provate a scrivere un programma per la vostra calcolatrice che consenta, data una funzione e un punto nel quale tale funzione è approssimabile con una funzione lineare (la sua retta tangente), di determinare la pendenza di tale retta (e, in seguito, l’equazione della stessa retta).
3. (Individuale). Inventate una decina di esercizi di calcolo della pendenza della retta tangente in un punto a una funzione
4. (In gruppo) Confrontate gli esercizi che avete inventato. Siete in grado di risolvere quelli proposti dai vostri compagni? In caso di risposta negativa, perché? In che cosa differiscono da quelli che avete inventato voi?
5. (Discussione collettiva guidata dall’insegnante): da quali variabili dipende la pendenza della retta tangente di una funzione in un punto? Determinate un procedimento di “calcolo a mano” della pendenza della una retta tangente a una funzione in un punto.

Scheda 34: La “pendenza di una curva” con Graphic Calculus
1. (In coppia in laboratorio) Aprite il menu di Graphic Calculus “Diagram of Cahnges; esplorate questo ambiente di apprendimento e poi raccogliete in una relazione che sia il più chiaro possibile quello che pensate di aver capito di questo ambiente e di tutte le sue potenzialità.
2. (In coppia in laboratorio) Aprite il menu di Graphic Calculus, Graphic Caluculs plus, Gradient. Esplorate questo ambiente di apprendimento e poi raccogliete in una relazione che sia il più chiaro possibile quello che pensate di aver capito di questo ambiente e di tutte le sue potenzialità.
3. (Lezione dialogata dell’insegnante in laboratorio). Seguite con attenzione la lezione dell’insegnante sui due ambienti esplorati nelle precedenti attività.

Scheda 35: La piattezza locale di certe funzioni
1. (In coppia in laboratorio di informatica): Considerate le funzioni $f(x) = 3x - 2$ $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ $f(x) = x^3 - 3x^2$ $f(x) = \sin x$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x<0 \\ 2x+5 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

Cercate di vedere, aiutandovi con il software Graphic Calculus, se è possibile determinare un intervallo di x per cui il grafico della funzione appare come una retta orizzontale negli intorni dei seguenti punti: $x = 1$; $x = 0$; $x = 10$.
Osservate attentamente quello che accade e cercate di trarne qualche conclusione.
2. (Discussione collettiva guidata dall’insegnante): Seguite attentamente la discussione collettiva guidata dall’insegnante sulle strategie che avete utilizzato per rispondere al precedente esercizio.

Scheda 36. Le serie infinite

1. Circa due secoli prima di Euclide, Zenone di Elea propose all'attenzione dei filosofi e geometri alcuni sottili paradossi. Il più semplice si può così formulare in termini moderni (da Conti, *Calcolo. Teoria e applicazioni*): per arrivare al traguardo dei 1000 metri, un atleta deve prima aver percorso la metà, ma prima di essere arrivato alla metà deve aver percorso ¼ della distanza e così via, all'infinito. Quindi la corsa non potrà mai iniziare. D'altra parte è abbastanza naturale pensare che l'atleta riesca ad arrivare al traguardo: dove sta quindi l'errore? La somma di infiniti termini può o non può essere un numero finito? Quant'è la somma degli infiniti termini $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + \ldots + 2^{-n} + \ldots$? (tale somma si scrive, in genere così: $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$ oppure $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$)

2. Che cosa si può dire della somma $\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i}$? E della somma $\sum_{i=0}^{\infty} x^{-i}$ (accenno all'estremo superiore della progressione geometrica con $|x| < 1$? Vedi Conti pag. 5, ma ci vuole il postulato di Archimede, che, comunque, mi sembra possa essere considerato come un teorema in atto e quindi non dovrebbero esserci problemi a postularlo anche all'inizio del discorso. Comunque si deve scegliere se, prima di partire con le dimostrazioni formali, sia il caso di esplicitare tutta l'assiomatica dei numeri reali, magari limitandosi a fornire un foglio agli studenti con gli assiomi).

3. Si determini la somma dei primi *n* numeri naturali

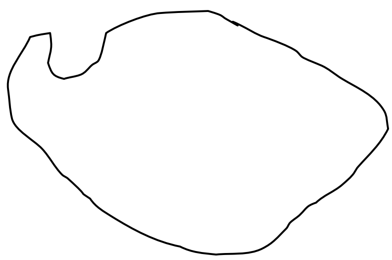
4. Si determini la somma dei primi *n* numeri naturali pari

5. Si determini la somma dei quadrati dei primi *n* numeri interi.

6. Studiare l'evoluzione della successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Scheda 37. L'area di figure non poligonali

1. (In coppia) Che strategie pensate sia sensato utilizzare per calcolare l'area della seguente figura?



2. (In gruppo) Confrontate le strategie utilizzate per rispondere al precedente quesito
3. (In gruppo) Quali strategie utilizzereste per calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra l'asse delle *x* e il segmento parabolico della funzione $y = -x^2 + 4$? Cercate di costruire un programma per la vostra calcolatrice che consenta di determinare tale area con una fissata approssimazione
4. (Discussione collettiva guidata dall'insegnante). Seguite la discussione collettiva guidata dall'insegnante sulle strategia di approccio al problema posto nel precedente esercizio.
5. (In coppia in laboratorio) Aprite il menu di Graphic Calculus, Graphic Caluculs plus, Area. Esplorate questo ambiente di apprendimento e poi raccogliete in una relazione che sia il più chiaro possibile quello che pensate di aver capito di questo ambiente e di tutte le sue potenzialità.
6. (Lezione dialogata dell'insegnante in laboratorio). Seguite con attenzione la lezione dell'insegnante sull'ambiente di Graphic Calculus esplorato nella precedente attività.

Altre attività collegate, ma non direttamente inerenti al percorso sulle funzioni che verranno svolte:
Statistica: attività sulle medie

a) Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h.
Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

b) Una agenzia che effettua indagini di mercato ha rilevato per una rete televisiva i seguenti dati medi giornalieri di ascolto, nel periodo invernale e nella fascia oraria dalle 20 alle 21:

Giorno della settimana	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Numero medio spettatori (in migliaia)	1.200	1.800	2.000	1.600	1.200	800	900

Una agenzia di pubblicità in quale giorno potrebbe consigliare a un proprio cliente di inserire uno spot pubblicitario di un prodotto per la neve, volendo usare la fascia oraria 20 – 21?

c) In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90 % , la seconda dell'80% , la terza del 30%. Qual è il rendimento medio complessivo?

d) Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

Italiano	7
Storia	8
Geografia	7
Lingua inglese	6
Scienze	5
Matematica	4
Educazione Fisica	9

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7. Otterrà lo studente il regalo?

e) Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami[1] riportando le seguenti votazioni:

Esame	Punteggio in trentesimi	Crediti
Laboratorio di Matematica	25	9
Analisi Matematica	24	12
Geometria	21	6
Algebra	27	6
Calcolo delle probabilità	23	9
Fisica generale	24	9
Lingua inglese	30	3
Fondamenti di Informatica	28	3
Abilità relazionali	30	3

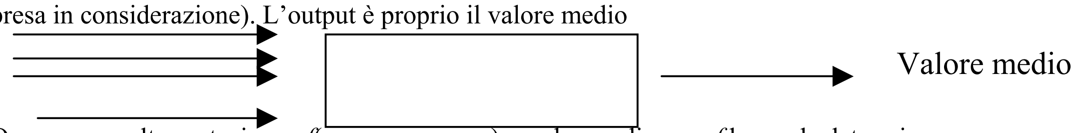
Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30. Otterrà il nostro studente la borsa di studio?

f) In una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?

Indici sintetici statistici per variabili quantitative: le medie

[1] Secondo il nuovo ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

Nelle distribuzioni di variabili quantitative (per noi tabelle nelle quali compaiono nella prima colonna misure di grandezze e nella seconda colonna la frequenza o numero di volte con cui tali misure si presentano) ha senso utilizzare indici sintetici medi che servono a dare un'idea di "intorno a quale valore medio" la distribuzione si addensa.
Possiamo pensare ai valori medi come a output di funzioni che hanno in ingresso i vari dati (le misure della grandezza presa in considerazione). L'output è proprio il valore medio



Oppure, con altra notazione, $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ = valor medio, con f legge da determinare.
Il problema diventa quello di determinare una f sensata. Dovremmo farci guidare dall'idea generale che un valor medio adeguato e sensato dovrà essere tale che sostituendo quel valore, diciamo m, a ciascuno dei valori $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ rimanga invariato un aspetto che interessa del problema.
Supponiamo, per esempio, che ci interessi studiare il reddito di un insieme di persone. Si può iniziare a fare una rilevazione dei redditi individuali, ottenendo una serie di dati che indichiamo con $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ immaginando di aver considerato n persone. Che cosa sarà il reddito medio? Sarà quel reddito m che sostituito a ciascuno dei valori $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ lascia invariata la loro somma; ossia m deve essere tale che $n * m = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n$. In tal caso $m = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n}{n}$, ossia la media aritmetica dei dati raccolti.
Ma che cosa accadrebbe se noi considerassimo un problema nel quale, invece della somma di più dati, volessimo mantenere invariato il loro prodotto P? Quale dovrebbe essere il loro valore medio m?
L'equazione in tal caso è $x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n = m^n$, ossia $m = \sqrt[n]{x_1 \bullet x_2 \bullet x_3 \bullet \ldots \bullet x_n}$, ossia quella che viene detta *media geometrica*.
Quindi, in generale, il valor medio di un insieme di dati dipende dal problema considerato. Voi avete sempre considerato, fino a poco prima di Pasqua, problemi nei quali aveva senso considerare come valor medio la media aritmetica. Con l'ultima esercitazione che vi ho proposto, vi sarete resi conto che non sempre la media aritmetica è quella che ha senso e fornisce la risposta adeguata a un problema.
Per esempio, vediamo una risoluzione dei diversi problemi che sono stati assegnati:
Esercizio 1
Partiamo dalla considerazione che la velocità media deve essere tale che, se l'aereo si muovesse su tutto il tragitto, con quella velocità percorrerebbe lo spazio $2\Delta S$ (andata e ritorno) nello stesso tempo che impiega per percorrere $2\Delta S$ muovendosi all'andata con velocità V_1 e al ritorno con velocità V_2. Ciò porta anche a capire che un valor medio di velocità deve essere compreso tra V_1 e V_2 ed è tale che $Vm = 2\Delta S / \Delta T_{tot}$ dove ΔT_{tot} è il tempo totale trascorso.
Primo metodo
$\Delta T_1 = \Delta S / V_2$ $\quad$ $\Delta T_2 = \Delta S / \Delta V_2$
$\Delta S + \Delta S = 2\Delta S$ $\quad$ $\Delta T_1 + \Delta T_2 = \Delta T_{tot}$
$V_m = 2\Delta S / \Delta T_{tot} = 2\Delta S / (\Delta S / V_1 + \Delta S / V_2)$ da cui si ottiene $Vm = 2/(1/V_1+1/V_2)$ e quindi $Vm = 2V1V2/(V1+V2)$, media armonica
Secondo metodo
Si calcola prima la media Tm dei due tempi (ossia il tempo che impiegherebbe l'aereo a percorrere o l'andata o il ritorno se si muovesse con velocità Vm) Tm = (S/V1+S/V2)/2 Quindi per avere la veelocità media divide lo spazio S (per esempio l'andata) per il tempo medio e ottiene Vm = S/((S/V1+S/V2)/2) da cui Vm = 1/((1/V1+1/V2)/2) = 2V1V2/(V1+V2), media armonica.
Si avrà pertanto, ammettendo uguali i Km percorsi nell'andata e nel ritorno:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Come vedete, il linguaggio dell'algebra ha consentito di dimostrare l'equivalenza dei due procedimenti e la correttezza della media armonica rispetto a quella aritmetica.
Provate ora a risolvere il seguente problema:
una macchina si muove per 1 ora a 50 km/h e per un'altra ora a 100Km/h; qual è la sua velocità media? In questo caso lo spazio percorso nei due tragitti cambia, non è lo stesso; invece il tempo impiegato a effettuare i due tragitti è lo stesso. Verificate che, in questo caso, ha senso effettuare la media aritmetica delle velocità, ossia che la velocità media è (v1+v2)/2.

Esercizio 2
In questo caso il valore sintetico che risolve il problema non è una media, ma la moda, ossia il giorno della settimana con la massima frequenza di ascolto (mercoledì).
Esercizio 3.

Vi invito a cogliere il senso del problema. Lavoriamo su base 100 . La prima macchina quanto rende? 90%, quindi su 100 pezzi teorici ne produce 90 (possiamo immaginare, se vi riesce più semplice che di 100 pezzi prodotti, 10 siano difettosi e inutilizzabili). Le macchine lavorano in serie, quindi alla seconda macchina ne arrivano solo 90 dei 100 teorici. Se si danno 90 pezzi alla seconda macchina quanti pezzi si ottengono? L'80% di 90, ossia 72 pezzi. Se si immettono 72 pezzi nella terza ed ultima macchina quanti pezzi si hanno? Il 30% di 72, quindi 21,6. Dunque da 100 pezzi teorici si ottengono in realtà, con l'intervento in serie delle 3 macchine, 21,6 pezzi. Il problema è allora di trovare tre macchine, tutte con la stessa resa, che diano alla fine dei tre passaggi 21,6 pezzi. Come fare?
Risolvendo l'equazione x^3 = 0,216 (con la calcolatrice: SOLVE(X^3=0,216,X)) otteniamo x = 0,60, ossia il 60%. Ciò vuol dire che, se sostituissimo alle tre macchine A, B, C tre macchine uguali tutte con rendimento del 60%, otterremmo lo steso rendimento finale, ossia 21,6 pezzi prodotti sui 100 in teoria producibili. La media, in tal caso, è quella geometrica (quella aritmetica, invece, darebbe il 66,7% circa).
Esercizio 4
Poiché in questo caso va rispettata la somma dei punteggi ottenuti, la sintesi corretta è la media aritmetica. E' da far notare un errore che potreste commettere: calcolare le medie parziali dell'area umanistica (Italiano, Storia, Geografia, Lingua Inglese), scientifica (Scienze, Matematica) e di Educazione Fisica e poi fare la media semplice delle medie.
Riflettere su ciò può essere efficace perché dà l'opportunità di studiare un esempio di operazione non associativa. Infatti nel fare una media di medie parziali occorre tener conto di quante sono le unità statistiche che ciascuna media parziale sintetizza (in altri termini, le discipline umanistiche, essendo di più, devono pesare di più). Naturalmente qui ci sono tutte le riserve sul fatto di considerare i voti scolastici come grandezze quantitative (altrimenti non avrebbe nemmeno senso parlare di media). Nel contesto del problema la media aritmetica è la risposta corretta; si può però criticare il testo stesso e la pretesa di considerare i voti come misure. Di questo abbiamo già discusso in classe.
Esercizio 5.
Non è possibile effettuare una media aritmetica semplice che non tenga conto dei crediti attribuiti a ogni esame. Se un esame vale 10 crediti e un altro 1, si può dire che il voto ottenuto nel primo pesi quanto il voto ottenuto nel secondo? Ovviamente no. Per avere una valutazione corretta del voto medio è necessario fare una media aritmetica pesata, ossia

$$m = \frac{25\cdot 9 + 24\cdot 12 + 21\cdot 6 + 27\cdot 6 + 23\cdot 9 + 24\cdot 9 + 30\cdot 3 + 28\cdot 3 + 30\cdot 3}{9+12+6+6+9+9+3+3+3} =$$

$$= \frac{25\cdot 9 + 24\cdot 21 + 21\cdot 6 + 27\cdot 6 + 23\cdot 9 + 30\cdot 6 + 28\cdot 3}{60} = 24.8$$ Quindi minore di 27.

Esercizio 6.
Quale dei valori medi utilizzati nei casi precedenti potrebbe andar bene in questo esempio?
Ciò che si vuole è che, quando si presenta uno zero, la sintesi si annulli. Dunque occorre utilizzare un valore medio fondato sul prodotto. E' forse la media geometrica la soluzione del problema posto? Essa in effetti è l'unica media che, assumendo in tal caso il valore 0, consente di escludere uno studente che abbia riportato un punteggio nullo in almeno una delle quattro materie. Naturalmente sono possibili altre soluzioni, come quella di prendere la media aritmetica, ma di porre una condizione, indipendente dalla media ottenuta, che se almeno una votazione è 0, il candidato non passa l'esame.
Riassumendo, ecco le medie che abbiamo preso finora in considerazione:
Media aritmetica degli n valori $x_1, x_2, \ldots, x_p$, con rispettive frequenze $f_1, f_2, \ldots, f_p$:

$$m = \frac{x_1\cdot f_1 + x_2\cdot f_2 + \ldots + x_p\cdot f_p}{f_1 + f_2 + \ldots + f_p}$$

(tale media si dice anche media pesata, perché ciascun dato viene considerato con un peso che dipende dalla frequenza con cui il dato compare; se tutti i dati compaiono solo una volta, si parla anche di media aritmetica semplice… ma queste precisazioni terminologiche sono "quisquiglie", direbbe Totò). Notate che la somma delle frequenze dà il numero totale dei dati, ossia n.
Media geometrica degli n valori $x_1, x_2, \ldots, x_p$, con rispettive frequenze $f_1, f_2, \ldots, f_p$:

$m = \sqrt[n]{x_1^{f_1}\cdot x_2^{f_2}\cdot\ldots x_p^{f_p}}$ oppure $m = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots x_n}$

Media armonica degli n dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$m = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Un'operazione di media serve per ottenere o semplificare la risoluzione di un certo problema, o per rappresentare sinteticamente un insieme di dati. Qualunque valore medio deve però essere compreso tra il valore minimo e il valore massimo dell'insieme di dati a disposizione. A parte questa proprietà che vale per ogni media, ciascuna media ha altre proprietà particolari che la caratterizzano. Per esempio, la media aritmetica è tale che la somma algebrica delle differenze tra i vari valori e la media aritmetica è nulla (come lo dimostrereste?).
Vi sono anche relazioni che legano fra di loro le varie medie; per esempio, è possibile dimostrare che

media armonica $\leq$ media geometrica $\leq$ media aritmetica

Provate a risolvere il seguente “problema dei campi e della piena del Nilo”.

Due contadini egiziani, Sesostris e Tutmosis, possiedono alcune unità quadratiche di terreno tra loro confinanti che devono essere riperimetrate dopo ogni piena del Nilo; x_1, x_2, ... x_n e y_1, y_2, ... y_p sono i lati dei quadrati in possesso, rispettivamente di Sesostris e Tutmosis. I due contadini decidono, al momento di riperimetrare il terreno, di fare appezzamenti quadrati aventi tutti la stessa area; naturalmente l’area totale degli appezzamenti in loro possesso non deve cambiare. Quale deve essere l’estensione della superficie di ogni nuova particella quadrata dei due contadini e quale deve essere il lato *m* di ogni nuovo quadratino di Sesostris, supponendo che ognuno voglia anche mantenere fisso il numero di unità quadrate in suo possesso?

Esercizi

1. Il “colore dei capelli” viene osservato su tre individui, ottenendo:

A	B	C
Capelli BIONDI	Capelli ROSSI	Capelli NERI

La mediana di questa distribuzione è:
- a) Capelli BIONDI
- b) Capelli ROSSI
- c) E’ B
- d) Non si può calcolare
- e) Capelli NERI

La moda di questa distribuzione è:
- a) E’ A
- b) Capelli NERI
- c) Non esiste
- d) Capelli ROSSI
- e) Capelli BIONDI

2. In una prova nove studenti vengono valutati, assegnando loro uno dei tre livelli: O = ottimo, B = Buono, S = Sufficiente, ottenendo:

Alberto	Gino	Raffaella	Maria	Anna	Mario	Giuseppe	Carla	Roberto
O	O	B	S	S	O	B	B	S

La mediana della distribuzione è:
- a) Anna
- b) O
- c) 4,5
- d) 5
- e) B

3. Il reddito medio mensile di cinque famiglie italiane nel mese di giugno nel 2002 è stato di € 1.705. Il reddito complessivo di queste famiglie è di:
- a) circa € 10.000
- b) minore di € 7.000
- c) non si può calcolare
- d) € 8.525
- e) maggiore di € 10.000

4. Ad una certa data, l’età media in anni compiuti dei componenti di una famiglia di quattro persone è pari ad anni 32. Se tre dei componenti hanno rispettivamente 15, 50 e 47 anni, l’età del quarto componente è:
- a) 16 anni
- b) 11 anni
- c) Minore di 10 anni
- d) Non si può calcolare
- e) 18 anni

5. I voti in matematica di 8 studenti di una scuola secondaria sono:

Studente	1	2	3	4	5	6	7	8

Voto	8	3	6	8	7	8	4	7

Per la metà degli studenti più bravi il voto minimo è stato almeno:

a) 7,1
b) 7
c) 5
d) 8
e) 6

Altri esercizi

1. Un automobilista effettua una corsa che prevede tre percorsi successivi i cui tratti sono lunghi rispettivamente 4, 3 e 2 km; le velocità rispettive sono 60, 48 e 56 (km/h). Qual è la velocità media dell'intera corsa?
2. Per pavimentare una stanza di un appartamento, il proprietario ha acquistato 100 piastrelle quadrate di lato 63 cm e 100 piastrelle di lato 9 cm. Prima della posa in opera delle piastrelle, il proprietario dell'appartamento decide di restituirle e di comperare 200 piastrelle di uguale dimensione. Determinare il lato di queste nuove piastrelle
3. La quantità venduta di un determinato bene è aumentata da 500 a 3000 in tre anni. Determinare l'incremento medio annuo (in termini percentuali)
4. Calcola moda, mediana, media aritmetica, range e scarto assoluto medio della seguente distribuzione: 5,1; 2,4; 2,0; 1,9; 7,5; 2,4; 3,2; 2,4
5. Completa la seguente tabella che fornisce dati sulla popolazione totale francese e sugli stranieri in Francia dall'anno 1851 al 1954.

Legenda: A popolazione totale (in migliaia) ; B: stranieri (in migliaia); C: francesi (in migliaia); D: incremento assoluto popolazione; E: incremento assoluto francesi; F: incremento assoluto stranieri; D%,E%,F%, rispettivi incrementi percentuali

Anni	A	B	C	D	E	F	D%	E%	F%
1851	35785	379							
1861	37386	506							
1872	36103	741							
1881	37672	1000							
1891	38343	1102							
1901	38962	1038							
1911	39602	1133							
1921	37500	1417							
1931	41835	2891							
1946	40503	1671							
1954	42777	1453							

Rappresenta in un opportuno istogramma la distribuzione di frequenze relativa alla presenza di stranieri in Francia dal 1851 al 1954; qual è la moda? Ha senso calcolare la mediana? E la media? In caso affermativo, calcolale in caso negativo spiegate perché non si può.
Riferendoti alla precedente tabella, studia l'andamento del fenomeno immigrazione in Francia dal 1851 al 1954. Utilizza indici opportuni, giustifica ogni scelta effettuata e spiega ogni procedimento utilizzato. Sono graditi eventuali commenti che consentano di descrivere più approfonditamente il fenomeno dell'immigrazione in Francia.

Diagrammi di dispersione e "interpolazione polinomiale"

Attività sul calcolo delle probabilità

I anno

1. Il problema della suddivisione della posta in gioco

II anno (problema 4 Viareggio problemi primo biennio)
“Un astrologo era stato condannato a morte. Il re decise di lasciargli un’ultima possibilità. Diede all’astrologo la facoltà di mettere in due urne due palline bianche e due nere. Il re deve poi scegliere a caso una delle due urne e estrarre a caso una pallina: se esce nera, l’astrologo sarà ucciso; se esce bianca avrà salva la vita.
Come conviene all’astrologo inserire le quattro palline nelle due urne, per avere la maggiore probabilità di sopravvivenza?”
E se le palline sono n bianche e n nere?

Altri esercizi:
Legenda: F. facili; M. di media difficoltà; D. difficili (adatti a chi voglia acquisire competenze tecniche che vanno al di là di quelle richieste per il corso)

1. **F.** Sapete che un dado a sei facce, numerate da 1 a 6, è stato lanciato e che il risultato è un numero pari. Qual è la probabilità che sia uscito il numero 4? E il numero 5? E il numero 4 o il numero 2? E il numero 4 o il numero 3?
2. **M.** Consideriamo due monete apparentemente identiche: una "buona" che, lanciata in aria molte volte, cade presentando testa all'incirca la metà delle volte e una "truccata", che presenta testa all'incirca il 70% delle volte. Buttiamo insieme le due monete. Qual è la probabilità che le due monete presentino facce disuguali, cioè che una delle facce sia testa e l'altra croce?
3. **D.** Su 1000 insegnanti:
   a) 590 sono femmine,
   b) 385 insegnano materie letterarie,
   c) 300 sono maschi che non insegnano materie letterarie

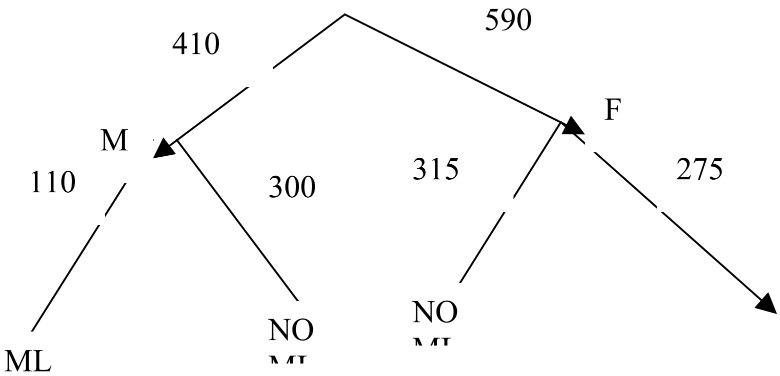
   Qual è la probabilità che, preso a caso un docente tra i 1000 considerati, venga estratta una femmina che insegna materie letterarie? Qual è la probabilità che, essendo stata estratta, fra le 1000, una persona che non insegna materie letterarie, questa sia una femmina?
4. **M.** È più probabile che lanciando due dadi, a sei facce numerate da 1 a 6, si ottenga come somma dei punteggi 9 o 10?
5. **D.** Qual è la probabilità di fare un ambo al lotto giocando 5 e 10 sulla ruota di Genova? Il gioco è equo?
6. **D.** Qual è la probabilità, giocando su una ruota, di vincere giocando su:
   a) un numero fisso
   b) terno
   c) quaterna
   d) cinquina
7. **M.** In un sacchetto vi sono palline indistinguibili fra loro al tatto, ma colorate in modo diverso. Alcune sono blu, altre rosse, altre verdi. Non ci sono palline di altri colori. a probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è 1/2; la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu è 4/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Che cosa sai dire sul numero totale di palline contenute nel sacchetto? Quale somma dovrebbero scommettere tre giocatori, ciascuno su un colore diverso, per incassare 350 euro in caso di vittoria?
8. **D.** Due sacchetti contengono cinque bussolotti ciascuno, all'interno dei quali è contenuta una lettera dell'alfabeto. Nel sacchetto A vi sono le cinque lettere della parola "mamma" e nel sacchetto B le cinque lettere della parola "anima". Viene estratta a caso una lettera dal sacchetto A e introdotta nel sacchetto B. In seguito viene estratta una lettera dal sacchetto B (che ormai ne contiene 6) che viene introdotta in A. Qual è la probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritta, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria (ossia quella che essi possedevano prima che venisse effettuata l'esperienza a due prove)?
9. **F.** È più probabile che lanciando un dado due volte escano due numeri uguali, oppure che lanciandolo tre volte esca tutte e tre le volte un numero dispari? (Suggerito per la preparazione alla maturità scientifica dal MPI)
10. **D.** Quanto è probabile, in una stanza con 8 persone, che almeno due festeggino lo stesso compleanno?
11. **D.** Determinare la probabilità che in 6 lanci di un dado non truccato il numero 3 si presenti esattamente 3 volte (Suggerito per la preparazione alla maturità scientifica dal MPI).

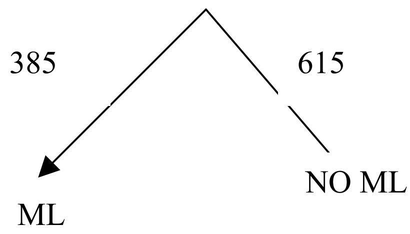
Risposte
1. sapendo che è uscito un numero pari, abbiamo solo tre casi possibili: 2, 4 o 6. Quindi: $p(4) = 1/3$, $p(5) = 0$, $p(4 \vee 2) = 2/3$, $p(4 \vee 3) = 1/3$

2. moneta truccata $p(T)=0.7$ $p(C) = 0.3$ moneta buona $p(T)=p(C) = 0.5$
Possiamo rappresentare la situazione con un diagramma ad albero e vedere che la probabilità richiesta è data dall'unione dei seguenti eventi fra loro incompatibili:
a) esce testa sulla moneta truccata e croce su quella buona
b) esce croce sulla moneta truccata e testa su quella buona

$p(a \vee b) = p(a)+p(b) = 0.7 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.5$

3. Poiché 590 su 1000 sono femmine, 410 sono maschi. Poiché 385 su 1000 insegnano materie letterarie, 615 non insegnano materie letterarie. Poiché 300 maschi su 410 non insegnano materie letterarie, 110 maschi insegnano materie letterarie. Poiché su 385 insegnanti che insegnano materie letterarie 110 sono maschi, allora le femmine che insegnano materie letterarie sono 275. Quelle che non insegnano materie letterarie sono 315. Tutto ciò è rappresentato nel seguente diagramma ad albero:





P(F /\ ML) = 275/1000 (si può anche ottenere mediante il prodotto P(F) · P(ML/F) = 590/1000 · 275/590 = 275/1000)
P(F/ NO ML) = 315/(315+300) = 315/615 = 21/ 41
Si può anche ottenere così:
P(F /\ NO ML)/ [P(F/\ NO ML)+P(M/\ NO ML)] = [(590/1000)· (315/590)]/[(410/1000)·(300/410) + (590/1000)·(315/590)] = 315/615 = 21/41

4. I casi possibili sono 6·6= 36. Quelli favorevoli al 9 sono le coppie (5,4), (4,5), (6,3) , (3,6). Quindi la probabilità di uscita del 9 è 4/36 = 1/9. I casi favorevoli al 10 sono le coppie (5,5), (4,6) (6,4). Quindi la probabilità di uscita del 10 è 3/36 = 1/12, minore di quella del 9

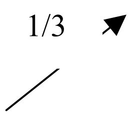
5. Su ogni ruota vengono estratti 5 numeri fra 90 possibili e l'estrazione è senza rimpiazzo (ossia i numeri usciti non vengono immessi nuovamente nell'urna). La probabilità che il 5 esca alla prima estrazione è 1/90. Nel caso sia uscito il 5 ala prima estrazione, la probabilità che il 10 esca ala seconda estrazione è 1/89. Quindi la probabilità che nelle prima due estrazioni escano il 5 e il 10 è data da 1/90 · 1/89. Non si tratta degli unici casi a noi favorevoli. In effetti il 5 avrebbe potuto essere estratto anche alla seconda, terza, quarta e quinta estrazione. Per ciascuna delle cinque possibili posizioni del 5 vi sono quattro possibili posizioni del 10. Quindi in tutto vi sono 5·4= 20 casi possibili.. Quindi la probabilità di fare ambo giocando 5 e 10 sulla ruota di Genova è 20/(90·89) = 2/801, ossia circa 1/400. L'ambo su una ruota, se il gioco fosse equo, dovrebbe essere pagato circa 400 volte la posta, invece viene pagato 250 volte

6. a) 5/90 = 1/18 (lo stato paga 10 volte la posta) b) 5 · 4 · 3 /(90·89·88) = 1/11748 (lo stato paga 4250 volte la posta) c) 1/511038 (lo stato paga 80 000 volte la posta) d) 1/43 949 268 (lo stato paga 1 000 000 di volte la posta, ossia circa il 2% di quello che dovrebbe!)

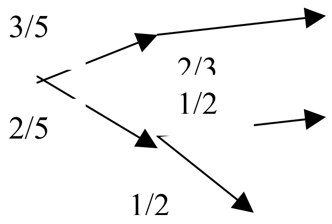
7. Sappiamo che p(V)+p(R)+p(B) = 1 (ossia, l'estrazione di una pallina rossa, o verde o blu è l'evento certo).
Inoltre sappiamo che p(V o R) = p(V)+p(R) = 4/5 (ossia 4/5 è la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu).
Poiché p(R) = 1/2, allora P(V) = 4/5 - 1/2 = 3/10
Quindi p(B) = 1-1/2-3/10 = 1/5. Ovviamente non si può dire nulla sul numero totale delle palline presenti nel sacchetto. Possiamo però dire che le palline rosse sono il 50% del totale, che le blu sono il 20% e le verdi il 30%. Un giocatore che decidesse di puntare sull'evento "esce la pallina verde" dovrà quindi pagare un premio pari al 30% della somma che vincerebbe. Il 30% di 350 euro dà 105 euro. Il 50% di 350 euro dà 175 euro. Il 20% di 350 euro dà: 70 euro. Ovviamente 70+105+175=350. Come ha fatto notare uno di voi, si può anche dire che le palline sono almeno 10.

8. Possiamo utilizzare un diagramma ad albero per rappresentare la situazione. Si noti che la prima estrazione viene effettuata da A, quindi la probabilità di estrarre una *m* è 3/5 e quella di estrarre una *a* è 2/5. La seconda estrazione viene effettuata da B; quindi, nel caso in cui nella prima estrazione sia uscita una *m*, la probabilità di estrarre nuovamente una *m* è 2/6=1/3; nel caso in cui da A sia stata estratta una *a*, la probabilità di estrarre da B nuovamente una *a* è 3/6=1/2. La probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritta, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria, è data dalla somma delle probabilità dei due seguenti eventi fra loro incompatibili:

a) da A è stata estratta la *m* e da B viene estratta la *m*
b) da A è stata estratta la *a* e da B è stata estratta la *a*



p= 3/5 · 1/3 + 2/5· 1/2 =



9. I casi favorevoli all'uscita di due numeri uguali sono 6: (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6). Quindi la probabilità di tale evento è 6/36 = 1/6. La probabilità che esca un numero dispari è 1/2. Quindi la probabilità di tre uscite consecutive di un dispari è $(1/2)^3 = 1/8$. Allora è più probabile che escano due numeri uguali.

10. Immaginiamo, per semplicità, che l'anno sia formato da 365 giorni. Un modo per affrontare il problema è quello di calcolare prima la probabilità dell'evento contrario, ossia la probabilità dell'evento E: nessuna delle 8 persone presenti festeggia lo stesso compleanno. Dopo aver fatto ciò, per rispondere al problema basterà calcolare la probabilità dell'evento contrario, ossia 1-p(E).
Iniziamo quindi a calcolare p(E). Possiamo immaginare che le 8 persone entrino a una a una nella stanza, così come se stessimo estraendole da un'urna. La prima persona che entra potrà essere nata in un qualunque giorno dell'anno. La seconda in un qualunque giorno diverso da quello in cui è nata la prima (ricordiamo che stiamo calcolando p(E) dove E è l'evento nessuna delle 8 persone presenti festeggia lo stesso compleanno). La prima persona ha quindi a disposizione 365 giorni favorevoli su 365 possibili; la seconda 365-1 = 364 su 365 possibili; la terza 365-2 = 363 e così via; in generale, l'n- esima persona avrà 365 - n+1 giorni favorevoli (ovviamente $n \leq 365$) su 365 possibili. Quindi, nel caso di 8 persone, abbiamo che
p(E) = 364/365 · 363/365 · 362/365 · 361/365 · 360365 · 359/365 · 358/365 = 0.93 circa
La probabilità cercata, quella dell'evento contrario è 1-p(E) che dà circa 0.07. L'aspetto sorprendente, che si può verificare con un semplice programma di calcolo o con un foglio elettronico è che la probabilità cresce velocemente all'aumentare del numero di persone e per 23 persone è maggiore del 50%.

11. Si vuole che delle sei uscite , tre siano 3. Quindi le sestuple che rappresentano i risultati devono essere del tipo {3,3,3, a, b,c}, con a, b,c diversi da 3. Ovviamente i tre 3 possono stare in qualunque posizione. La probabilità che si abbiano tre 3 e tre risultati diversi da 3 è data da: $(5/6)^3 \cdot (1/6)^3$. Si tratta di vedere in quanti casi possono presentarsi sestuple composte da tre 3 e tre numeri diversi da 3, ma appartenenti all'insieme {1,2,4,5,6}. Si può ragionare così: il primo 3 che deve uscire può presentarsi in qualunque delle 6 posizioni possibili. Il secondo solo in 5; il terzo solo in 4. Quindi in tutto in 6·5·4 = 120 posizioni. Dobbiamo però evitare di contare più volte le stesse configurazioni: ciò accade perché nelle 120 disposizioni delle sestine possibili abbiamo considerato come distinti i tre 3. In pratica è come se la configurazione {1,2,4,3,3,3} fosse stata considerata più volte, tante quante sono le permutazioni dei tre 3 negli ultimi tre posti. Esse sono 6, pertanto dobbiamo dividere 120 per 6. Otteniamo così la risposta finale $20 \cdot (5/6)^3 \cdot (1/6)^3$ che dà 625/11664 ossia circa 0.054.

Altri esercizi

1. La probabilità di laurearsi di uno studente che entra all'università è pari a 0.4. Determinare la probabilità che, su 5 studenti, (a) non si laurei nessuno (b) almeno uno si laurei (più di due si laureino
2. Determinare la probabilità di ottenere un 7 almeno una volta in tre lanci di una coppia di dadi
3. Un'urna contiene 3 palline bianche e 7 nere. Scelto a caso un numero n dall'insieme {1,2}, si estraggono n palline dall'urna senza reimmissione. (a) Si determini la probabilità che il risultato di questo esperimento contenga una sola pallina bianca. (b) Considerata un'urna contenente palline bianche e non bianche con probabilità di estrarre una pallina bianca in una prova uguale a 0.3, si calcoli la probabilità che in 5 estrazioni con reimmissione si ottengano 2 palline bianche.

4. Si consideri una popolazione di adulti in cui la probabilità di essere una donna è 0,60 .
Un sondaggio sulle attese che questa popolazione ha per il futuro rivela che:

- la probabilità che una donna sia ottimista è 0,90
- la probabilità che un uomo sia ottimista è 0,75

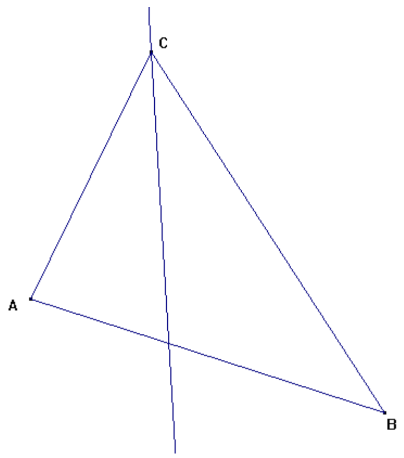
a) Dimostrare che la probabilità che una persona, estratta a caso dalla popolazione, sia ottimista è 0,84 .
b) È estratta a caso una persona dalla popolazione. Sapendo che tale persona è non ottimista, calcolare la probabilità che essa sia un uomo.
c) Calcolare la probabilità di avere esattamente 6 ottimisti in un gruppo di 8 persone scelte a caso dalla popolazione
d) Si considerino n persone estratte a caso dalla popolazione.
Sia p la probabilità che tutte queste n persone siano ottimiste. Calcolare il minimo numero n_0 per cui p sia strettamente minore di 0,30

1. Un'urna contiene 5 palline rosse e 4 bianche. Si estraggono 2 palline successivamente dall'urna, senza rimettere la prima nell'urna e si nota che la seconda estratta è bianca. Qual è la probabilità che anche la prima sia bianca?

2. Le probabilità che un marito e una moglie siano viventi tra 20 anni sono, rispettivamente, 0.8 e 0.9. Trovare la probabilità che tra 20 anni siano: a) entrambi vivi; b) né l'uno, né l'altro lo siano; c) almeno uno sia ancora vivo
3. Determinare la probabilità che in una famiglia di 6 figli ci sia: a) almeno un maschio; b) esattamente tre maschi; c) almeno due femmine; d) non più di tre femmine (assumere che gli eventi "nasce un maschio" e "nasce una femmina" siano equiprobabili.
4. Quanto dovrebbe essere pagata la vincita di un terno su una ruota al gioco del lotto se il gioco fosse equo?
5. Quante estrazioni del lotto bisogna considerare affinché sia maggiore di 0.5 la probabilità che esca un numero fissato su una ruota?

Problemi aperti e dimostrazioni in geometria
Si stabiliscono le proposizioni (conoscenze) fondanti. Quelle condivise dall'intera classe
Definizione e classificazione dei quadrilateri
Criteri di uguaglianza dei triangoli (rivisti con esplorazioni in ambienti di Cabri géomètre)
Qualche costruzione geometrica

1. Dato un triangolo, tracciare la bisettrice di uno dei suoi angoli. E' possibile che risulti perpendicolare al lato opposto considerato?



2. Sia dato un triangolo ABC.
Quali ipotesi devi aggiungere su ABC affinché risulti divisibile in due triangoli isosceli?

3. Sia dato un triangolo equilatero.
Studia la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolari condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.

4.
Consegna 1
Disegnare sulla retta i punti D, E, F, G, misurare la lunghezza delle spezzata ADB, AEB, AFB, AEG con un righello, ordinare le misure effettuate in modo crescente.

Consegna 2
Rappresentare i percorsi da A a B che toccano la retta nel punto Q, tabulare i valori trovati in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.

Consegna 3

Costruire, con l'ausilio dello strumento "Luogo" del software di geometria, il grafico della variazione della lunghezza dei percorsi AQB in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere e giustificare quello che si osserva.

5. Costruire un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali. È unico?

6. Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.

a) Quali proprietà ha il quadrilatero LMNP?
b) Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero LMNP?
c) Quali ipotesi sul quadrilatero ABCD occorre fare affinché LMNP assuma tali configurazioni particolari?

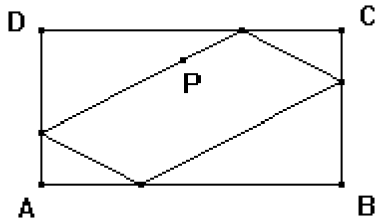
7. Dividere un segmento in *n* parti uguali mediante una costruzione

8. Sia dato un triangolo.
Tracciare le mediane, le altezze e gli assi. Studiare la relazione che esiste tra baricentro, ortocentro e circocentro.

9. Problema a tre fasi (n.6 secondo biennio problemi di Viareggio):
a) Una persona che si trova in una posizione *A* deve andare a riempire dei secchi d'acqua, attingendo da un ruscello posto ad una certa distanza, e portarli ad una fattoria che si trova in un punto *B* dalla stessa parte di *A* rispetto al ruscello, facendo il cammino più breve. Si chiede di aiutare la persona ad individuarlo.

b) Siano date due rette *a* e *b* perpendicolari tra loro in un punto *P* ed una retta *r* passante per *P.* Che relazione c'è tra le rette che si ottengono da *r* come corrispondenti nelle simmetrie assiali rispetto agli assi *a* e *b*?

c) Individuare la direzione di lancio della pallina, che si trova inizialmente in un punto *P* del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto *P*.



10. Costruire una circonferenza dati due suoi punti e la lunghezza del raggio.

11. Siano date due circonferenze *c* e *c'* con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su *c* e *c'*.

- Che relazione c'è tra i punti D, B ed E?
- Quali relazioni ci sono tra i segmenti DE e OO'?
- Che tipo di quadrilatero è DOO'E?
- Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

12. Siano dati una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.

- Costruisci la circonferenza che passa per P e Q ed è tangente a t in P.
- Giustifica la correttezza della tua costruzione qui di seguito a mano.

13.*Sia data una circonferenza di centro O.*
Proposta di lavoro:

- costruire un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza; siano *A*,*B*,*C*,*D*, i suoi vertici;
- facendo variare il quadrilatero *ABCD*, quali quadrilateri particolari si possono ottenere?
- C'è una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Si può trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?

14. Sia data una circonferenza di centro O.

- Costruisci un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza e chiama i suoi vertici A, B, C, D.

- Facendo variare il quadrilatero ABCD, quali quadrilateri particolari puoi ottenere?
- Puoi trovare una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Riesci a trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?

15. Sia dato un quadrilatero ABCD. Tracciate gli assi *a* del lato AB, *b* del lato BC, *c* del lato CD, *d* del lato DA. Sia H il punto di incontro degli assi *a* e *b*, K il punto di incontro di *a* e *d*, L il punto di incontro di *c* e *d*, M il punto di incontro di *c* e *b*.

- Studiare come varia HKLM al variare di ABCD.
- Dimostrate le congetture prodotte durante l'esplorazione fatta in Cabri.

16.Costruire una tangente comune a due circonferenze.
17.Data una circonferenza C_1 e una circonferenza C_2 tangente internamente a C_1, costruire una circonferenza C_3 tangente esternamente a C_2 e internamente a C_1.

18.Sia dato un quadrilatero ABCD. Considerare le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (in senso orario).

Proposta di lavoro:

- far variare ABCD, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura HKLM?
- Scrivere tutte le scoperte e congetture e dimostrarle.

19. Determinare, fra tutti i triangoli PQR aventi l'area assegnata e un lato assegnato c = PQ, quello per cui è minima la somma degli altri lati a = PR e b = RQ.

20. Esaminare la figura e scegliere quelle che possono rappresentare lo sviluppo piano di un cubo.

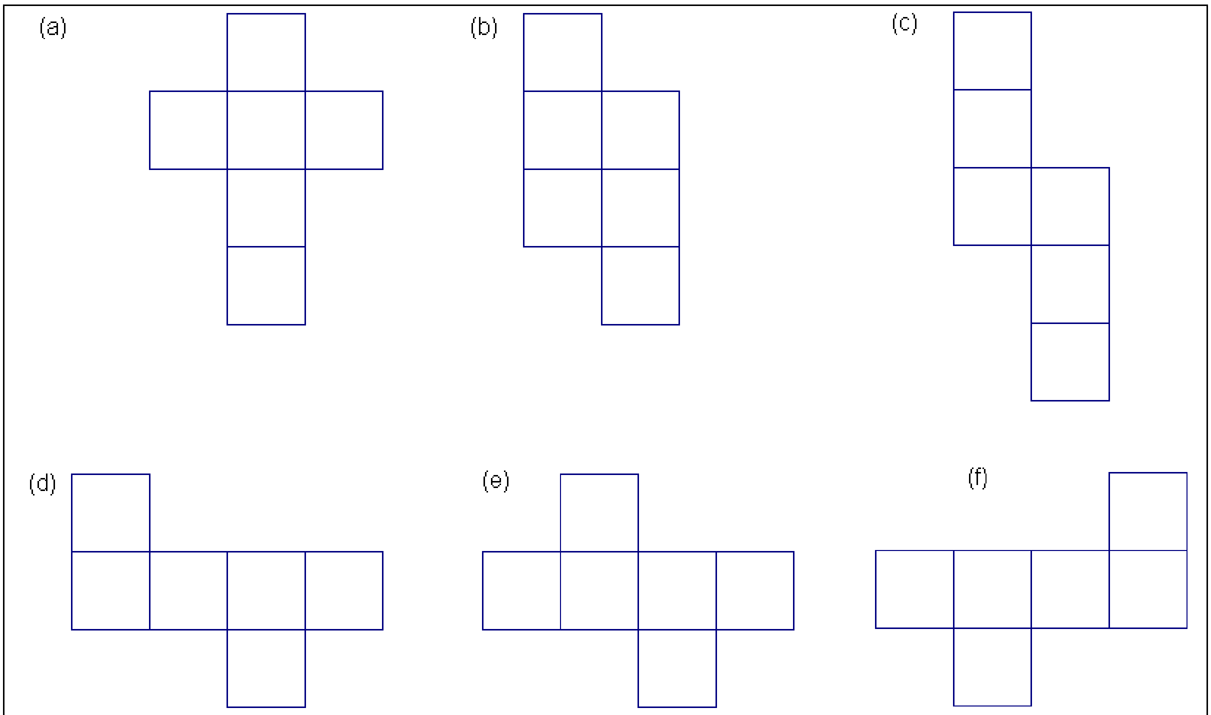


Figura 1

21. Determinare tutti gli assi di simmetria del cubo; lo stesso per i piani di simmetria. Il cubo ha un centro di simmetria?
22. Quali sono i movimenti che trasformano in sé il cubo; allo stesso modo indaga su altri semplici poliedri: ottaedro regolare, tetraedro regolare,… (Figura 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8).

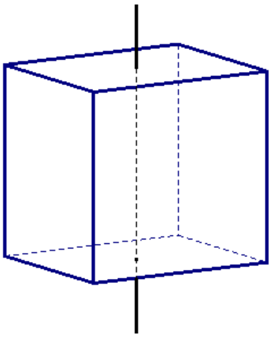


Figura 2

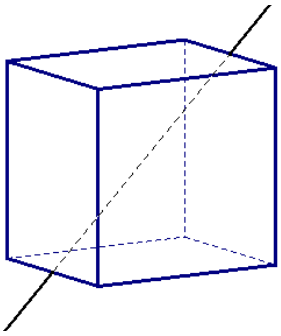


Figura 3

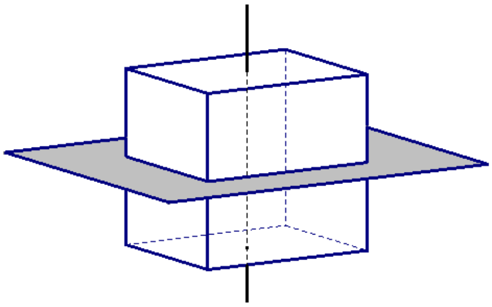


Figura 5

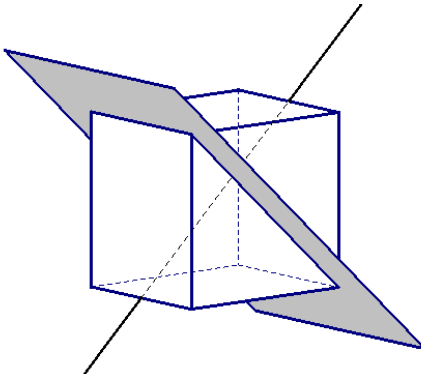


Figura 6

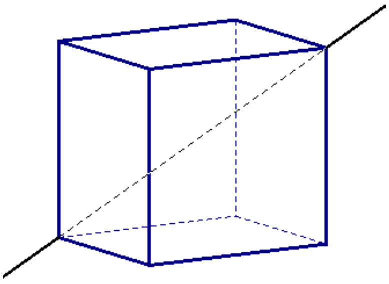


Figura 7

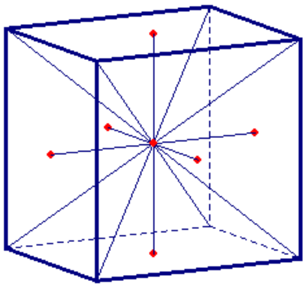


Figura 8

23. Descrivi i poliedri regolari.

24. Completare la seguente tabella mediante l'osservazione di modelli fisici di poliedri regolari.

Poliedro	Tetraedro regolare	Cubo (esaedro regolare)	Ottaedro regolare	Dodecaedro regolare	Icosaedro regolare
Numero delle facce: F					
Numero degli spigoli: S					
Numero dei vertici: V					

Dopo aver completato la tabella, cercare una relazione tra F, V, S per questi solidi.

25. Perché esistono solo cinque tipi di poliedri regolari? Suggerimento: prendi in considerazione il vertice di un poliedro regolare e osserva che in ogni vertice convergono almeno tre facce; qual è la somma degli angoli che convergono nello stesso vertice? Una volta osservato che tale somma è sempre minore di un angolo giro puoi esaminare le varie situazioni possibili.
26. Quali figure geometriche che si possono ottenere sezionando un cubo mediante un piano.?
27. Quali, tra i poliedri regolari, consentono un riempimento dello spazio? (Si deve ipotizzare di riempire completamente, senza lasciare "buchi", tutto lo spazio, usando un solo tipo di poliedro regolare). Discutere la domanda e scrivere tutto quello che si è pensato.
28. Quali poligoni regolari si possono ottenere sezionando un cubo con un piano?
29. Quali poliedri ammettono un centro di simmetria?

30. Considerare un cubo di spigolo *l*. Individuare il minimo cammino sulla superficie cubica per andare dal vertice B al vertice opposto E. Giustificare la risposta
31. Quante sono le direzioni e quante le giaciture individuate rispettivamente dagli spigoli e dalle facce di un ottaedro regolare. (Per rispondere conviene pensare i sei vertici dell'ottaedro come i centri delle facce di un cubo, come in figura 10).

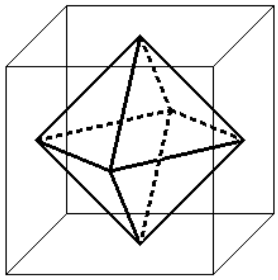


Figura 10

Elementi di prove di verifica

32. Qui a fianco è disegnato un cubo in assonometria. In realtà questo cubo ha uno spigolo di 8 cm. Lo si taglia in due prismi retti, sezionandolo secondo il piano DBFH. Disegnare, con le dimensioni reali, la faccia DBFH comune a questi due prismi.

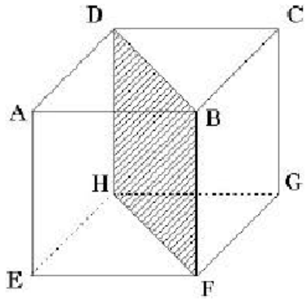


Figura 11

33. Costruire un tetraedro regolare ABCD in cartoncino oppure usando cannucce da bibita. Immaginando di congiungere in tutti i modi i centri delle facce, descrivere il poliedro che si ottiene.
34. Si seziona il cubo disegnato in Figura 12 con il piano passante per i vertici B, C, D.
35. Di che tipo è il triangolo BCD? Perché?
36. Che tipo di poliedro è quello individuato dai vertici B, C, D, E? Perché?
37. Se I e J sono i punti medi dei segmenti BC e BD allora la retta IJ è parallela alla retta CD? Perché?
38. Di che tipo è il triangolo AIB? Perché?

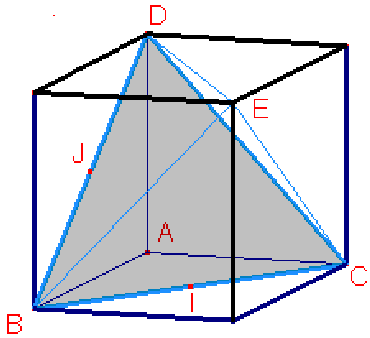


Figura 12

39. Si considera un cubo ABCDEFGH. Il punto I è il punto di intersezione dei segmenti [FC] e [GB].

Il punto J è il punto di intersezione dei segmenti [HF] e [EG].
Rispondere alle seguenti domande.

- Il triangolo EGB è rettangolo in G?	V	F
-·Il triangolo IAJ è isoscele?	V	F
- Il triangolo AEJ è rettangolo in E?	V	F
- Il triangolo AEJ è isoscele?	V	F

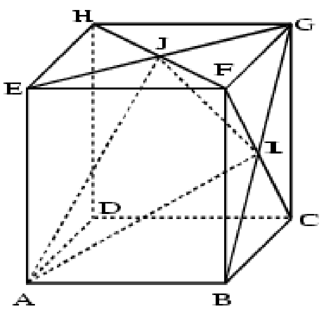


Figura 13

40. Disegnare uno sviluppo piano di uno dei solidi che si ottengono sezionando un cubo con un piano diagonale (Un piano diagonale è un piano che passa per le diagonali parallele di due facce opposte o, se si preferisce, per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia).
41. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un cubo?
42. Quanti e quali sono i piani di simmetria di un ottaedro regolare?
43. Disegnare uno sviluppo piano della piramide ABCD ottenuta a partire da un cubo, come illustrato in figura 14.

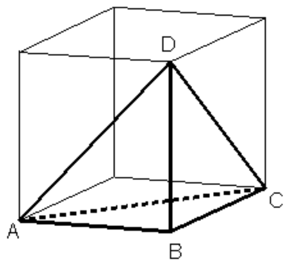


Figura 14

44. Nella figura 14, si disegni il centro di simmetria O del cubo e la piramide simmetrica di ABCD rispetto a O.

Problem solving e posing in genere
I anno

Quanto pesa l'aria sopra la nostra testa nella classe?
Qual è la densità media dell'uomo (confrontarla con quella dell'acqua)
Quanti battiti del cuore ci sono in una vita?
Che cosa si può dire della somma di due numeri dispari consecutivi? Giustificare la risposta.
Che cosa succede se a un insieme di numeri naturali si aggiunge 1 a ogni elemento? Che relazioni si possono individuare tra i numeri dell'insieme di partenza e quelli dell'insieme che si ottiene dopo la trasformazione?
È vero che n e $n+1$ sono primi fra loro? Perché?
Che cosa si può dire del prodotto di tre numeri naturali consecutivi rispetto alla divisibilità? E di 4? E di 5? E di n numeri naturali consecutivi? Giustifica le tue risposte.
Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera

a) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che n > p + q +r
b) Per ogni numero n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n > p + q
c) Per ogni numero pari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
d) Per ogni numero dispari n>2, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n=p+q
e) Per ogni numero pari n>2 esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q tali che n = p - q

Stabilisci quale delle seguenti affermazioni è vera

f) Per ogni numero n esistono tre numeri primi distinti p, q e r tali che n > p + q + r
g) Per ogni numero n>5, esistono due numeri distinti p e q tali che n > p + q
h) Per ogni numero pari n>5, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che n = p + q + r
i) Per ogni numero dispari n>5, esistono due numeri primi (non necessariamente distinti) p, q e r tali che n = p + q + r
j) Per ogni numero n>5, esistono tre numeri dispari (non necessariamente distinti) p, q e r tali che n = p + q- r

Qual è la somma dei primi n numeri naturali?
Quale è la somma dei quadrati dei primi numeri naturali?
È vero che la funzione $n^2 - n + 41$ genera solo numeri primi?
Che cosa puoi dire della somma di due numeri dispari consecutivi? E del prodotto di tre numeri consecutivi? *Perché*? (sono state date come esercitazioni a casa)
La somma di tre numeri pari consecutivi è pari o dispari? E la somma di tre dispari consecutivi?
Se dividi un numero per 4, quali e perché possono essere i resti della divisione?

Che cosa puoi dire sulla somma di quattro numeri dispari consecutivi?
Che cosa puoi dire sulla somma di cinque numeri dispari consecutivi?
Che cosa puoi dire sulla somma di sei numeri dispari consecutivi?
Che cosa puoi dire sulla somma di *n* numeri dispari consecutivi?

Dite se la formula $n^2 - 79n + 1601$ genera:

a) tutti i numeri primi
b) solo (ma non tutti i) numeri primi
c) anche alcuni numeri non primi. Giustificate esaurientemente ogni risposta fornita. Potete utilizzare il libro di testo, materiale cartaceo e il foglio elettronico».

Una formula del tipo $an^2 + bn + c$ con c diverso da 1, può generare solo numeri primi? Perché?

Problema 5 primo biennio problemi Viareggio

"Siano dati due cestini di ciliegie A e B. Il cestino A contiene 19 ciliegie rosse e 1 ciliegia gialla e il cestino B contiene 4 ciliegie gialle e 1 rossa.Viene presentato uno dei due cestini nascosto da un drappo, si deve decidere di quale cestino si tratta.*"*

Si propone di operare seguendo la seguente regola di decisione:
si pesca dal cestino una ciliegia:

- se è rossa si afferma che si tratta del cestino A,
- se è gialla si afferma che si tratta del cestino B.

Seguendo questa regola, qual è la probabilità di prendere una decisione *corretta* circa il cestino che è stato presentato?
Una volta risolto questo problema, come affrontereste il seguente?
Il padre di Luigi dice:"…*voi giovani non capite ancora l'importanza dello studio, pensate solo al divertimento! Beh ti voglio fare questa proposta: domenica andrai allo stadio a vedere la partita della Roma, a condizioni però che prima superi con voto sufficiente il compito di matematica*". Luigi aveva programmato anche di andare al cinema, ma sa bene che per superare il compito di matematica in modo sufficiente, dovrà studiare tutto il pomeriggio, e quasi certamente dovrà rinunciare al cinema. Capisce cioè che se vuole aumentare la probabilità di avere una buon voto nel compito di matematica diminuirà, altrettanto inevitabilmente, la sua probabilità di andare al cinema. Che decisione dovrà (o potrà) prendere ?

Problema 7 secondo biennio problemi di Viareggio

a) Si stende un nastro intorno alla superficie terrestre lungo tutto l'equatore e si osserva che la sua lunghezza deve essere circa 40.076.000 m, essendo il raggio r della terra, se questa è assimilata ad una sfera, lungo 6.370.000 m. Se si allunga il nastro di 2π metri (poco più di 6 metri e 28 centimetri), il nuovo nastro, disposto simmetricamente rispetto al centro della terra, si solleva abbastanza da consentire ad un coccodrillo di passarci sotto?
(Nota: l'altezza media di un coccodrillo è di circa mezzo metro).
b) Due amici, in pizzeria, ordinano due pizze napoletane: Andrea la prende normale, Paolo invece la sceglie "gigante". Quando gliele portano i due amici osservano che sono perfettamente circolari; la normale ha raggio 20 cm, la gigante 30 cm e sono anche dello stesso spessore. Quando portano il conto, Andrea deve pagare € 6,4 mentre Paolo, vedendo il suo conto, che è di € 12, si sorprende: "*Come mai la mia pizza costa quasi il doppio, mentre il raggio è aumentato solo del 50%" ?*
c) Negli Stati Uniti le monete da 50 cent e da 10 cent sono entrambe d'argento ed hanno un peso proporzionale al loro effettivo valore. Proviamo a disporre delle monetine da 10 cent sulla moneta da 50 cent, senza che si sovrappongano e non debordino dal contorno della moneta grande. Quante monete da 10 cent riusciamo a mettere?

II anno:

Problema 2 primo biennio problemi di Viareggio

"Considera la successione di numeri naturali
1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5
in cui si scrive una volta il numero 1, due volte il numero 2, etc."
Qual è il *miliardesimo* termine di questa successione?
Che cosa succede se la successione è formata, con le stesse regole, solo da numeri dispari?
Una fila di automobili è ferma davanti a un semaforo. Si supponga che la distanza fra le parti anteriori di due automobili, l'una dietro l'altra, sia in media di 6 metri e che, quando il semaforo diventa verde, ogni automobile parta a due secondi di tempo dalla precedente, muovendosi con la velocità media di 10 m/s (36 km/h) nel tratto che precede il semaforo. Se il verde dura 40 secondi, quante automobili passano?

Problema 10 Viareggio secondo biennio problemi (attenzione: è relativo a un test del chi quadro)
Il Titanic trasportava passeggeri in tre classi: 1^a , 2^a , 3^a . Dopo l'affondamento fu stilata la relazione relativa all'incidente ed a tutte le operazioni di salvataggio successive. Alcuni dati sono sinteticamente riportati nelle seguenti tabelle:

Classe dei viaggiatori	Viaggiatori alla partenza			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1^a Classe	175	144	6	325
2^a Classe	168	93	24	285
3^a Classe	462	165	79	706
Totale	805	402	109	1316

Tabella 1

Classe dei viaggiatori	Sopravissuti			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1^a Classe	57	140	6	203
2^a Classe	14	80	24	118
3^a Classe	75	76	27	178
Totale	146	296	57	499

Tabella 2

Classe dei viaggiatori	Morti o Dispersi			Totale
	Uomini	Donne	Bambini	
1^a Classe	118	4	0	122
2^a Classe	154	13	0	167
3^a Classe	387	89	52	528
Totale	659	106	52	817

Tabella 3

Osservazione 1: I passeggeri delle tre classi non viaggiavano tutti nelle stesse condizioni. Ad esempio, i passeggeri di terza classe erano in gran parte emigranti con famiglia e figli, probabilmente non tutti erano perfettamente padroni della lingua inglese (c'erano emigranti francesi, ma anche inglesi usi a parlare in dialetto) e, inoltre, gli alloggi di terza erano collocati in luoghi della nave da cui non era immediato l'accesso al ponte dove si trovavano le lance di salvataggio. Al contrario, i passeggeri di prima erano persone facoltose abituate a parlare in inglese, in generale coppie senza figli in viaggio di divertimento e gli alloggi di prima si affacciavano sul ponte o erano nelle vicinanze. Per dare forza all'osservazione che in terza classe c'erano molti più bambini che nelle altre classi, si può costruire la Tabella 4 con i dati relativi ai bambini alla partenza.

Classe	Viaggiatori alla partenza		
	Bambini	In totale	Percentuale
1^a Classe	6	325	1,8 %
2^a Classe	24	285	8,4 %
3^a Classe	79	706	11,2 %
Totale	109	1316	8,3 %

Tabella 4

Effettivamente, in terza classe i bambini erano molto più numerosi, rappresentavano l’11,2% dei passeggeri di quella classe, in seconda rappresentavano l’8,4% dei passeggeri e in prima rappresentavano solo l’1,8% dei passeggeri. Rivolgiamoci alcune domande atte a capire come stavano effettivamente le cose.
Domanda: Osservando i dati riportati nelle tabelle, sembra possibile affermare che, a causa delle maggiori difficoltà incontrate nel salvataggio dei passeggeri di terza classe (con famiglie, con bambini, alloggiati in luoghi poco agevoli, con difficoltà di linguaggio), sono stati salvati più passeggeri di seconda e prima classe che di terza. Questa è solo una impressione o può essere confermata da una analisi puntuale ed approfondita dei dati?

Problema 11 di Viareggio secondo biennio problemi
“In una vaschetta contenente del mercurio, si appoggia una sfera di ferro; successivamente viene versata dell’acqua sul mercurio. Cosa farà allora la sfera ? Affonderà, salirà, o rimarrà alla stessa profondità?”