

ESERCIZI SCHEDA N. 1: EVENTI E VARIABILI ALEATORIE

1) Dato lo spazio campionario

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); \dots; (6,6)\}$$

riferito al lancio di due dadi non truccati, descrivi con una proposizione, l'evento:
 $\{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)\}$

2) Fai un esempio di funzione di distribuzione cumulata (o funzione di ripartizione) per una variabile aleatoria X

3) Considera la tabella seguente, che descrive la situazione occupazionale di 63 persone in relazione al titolo di studio.

		Occupazione	
		SI	NO
Titolo di studio	Licenza media	5%	10%
	Diploma	27%	18%
	Laurea	20%	20%

Calcola:

- a) quante persone, in quel gruppo, sono occupate
- b) la probabilità che, scegliendo a caso una persona del gruppo, sia disoccupata e laureata
- c) quante persone, fra quelle disoccupate, hanno un diploma
- d) la probabilità che, scegliendo a caso una persona del gruppo, sia disoccupata e abbia un'occupazione
- e) la probabilità che, scegliendo a caso una persona del gruppo, sia disoccupata o abbia un'occupazione
- f) se gli eventi "essere disoccupato" e "avere un diploma" sono indipendenti

4) Un sacchetto contiene 15 palline numerate da 1 a 15, calcola la probabilità che estraendo una pallina si verifichi

- a) l'evento $E = \text{"il numero estratto ha come divisore 2 o 3"}$,
- b) l'evento $F = \text{"il numero estratto ha come divisori 2 e 3"}$,
- c) l'evento $G = \text{"il numero estratto non ha come divisori né 2, né 3"}$

(attenzione: i sottoinsiemi "ha divisore 2" e "ha divisore 3" non sono disgiunti...)

5) Un "universo" è formato da 4 elementi A, B, C, D , sappiamo che i primi 3 possiedono una certa caratteristica che indichiamo 1, mentre D non la possiede (indicazione 0):

Elementi	A	B	C	D
Caratteristica	1	1	1	0

- a) Considera tutte le possibili combinazioni con ripetizione di 3 elementi, quante sono?
- b) Rappresentale in una tabella con la frequenza *media* della caratteristica (es. AAA 1; AAD 2/3 ...)

c) Esamina la variabile aleatoria X "presenza *media* della caratteristica" che assume valori $0, 1/3, 2/3, 1$ e costruisci la sua densità di probabilità e la sua funzione di distribuzione cumulata (ripartizione):

X	0	1/3	2/3	1
f(X)				
F(X)				

d) Rappresenta in grafico f e F

6) Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte, dopo aver scelto a caso il mazzo fra 5 mazzi identici, allineati su un tavolo. Calcola la probabilità che una volta estratto con queste modalità un asso, esso provenga dal primo mazzo. Giustifica la risposta.

7) Un signore un po' distratto ha riposto nella stessa scatola tre diversi tipi di lampadine, ma tutte della stessa forma e dimensione, inoltre alcune si accendono altre sono guaste. Si sa che ce ne sono il 15% da 40W e di queste il 40% sono guaste, il 60% da 60W di cui il 40% guaste. Le restanti sono da 100W e di queste il 20% sono guaste.

Completa la tabella della densità congiunta (in percentuale):

Funzionanti\Potenza	40W	60W	100W	TOT
Accendono				
Bruciate				
TOT				

Se si prende dalla scatola una lampadina a caso:

- qual è la probabilità che si possa accendere?
- qual è la probabilità che si possa accendere e sia da 100W?
- sapendo che la lampadina estratta si accende, qual è la probabilità che sia da 100W?

8) Siano date due funzioni tale che

a) $f(1) = f(4) = \frac{1}{4}$; $f(2) = f(3) = \frac{1}{2}$;

b) $g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = \frac{1}{4}$.

Per ciascuna di esse dire se può rappresentare una densità di probabilità di una variabile aleatoria, giustificando la risposta. In caso di risposta affermativa, fornire almeno una possibile interpretazione di questa funzione in termini di un fenomeno aleatorio che essa può descrivere.

9) Quale è la variabile aleatoria X che descrive l'esperimento del lancio di due dadi a sei facce non truccati e che prende in considerazione la somma dei punteggi ottenuti? Quale è la sua densità di probabilità e la sua funzione di distribuzione cumulata?

10) Produci altri due esempi di variabili aleatorie e determina, per ciascuna di esse, la densità di probabilità e la funzione di distribuzione cumulata.

11) Considera le seguenti situazioni:

- 1) un'urna che contiene n biglie numerate;
- 2) un disco suddiviso in n settori circolari che ruota;
- 3) un "dado" a n facce.

Per ciascuna di essi determina una variabile aleatoria X_1, X_2, X_3 che descriva possibili modelli relativi alle 3 situazioni. Cerca di trovare tre variabile aleatorie diverse. Fornire per ciascuna la densità di probabilità e la funzione di distribuzione cumulata.

12) Sia X la variabile aleatoria che modella il numero di figli maschi in una famiglia con quattro figli, nel caso in cui:

- la probabilità che nasca un maschio e quella che nasca una femmina siano uguali fra loro;
- gli eventi "nasce un maschio" e "nasce una femmina" siano fra loro indipendenti.

a) quali valori può assumere X

b) determinare la densità di probabilità di X

c) qual è la probabilità che una famiglia estratta a caso dalla popolazione considerata abbia almeno tre figli maschi?

13) In un'urna si trovano 4 palline numerate (1, 2, 3, 4) e si effettuano due estrazioni rimettendo, dopo la prima estrazione, la pallina nell'urna. Scrivi la variabile aleatoria "somma dei punti" e determina i seguenti eventi:

$$P(X=2); P(X=4); P(X \leq 4); P(X \geq 3); P(2 \leq X \leq 4); P(X \geq 3 \text{ o } X \leq 2)$$

14) Consideriamo il lancio di due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde.

Sia X la variabile aleatoria che descrive la somma dei punti ottenuti

Sia Y la variabile che descrive il punto ottenuto sul dado rosso.

a) Scrivi la sua densità di probabilità $P_X(x)$, verificando che i valori che essa assume appartengono all'insieme: $\left\{ \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36} \right\}$.

b) Scrivi la sua densità di probabilità $P_Y(x)$.

c) Scrivi la distribuzione congiunta di X e Y nella seguente tabella:

$Y \backslash X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1/36	1/36					0	0	0	0	0	1/6
2		1/36			1/36				0			1/6
3							1/36	1/36	0	0		
4		0	0						1/36			
5							1/36		1/36			
6									1/36		1/36	
	1/36		3/36				5/36				1/36	1

Osservando la tabella rispondi alle seguenti domande.

d) Qual è la distribuzione di X sapendo che il dado rosso mostra la faccia 3, ossia calcolare la densità di probabilità della nuova variabile aleatoria Z tale che

$$Z = (X | Y = 3) \quad (X \text{ sapendo che } Y = 3).$$

Suggerimento: osserva che l'evento "il dado rosso mostra la faccia 3" esclude che possano verificarsi i punteggi 2, 3, 10, 11, 12 (ossia, la loro probabilità è 0). Gli altri punteggi sono equiprobabili. Quindi la densità di Z è:

Z	4	5	6	7	8	9
$P_Z(z)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

e) Quale è la probabilità dell'evento "la somma è 10, sotto la condizione che sul dado rosso è uscito un numero minore o uguale a 5"?

Suggerimento: osserva che è sufficiente addizionare le prime cinque probabilità che compaiono nella colonna corrispondente all'evento $X = 10$.

f) Qual è la probabilità che, sapendo che la somma è 10, il numero sul dado rosso è minore o uguale a 5?

15) Se si effettuano due successive estrazioni di palline da un'urna contenente 11 palline verdi, 2 nere e 5 bianche, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna e si considerano le due variabili aleatorie

X = colore uscito alla prima estrazione

Y = colore uscito alla seconda estrazione

Si ha che X e Y sono fra loro dipendenti o indipendenti? Giustifica la risposta.

16) Cambierebbe la risposta al precedente esercizio se la pallina estratta alla prima estrazione non venisse immessa nuovamente nell'urna? Giustifica la risposta.

17) Nell'esempio in cui si è considerata la variabile aleatoria X che descrive la somma dei punti ottenuti lanciando due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde, hai visto che tale variabile è dipendente dall'evento $Y = 3$. Possiamo quindi concludere che Y e X non sono indipendenti; possiamo anche concludere che tutti gli eventi del tipo $X = k$ sono dipendenti da $Y = 3$? Per esempio, i due eventi $X = 4$ e $Y = 3$ sono dipendenti? Giustifica la risposta.

18) Fai almeno altri due esempi di variabili aleatorie, uno in cui le variabili aleatorie sono dipendenti e uno in cui sono indipendenti.

14) Si consideri un dado regolare a sei facce numerate da 1 a 6 lanciato 2 volte. Indica con X la variabile aleatoria che modella il punteggio del primo lancio e con Y quella del secondo lancio. Calcola le probabilità dei seguenti eventi:

a) "esce un numero pari nel primo lancio e un numero dispari nel secondo"

b) "esce un numero pari al primo lancio e un numero maggiore di 2 nel secondo"

c) "esce un numero pari nel primo lancio e un numero pari nel secondo"

d) "esce un numero minore di 3 e maggiore di 4 nel primo lancio e un numero pari nel secondo"

19) Una fabbrica un pezzo meccanico M mediante tre tipi di macchinari A, B, C . A fornisce il 50% della produzione, B il 40% e C il 10%. Si sa che sono difettosi il 2% dei pezzi prodotti da A , il 3% dei pezzi prodotti da B e il 5% dei pezzi prodotti da C . Se si estrae un pezzo a caso da tutti quelli prodotti:

- qual è la probabilità che sia difettoso?
- Qual è la probabilità che il pezzo estratto sia difettoso e sia stato prodotto dalla macchina A ?
- Sapendo che il pezzo estratto è difettoso, qual è la probabilità che provenga dalla macchina B ?

20) In una popolazione in cui l'89% degli individui è sano, il 10% a rischio e l'1% è malato si applica un test che è positivo nel 2% dei sani, nel 90% dei malati e nel 50% degli individui a rischio.

- Qual è la probabilità che un individuo positivo al test sia sano?
- Qual è la probabilità che un individuo negativo al test sia malato o a rischio?

21) Una popolazione è costituita da individui che presentano i sintomi di una certa malattia e da altri che non la presentano. Si sa che una parte delle persone che non presentano sintomi possono avere la malattia in stato di incubazione. Si vuole conoscere la frequenza relativa di questi utilizzando un test clinico di cui si conoscono da precedenti prove i seguenti risultati:

- fra coloro che presentano i sintomi della malattia il 98% risulta positivo al test
- fra coloro che hanno la malattia in incubazione l'80% risulta positivo al test
- fra coloro che sono sani l'1.7% risulta positivo al test.

Dopo aver effettuato il test risulta che il 25% della popolazione è positivo al test e si verifica che fra questi individui positivi al test il 65% presenta i sintomi e il 30% ha la malattia in incubazione.

Indichiamo con M l'evento "avere i sintomi", con I l'evento "avere la malattia in incubazione", con S l'evento "essere sano", con $+$ l'evento "essere positivo al test".

a) Riscrivere qui sotto i dati del problema:

$$\begin{array}{lll} P(+|M) = & P(M|+) = & P(+) = \\ P(+|I) = & P(I|+) = & \\ P(+|S) = & P(S|+) = & \end{array}$$

b) Calcolare la probabilità che un individuo della popolazione:

- sia positivo al test e abbia la malattia in incubazione;
- abbia la malattia in incubazione;
- sia negativo al test e abbia la malattia in incubazione.

22) Consideriamo la suddivisione del daltonismo per sesso in una popolazione umana. Si sa che la popolazione è composta per il 52.71% da maschi, che l'8.03% dei maschi è daltonico e che il 13.3% dei daltonici è di sesso femminile.

- a) Se un individuo è scelto a caso fra la popolazione considerata, qual è la probabilità che sia maschio e daltonico?
- b) Se un individuo è scelto a caso fra i daltonici della popolazione considerata, qual è la probabilità che sia maschio?
- c) Se un individuo è scelto a caso fra la popolazione considerata, qual è la probabilità che sia daltonico?
- d) L'essere maschio e l'essere daltonico sono eventi indipendenti? Perché?

23) Come è noto l'ereditarietà è governata dalle leggi della probabilità. In una particolare specie di maiali selvatici della Guinea, il 75% di ciascuna generazione ha il pelo corto e il rimanente il pelo lungo.

Un discendente di due maiali con il pelo lungo ha il pelo lungo, mentre il 90% dei discendenti di due maiali con il pelo corto ha il pelo corto. Se i genitori hanno il pelo di diverso tipo il 65% dei discendenti ha il pelo corto. Gli accoppiamenti fra i maiali avvengono indipendentemente dalla lunghezza del pelo.

- a) Qual è la probabilità che avvenga un incrocio fra due maiali con il pelo corto?
- b) Se un maiale della Guinea è scelto a caso fra quelli con il pelo corto, qual è la probabilità che abbia i genitori entrambi con il pelo corto?

24) Siano A e B due eventi di probabilità rispettive $P(A)=0.3$ e $P(B)=0.4$. Calcolare $P(A | B)$ nei casi in cui:

- a) se si verifica B allora si verifica anche A
- b) se si verifica B allora A non si verifica
- c) gli eventi A e B sono indipendenti.

25) Due eventi A e B hanno rispettivamente probabilità $P(A)=0.5$ e $P(B)=0.2$. È possibile (e se sì, in quali condizioni) che la probabilità della loro intersezione sia $P(A \cap B) = 0.3$.

26) Si considerino due eventi A e B ; spiegare perché non è possibile avere le seguenti probabilità: $P(A) = 30\%$, $P(B) = 45\%$, $P(A|B) = 60\%$ e $P(B|A) = 15\%$.

27) Tutte le borse dei passeggeri che si imbarcano in un certo aeroporto sono verificate al metal detector. È noto che la probabilità che una borsa che contiene una bomba faccia suonare l'allarme è 0.99 e che la probabilità che una borsa che non contiene una bomba faccia suonare l'allarme è 0.05. Inoltre si sa che una borsa ogni 5000 contiene una bomba.

- a) Qual è la probabilità che l'allarme suoni per una borsa scelta a caso?
- b) Una borsa ha fatto suonare l'allarme; qual è la probabilità che contenga una bomba?
- c) Su un aereo si trovano 100 borse; sapendo che nessuna ha fatto suonare l'allarme dire qual è la probabilità che in almeno una di queste ci sia una bomba.

27) Due biologi (indicati con A e B) devono studiare una caratteristica dei materiali biologici tenuti in 4 appositi contenitori, numerati da 1 a 4 per l'identificazione. Ogni biologo preleva una piccola parte del materiale da uno dei contenitori scelto a caso e lo analizza. Per varie

circostanze i due biologi sono costretti ad eseguire le loro analisi separatamente e sono impossibilitati a sapere da quale contenitore l'altro ha prelevato il materiale.

- a) Se il biologo A ha prelevato il materiale dal contenitore n. 3, qual è la probabilità che anche l'altro biologo scelga lo stesso contenitore?
- b) Qual è la probabilità che entrambi i biologi studino il materiale del contenitore n. 4?
- c) Qual è la probabilità che i biologi analizzino materiali prelevati dallo stesso contenitore?
- d) Il biologo B ritiene che vi sia una probabilità del 30% che il biologo A abbia utilizzato il contenitore n. 3; per questo sceglie a caso fra i rimanenti contenitori. Qual è la probabilità che i biologi analizzino materiali prelevati dallo stesso contenitore?

28) Una compagnia di assicurazioni ha classificato i clienti che hanno stipulato una polizza infortuni in tre categorie di rischio: il 40% dei clienti è stato classificato a basso rischio, il 35% a medio rischio e il restante 25% ad alto rischio. In base all'esperienza della compagnia si sa che la probabilità che si verifichi almeno un infortunio per le tre categorie è rispettivamente pari a 0.44%, 8.63% e 19.50%.

- a) Calcolare la probabilità che un cliente subisca almeno un infortunio.
- b) Calcolare la probabilità che un cliente che non ha subito infortuni sia tra quelli classificati nella categoria a medio rischio.

29) Un aereo ha quattro reattori e può volare anche se ha un reattore guasto. La probabilità che un reattore si guasti in un volo è 0.02; si supponga che i quattro reattori funzionino in modo indipendente.

- a) Qual è la probabilità che l'aereo completi il suo viaggio?
- b) Qual è la probabilità che l'aereo abbia un reattore guasto, sapendo che ha completato il suo viaggio?