**Esempi di prove di verifica su calcolo combinatorio e delle probabilità**
**Esempio 1**
Il compito verte sui seguenti contenuti irrinunciabili: probabilità totale e composta
Competenze essenziali interessate: modellizzare; misurare e calcolare; Comprendere, comunicare e collocare in un quadro teorico un testo di contenuto matematico; risolvere problemi.
Esercizi che consentono di conseguire la semplice sufficienza
1. In un'urna ci sono 10 palline rosse e 4 palline blu. Se ne pescano 3, senza reintroduzione: qual è la probabilità che almeno una pallina sia rossa? Che almeno due siano rosse? Che tutte e tre siano rosse?

2. Come l'esercizio 1, con reintroduzione.
3. Fai un esempio di eventi indipendenti e un esempio di eventi dipendenti
Esercizi che consentono di conseguire, una volta effettuati i primi tre esercizi, valutazioni discrete o buone
4. Un tiratore con l'arco (poco esperto) ha probabilità 5% di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che colpisca il bersaglio entro il 20° tiro?
5. Calcolare $\binom{100}{95}$.
6. Quante parole diverse si possono scrivere anagrammando la parola *salasso?*
Esercizio che consente di ottenere valutazioni ottime o eccellenti
7. Si consideri una popolazione di adulti in cui la probabilità di essere una donna è 0,60 .

Un sondaggio sulle attese che questa popolazione ha per il futuro rivela che:
- la probabilità che una donna sia ottimista è 0,90
- la probabilità che un uomo sia ottimista è 0,75

a) Dimostrare che la probabilità che una persona, estratta a caso dalla popolazione, sia ottimista è 0,84 .
b) È estratta a caso una persona dalla popolazione. Sapendo che tale persona è non ottimista, calcolare la probabilità che essa sia un uomo.

**Esempio 2**
Il compito verte sui seguenti contenuti irrinunciabili: probabilità totale e composta
Competenze essenziali interessate: modellizzare; misurare e calcolare; Comprendere, comunicare e collocare in un quadro teorico un testo di contenuto matematico; risolvere problemi.
Esercizi che consentono di conseguire la semplice sufficienza
1. In un'urna ci sono 24 palline nere. Quante palline rosse devo aggiungere affinché la probabilità di pescare una pallina nera sia 0,2? E 0,5? E 1?
2. Da un sacchetto che contiene 4 palline rosse e 2 palline blu si estraggono, senza reintroduzione, 2 palline. Qual è la probabilità che siano entrambe rosse? La probabilità cambia se il sacchetto contiene inizialmente 40 palline rosse e 20 palline blu?
3. Fai un esempio di due eventi compatibili e di due eventi incompatibili

Esercizi che consentono di conseguire, una volta effettuati i primi tre esercizi, valutazioni discrete o buone

4. Si lancia due volte una moneta non equa, in cui Testa ha probabilità $p$. Quanto deve valere $p$ affinché la probabilità che esca due volte Testa sia 0,5?
5. Si lancia 10 volte una moneta non equa, in cui Testa ha probabilità 0,8. Qual è la probabilità che esca Testa almeno 8 volte?

Esercizio che consente di ottenere valutazioni ottime o eccellenti
Due amici A e B si recano alla fiera, allo stand del tiro al bersaglio. Per A la probabilità di colpire il bersaglio è 0.4. Per B tale probabilità è 0.25. A e B tirano simultaneamente una sola volta sullo stesso bersaglio.

I. Calcolare la probabilità che il bersaglio sia colpito.
II. Sapendo che il bersaglio è stato colpito, calcolare la probabilità che A l'abbia mancato.

**Esempio 3**

1. In un sacchetto ci sono 18 palline rosse. Quante palline nere devo aggiungere affinché la probabilità di pescare una pallina rossa sia 0.6?
2. Da un sacchetto che contiene 7 palline rosse e 3 palline blu si estraggono, senza reintroduzione, 2 palline. Qual è la probabilità che siano di colore diverse?
3. Si lancia due volte una moneta non equa, in cui Testa ha probabilità $p$. Quanto deve valere $p$ affinché la probabilità che esca due volte Testa sia 0.64?
4. Sono di più: i sottoinsiemi da 4 elementi in un insieme di 9 elementi oppure i sottoinsiemi da 3 elementi in un insieme da 10 elementi?
5. Quanti anagrammi della parola *michele*?
6. A e B giocano al tiro al bersaglio. A colpisce il bersaglio nel 75% dei casi; B lo colpisce nel 90% dei casi. Per decidere chi tira per primo, A e B giocano a testa e croce con una moneta non truccata. Sapendo che il bersaglio è stato colpito al primo tiro, qual è la probabilità che a colpirlo sia stato B?

**Esempio 4**

Tre automobilisti si servono per i loro veicoli del medesimo parcheggio. Essi devono consegnare le chiavi delle loro automobili al custode del parcheggio. Costui è, notoriamente piuttosto negligente; egli, infatti, custodisce le chiavi, ma non si cura di contrassegnarle con il nome del rispettivo proprietario. Accade che i tre automobilisti si rechino contemporaneamente a riprendersi le chiavi e che il custode le restituisca a caso.

Calcolare la probabilità che:
*a*) ciascun automobilista riceva proprio le sue chiavi;
*b*) un solo automobilista riceva proprio le sue chiavi;
*c*) nessun automobilista riceva le sue chiavi.

Si chiede a una classe di 30 ragazze quale sport hanno praticato nella precedente settimana. 20 hanno giocato a pallacanestro, 10 a calcio e 6 hanno praticato entrambi gli sport. Non è stato menzionato alcun altro sport. Quante ragazze non hanno praticato alcuno sport in quella settimana? Sapendo che una delle ragazze interrogate ha giocato a calcio, qual la probabilità che ella abbia anche giocato a pallacanestro?

**Esempio 5**

Si consideri l'esperimento consistente nell'estrazione a caso di 5 palline, una dopo l'altra, senza reimbussolamento delle palline estratte, da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90, aventi tutte le stesse possibilità di uscita (gioco del Lotto).

a. Dire se è più probabile che, prescindendo dall'ordine di uscita, esca:
   - la cinquina di numeri "successivi" {1,2,3,4,5} o la cinquina di numeri "non successivi" {2,3,5,8,13};
   - una qualunque cinquina di numeri "successivi" o una qualunque cinquina di numeri "non successivi".
b. Prese in esame le due seguenti proposizioni:
   A: "La probabilità che il 2° numero estratto sarà il "90" è 1/89",
   B: "La probabilità che nei 5 numeri estratti ci sarà il "90" è 5/90", stabilire quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no e fornire esaurienti spiegazioni:

$$(1)\ A \to B, \quad (2)\ B \to A, \quad (3)\ \overline{A} \to \overline{B}, \quad (4)\ \overline{B} \to \overline{A}.$$

c. Supposto di puntare una determinata somma sull'uscita dei tre numeri 14, 8, 42, sulla "Ruota" di Napoli, calcolare la probabilità di vincita (fare un terno al Lotto). Se il gioco fosse equo e la puntata fosse di 5 Euro, quanto dovrebbe pagare lo Stato in caso di vincita del giocatore?

d. Supponendo di ripetere n volte l'esperimento considerato, calcolare la probabilità che il "90" esca, tra i 5 numeri estratti:
   - al più 5 volte;
   - per la prima volta proprio alla n-esima estrazione. Qual è il più piccolo valore di n per cui questa probabilità non supera $10^{-10}$?

**Esempio 6**

1. Un gioco consiste nel lanciare simultaneamente due dadi cubici regolari, entrambi con le facce numerate da 1 a 6. Se
i numeri ottenuti sono identici, si effettua un secondo lancio, altrimenti il gioco finisce. Calcolare la probabilità di
non effettuare il secondo lancio.

2. Si consideri una popolazione di adulti in cui la probabilità di essere una donna è 0,60 .
Un sondaggio sulle attese che questa popolazione ha per il futuro rivela che:

- la probabilità che una donna sia ottimista è 0,90
- la probabilità che un uomo sia ottimista è 0,75

c) Dimostrare che la probabilità che una persona, estratta a caso dalla popolazione, sia ottimista è 0,84
d) È estratta a caso una persona dalla popolazione. Sapendo che tale persona è non ottimista, calcolare la probabilità che essa sia un uomo.
c) Calcolare la probabilità di avere esattamente 6 ottimisti in un gruppo di 8 persone scelte a caso dalla popolazione

**Esempio 7**

1. Un sondaggio ha stabilito che il 3% degli adulti soffre di daltonismo.
   a) si scelgono 10 adulti a caso. Calcolare la probabilità che
      i) esattamente due di essi soffrano di daltonismo
      ii) almeno due di essi soffrano di daltonismo

   b) Si esamina un gruppo di 10 individui scelto a caso. Calcolare il numero medio di daltonici che ci si attende di trovare tra i 10 individui e la deviazione standard (si ricorda che la deviazione standard di una distribuzione binomiale è data da $\sqrt{np(1-p)}$ con l'usuale significato dei simboli).

**Esempio 8**

Nella ricerca della presenza della tubercolosi mediante il test di Rontgen, si producono errori e, precisamente: il 10% delle persone malate non risulta tale. Il 2% delle persone sane viene dichiarato malato dal test. Ogni anno si controllano con il test tutte le persone che non seguono cure contro la tubercolosi. Grazie e un'esperienza pluriennale si sa che ogni anno il numero di nuovi ammalati di tubercolosi rappresenta lo 0,07% della popolazione.

c) qual è la probabilità che una persona sia dichiarata malata dal test?

d) calcolare la probabilità che una persona dichiarata malata dal test lo sia veramente
e) calcolare la probabilità che una persona dichiarata sana dal test sia in realtà malata.

**Esempio 9**

1. Un'urna contiene 5 palline rosse e 4 bianche. Si estraggono 2 palline successivamente dall'urna, senza rimettere la prima nell'urna e si nota che la seconda estratta è bianca. Qual è la probabilità che anche la prima sia bianca?
2. Le probabilità che un marito e una moglie siano viventi tra 20 anni sono, rispettivamente, 0.8 e 0.9. Trovare la probabilità che tra 20 anni siano: a) entrambi vivi; b) né l'uno, né l'altro lo siano; c) almeno uno sia ancora vivo
3. Determinare la probabilità che in una famiglia di 6 figli ci sia: a) almeno un maschio; b) esattamente tre maschi; c) almeno due femmine; d) non più di tre femmine (assumere che gli eventi "nasce un maschio" e "nasce una femmina" siano equiprobabili.
4. Quanto dovrebbe essere pagata la vincita di un terno su una ruota al gioco del lotto se il gioco fosse equo?
5. Quante estrazioni del lotto bisogna considerare affinché sia maggiore di 0.5 la probabilità che esca un numero fissato su una ruota?

**Esempio 10**

1. La probabilità di laurearsi di uno studente che entra all'università è pari a 0.4. Determinare la probabilità che, su 5 studenti, (a) non si laurei nessuno (b) almeno uno si laurei (più di due si laureino
2. Determinare la probabilità di ottenere un 7 almeno una volta in tre lanci di una coppia di dadi
3. Un'urna contiene 3 palline bianche e 7 nere. Scelto a caso un numero $n$ dall'insieme $\{1,2\}$, si estraggono $n$ palline dall'urna senza reimmissione. (a) Si determini la probabilità che il risultato di questo esperimento contenga una sola pallina bianca. (b) Considerata un'urna contenente palline bianche e non bianche con probabilità di estrarre una pallina bianca in una prova uguale a 0.3, si calcoli la probabilità che in 5 estrazioni con reimmissione si ottengano 2 palline bianche.

4. Si consideri una popolazione di adulti in cui la probabilità di essere una donna è 0,60 .
Un sondaggio sulle attese che questa popolazione ha per il futuro rivela che:

- la probabilità che una donna sia ottimista è 0,90
- la probabilità che un uomo sia ottimista è 0,75

e) Dimostrare che la probabilità che una persona, estratta a caso dalla popolazione, sia ottimista è 0,84 .
f) È estratta a caso una persona dalla popolazione. Sapendo che tale persona è non ottimista, calcolare la probabilità che essa sia un uomo.
c) Calcolare la probabilità di avere esattamente 6 ottimisti in un gruppo di 8 persone scelte a caso dalla popolazione
d) Si considerino $n$ persone estratte a caso dalla popolazione.
Sia $p$ la probabilità che tutte queste $n$ persone siano ottimiste. Calcolare il minimo numero $n_0$ per cui $p$ sia strettamente minore di 0,30

**Esempio 11**

Un'urna contiene ($n$+8) biglie: 8 biglie bianche e $n$ nere (dove $n$ è un intero positivo). Le biglie sono indistinguibili al tatto. Un giocatore effettua due tiri con remissione.

Per ogni biglia bianca estratta il giocatore guadagna 1 euro.

Per ogni biglia nera estratta perde 2 euro.

a) Dimostrare che il giocatore può sia guadagnare 2 euro, sia perdere 1 euro, sia perdere 4 euro
b) Calcolare, in funzione di $n$, la probabilità corrispondente a ciascuno dei casi presi in considerazione al punto a)

Calcolare il valore di $n$ per cui la speranza matematica del guadagno del giocatore sia nulla