Introduzione al pensiero probabilistico
Il problema delle parti

Problema (in piccoli gruppi di lavoro)
Due giocatori di pari abilità disputano una serie di partite; vince il gioco chi, per primo, raggiunge un totale di sei vincite. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che questo abbia termine. Si domanda: se al momento della sospensione un giocatore ha vinto cinque partite e l'altro tre, e la posta in gioco é di 24 euro, come deve essere ripartita tale somma fra i due giocatori in modo tale che la ripartizione sia equa?

La nostra risoluzione

Se avete risolto il problema con la seguente proporzione o in un modo equivalente,

$24 : 8 = x : 5$ quindi spettano 15 euro a chi ha 5 punti e 9 euro a chi ne ha 3

allora leggete la discussione seguente (altrimenti chiedete al vostro insegnante i discutere la soluzione da voi proposta)

Discussione relativa a questa prima strategia
Che cosa accadrebbe se la partita si fosse interrotta sull' 1 a 0? Quanto spetterebbe al giocatore che ha 1 punto? E all'altro?

La soluzione vi sembra equa? Giustificate la risposta.

Pensate che la soluzione
"$24 : 8 = x : 5$ quindi spettano 15 euro a chi ha 5 punti e 9 euro a chi ne ha 3"
ossia la suddivisione della posta in parti proporzionali al punteggio, fu data da Luca Pacioli, un matematico, verso la fine del 1400 e fu contestata qualche decennio più tardi da un altro matematico, Tartaglia, proprio nella forma presa in esame (che cosa accade sul punteggio di 1 a 0?).

Proponete ora una differente strategia risolutiva, che tenga conto di quanto emerso dalla discussione e dopo averla scritta qui di seguito, confrontate la vostra strategia con quella di altri compagni. Discutete quindi in classe, con l'insegnante, le diverse risoluzioni proposte.

La strategia risolutiva di Pascal

Facciamo un po' d'ordine: il problema può essere formalizzato nei due seguenti modi:

1) [n: a ; b] ove a e b sono numeri naturali minori di n e n rappresenta il numero di punti che consentono di vincere la partita; a e b i punti dei due giocatori al momento dell'interruzione della partita.

2) [$-a$, $-b$] dove a e b sono il numero di partite che restano, rispettivamente, ad A e a B per vincere.

A voi è stato posto il problema

[6: 5; 3] = [-1, -3].

La strategia risolutiva di Pascal si basa sulla seguente proposizione (quindi ha una teoria specifica di riferimento):

Proposizione 1: se con le stesse possibilità posso ottenere una somma a oppure una somma b allora la mia speranza matematica è $(a+b)/2$; ossia è lecito che io mi attenda e pretenda la somma $(a+b)/2$

Pascal passa quindi a risolvere i seguenti problemi.

Problema 1: A gioca con B sotto la condizione che chi avrà vinto per primo tre partite, ritirerà la posta. Ora, se A ha vinto due partite e B ne ha vinta una sola e di comune accordo, vogliono interrompere il gioco, si chiede come debba essere divisa in modo giusto la posta.

La situazione di partenza è $A_{-1}B_{-2}$, cioè ad A manca una partita e a B due. Immaginiamo di fare una partita. Vi è una possibilità che A vinca e quindi ritiri la posta a e vi è una possibilità che B vinca e che perciò si pervenga alla situazione $A_{-1}B_{-1}$, dove A e B hanno le stesse possibilità di vincere. In tale situazione A si considera in possesso di a/2. Dunque il giocatore A dice: ho una possibilità di vincere a e una possibilità di vincere $a/2$. Per la proposizione 1, la speranza matematica di A è $(a+a/2) / 2 = ¾\ a$

Problema 2. Al giocatore A manchi una partita per vincere il gioco e al suo avversario B ne manchino 3. In che modo si può dividere equamente la posta?

Siamo nella situazione $A_{-1}B_{-3}$. Sia a la posta. Immaginiamo di fare una partita. Vi è una possibilità che A vinca e una che perda. Nel primo caso ritira la posta a, nel secondo ci si riconduce alla situazione $A_{-1}B_{-2}$, precedente. Quindi A ha una speranza matematica data da $(a+3/4a)/2 = 7/8a$.

Ragionando alla stessa maniera si ottiene che in $A_{-1}B_{-4}$ la speranza matematica di A è 15/16 a.

In generale, nel caso $A_{-1}B_{-n}$, la speranza matematica di A è $\frac{2^n-1}{2^n}a$.

La formula ora trovata risolve il problema [-1; -3] assegnato in classe. Naturalmente Pascal va avanti e si pone per esempio, il seguente problema:

Problema 3:

Al giocatore A manchino 2 partite per vincere il gioco e al suo avversario B ne manchino 3.

Da $A_{-2}B_{-3}$ si passa ad $A_{-1}B_{-3}$ (speranza matematica di A = $7/8a$) oppure ad $A_{-2}B_{-2}$: la s.m. di $A_{-2}B_{-2}$ è ½ a (visto che sono entrambi nelle stesse condizioni!) e quindi la s.m. di $A_{-2}B_{-3}$ è $(7/8+1/2)/2\ a$ = 11/16 a.

Situazioni	s.m. di A
$A_{-1}B_{-2}$	3/4a
$A_{-1}B_{-3}$	7/8a
$A_{-1}B_{-4}$	15/16a
$A_{-1}B_{-n}$	$\frac{2^n-1}{2^n}a$
$A_{-2}B_{-3}$	11/16 a

$A_{-2}B_{-4}$	13/16 a
$A_{-2}B_{-5}$	[s.m.($A_{-1}B_{-5}$)+s.m.($A_{-2}B_{-4}$)]/2 = 57/64
$A_{-2}B_{-6}$	[s.m.($A_{-1}B_{-6}$)+s.m.($A_{-2}B_{-5}$)]/2 = 120/128=15/16
$A_{-3}B_{-3}$	1/2
…..	

In questo modo è possibile risolvere in teoria, per ricorsione, qualunque problema di suddivisione della posta in gioco. È chiaro, però, che una risoluzione di questo tipo può essere particolarmente dispendiosa in termini computazionali quando ad entrambi i giocatori manchino molti punti per vincere.

La strategia risolutiva di Fermat

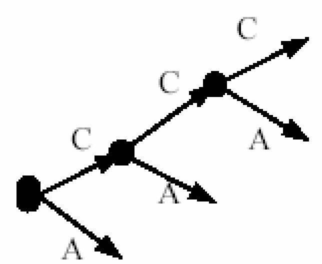
Una risoluzione generale è data anche da Fermat; meno intuitiva, anche per la "finzione matematica" che usa, ma più efficace dal punto di vista computazionale. La seguente risoluzione, che rappresenta con un diagramma ad albero le diverse possibilità che ancora possono accadere, è molto simile al modo di ragionare di Fermat e si basa sulle due seguenti leggi del calcolo delle probabilità:

P(A o B) = P(A) + P(B), se gli eventi A e B non possono verificarsi entrambi nello stesso esperimento

P(A e B) = P(A) * P(B) se l'accadere dell'evento A non modifica la probabilità dell'evento B.

Prima d andare avanti nella lettura, considerate esperimenti di lanci di monete o dadi, di estrazione di carte da un mazzo (con reinserimento) per trovare esempi di applicazioni delle due leggi che già dovreste conoscere dalla scuola media (fatevi aiutare in questo dal vostro insegnante).

Ora osservate il seguente diagramma ad albero:



A= vince Ariele
C = vince Calibrano

Rappresenta, a vostro avviso, tutte le possibili situazioni che avrebbero potuto ancora verificarsi dopo l'interruzione del gioco sul 5 a 3?

Siano ora
P(A) = probabilità che vinca Ariele
P(C) = probabilità che vinca Calibano
Si ha quindi che, nel caso in cui il punteggio sia di 5 a 3 per Ariele (al meglio delle 6),
P(C) = 1/8
P(A) = 1 – 1/8 = 7/8

Quindi 21 euro ad A e 3 a C.

Rileggete attentamente quanto detto nelle precedenti quattro righe e poi leggete attentamente quanto scritto nella seguente tabella:

Soluzione "alla Pascal"	Soluzione in termini moderni
Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia 12+6= 18. Sul 5 a 5 si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5 devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariele, ad Ariele vanno 12+6+3=21 denari, mentre a Calibano ne spettano 24-21=3.	La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi: E_1 ; E_2E_1 ; $E_2E_2E_1$ Ove: E_1 è l'evento "Ariele guadagna un punto"; E_2 è l'evento "Calibano guadagna un punto". Poiché E_1 ed E_2 hanno probabilità ½ , per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che E_1, E_2E_1, $E_2E_2E_1$ hanno, rispettivamente, probabilità uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale per eventi incompatibili, 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8. Un'equa ripartizione dei 24 danari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 danari ad Ariele e 3 a Calibano.

È tutto chiaro? Avete ancora punti non chiari o domande da porre al vostro insegnante?

Vi siete accorti che le risoluzioni di Pascal e Fermat hanno una cosa in comune che le contraddistingue nettamente dalla risoluzione di Pacioli? Pascal e Fermat suddividono la posta in parti proporzionali alla probabilità che Ariele e Calibano hanno di vincere al momento dell'interruzione. Pacioli suddivide la posta in parti proporzionali al punteggio all'atto dell'interruzione. È come se Pacioli guardasse solo a che cosa è già accaduto, mentre Pascal e Fermat guardano a quello che avrebbe potuto ancora accadere. È questo cambio a 180 gradi di prospettiva che caratterizza la nascita del pensiero probabilistico; forse per questo l'umanità ha dovuto attendere la metà del XVII secolo prima di iniziare a parlare esplicitamente di probabilità, nonostante i giochi di sorte e i problemi a essi relativi siano molto più antichi. Per quanto ora detto dovrebbe risultarvi chiaro che per la risoluzione dei problemi di probabilità sono importanti sistemi di rappresentazione efficaci degli eventi possibili, oltre che tecniche di conteggio dei casi favorevoli e dei casi possibili o tecniche di calcolo di rapporti di grandezze proporzionali ai casi favorevoli e ai casi possibili. Imparerete più avanti alcune di queste tecniche, insieme alla sistemazione delle basilari regole del calcolo delle probabilità. Per ora, però, vi chiediamo di provare a risolvere in piccoli gruppi di lavoro i problemi che qui di seguito vi proponiamo (alcuni relativamente semplici, altri più difficili), utilizzando quanto già conoscete dalla scuola media, quanto avete appreso nell'affrontare il precedente problema e quanto via via apprenderete discutendo le risoluzioni ce darete ai seguenti problemi con il vostro insegnante.
L'obiettivo è quello di un primo approccio non formale al pensiero probabilistico.

1. Sapete che un dado a sei facce, numerate da 1 a 6, è stato lanciato e che il risultato è un numero pari. Qual è la probabilità che sia uscito il numero 4? E il numero 5? E il numero 4 o il numero 2? E il numero 4 o il numero 3?
2. Consideriamo due monete apparentemente identiche: una "buona" che, lanciata in aria molte volte, cade presentando testa all'incirca la metà delle volte e una "truccata", che presenta testa all'incirca il 70% delle volte. Buttiamo insieme le due monete. Qual è la probabilità che le due monete presentino facce disuguali, cioè che una delle facce sia testa e l'altra croce?
3. Su 1000 insegnanti:
    a) 590 sono femmine,
    b) 385 insegnano materie letterarie,
    c) 300 sono maschi che non insegnano materie letterarie

   Qual è la probabilità che, preso a caso un docente tra i 1000 considerati, venga estratta una femmina che insegna materie letterarie? Qual è la probabilità che, essendo stata estratta, fra le 1000, una persona che non insegna materie letterarie, questa sia una femmina?
4. È più probabile che lanciando due dadi, a sei facce numerate da 1 a 6, si ottenga come somma dei punteggi 9 o 10?
5. Qual è la probabilità di fare un ambo al lotto giocando 5 e 10 sulla ruota di Genova? Il gioco è equo?
6. Qual è la probabilità, giocando su una ruota, di vincere giocando su:
    a) un numero fisso
    b) terno
    c) quaterna
    d) cinquina
7. In un sacchetto vi sono palline indistinguibili fra loro al tatto, ma colorate in modo diverso. Alcune sono blu, altre rosse, altre verdi. Non ci sono palline di altri colori. a probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è 1/2; la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu è 4/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Che cosa sai dire sul numero totale di palline contenute nel sacchetto? Quale somma dovrebbero scommettere tre giocatori, ciascuno su un colore diverso, per incassare 350 euro in caso di vittoria?
8. Due sacchetti contengono cinque bussolotti ciascuno, all'interno dei quali è contenuta una lettera dell'alfabeto. Nel sacchetto A vi sono le cinque lettere della parola "mamma" e nel sacchetto B le cinque lettere della parola "anima". Viene estratta a caso una lettera dal sacchetto A e introdotta nel sacchetto B. In seguito viene estratta una lettera dal sacchetto B (che ormai ne contiene 6) che viene introdotta in A. Qual è la probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritta, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria (ossia quella che essi possedevano prima che venisse effettuata l'esperienza a due prove)?
9. È più probabile che lanciando un dado due volte escano due numeri uguali, oppure che lanciandolo tre volte esca tutte e tre le volte un numero dispari? (Suggerito per la preparazione alla maturità scientifica dal MPI)
10. Quanto è probabile, in una stanza con 8 persone, che almeno due festeggino lo stesso compleanno?
11. Determinare la probabilità che in 6 lanci di un dado non truccato il numero 3 si presenti esattamente 3 volte
12. Un test clinico, atto a rivelare la presenza di una certa forma di malattia, risulta positivo in un certo paziente. Vi viene detto che:
    a) l'affidabilità del test in questione è del 79%
    b) la frequenza media della malattia, nella popolazione da cui viene il paziente, in quella fascia d'età è dell'1%
    c) i falsi positivi sono il 10%

Tenuto conto di tutto questo, qual è, secondo voi, la probabilità che il paziente abbia effettivamente quella malattia?

13) In un ufficio vi sono 25 calcolatori. La probabilità che uno di essi abbia problemi di funzionamento nel corso dell'anno è uguale a 0,30. Si suppone che i guasti che accadono ai calcolatori siano indipendenti gli uni dagli altri. Calcolare la probabilità che esattamente 5 calcolatori abbiano problemi di funzionamento nel corso dell'anno.

14) Partecipando a un gioco si possono vincere 10 gettoni o perderne 5 per ogni partita giocata. La probabilità di vincere è 0,40. Un tizio inizia a giocare avendo 15 gettoni in tasca. Calcolare la probabilità che egli possieda 30 gettoni dopo aver giocato 3 partite.

15) Un gioco consiste nel lanciare simultaneamente due dadi cubici regolari, entrambi con le facce numerate da 1 a 6. Se i numeri ottenuti sono identici, si effettua un secondo lancio, altrimenti il gioco finisce. Calcolare la probabilità di non effettuare il secondo lancio.

16) Un garage è incaricato di verificare se le emissioni dei gas di scarico delle automobili soddisfano le norme nazionali antinquinamento. Si sa che il 40% delle automobili in circolazione non soddisfano le norme antinquinamento.

a) Qual è la probabilità che un'automobile che si presenta al controllo soddisfi le norme antinquinamento?

Un giorno, sei automobili si presentano per il controllo nel garage.

b)

i. Qual è la probabilità che nessuna di queste sei automobili soddisfi le norme antinquinamento?

ii. Dimostrare che la probabilità che più della metà delle sei automobili non soddisfino le norme antinquinamento è 0,1792.

Il giorno dopo vengono controllate altre sei automobili.

c) Qual è la probabilità che, sia nel primo, sia nel secondo giorno, si abbia più della metà delle automobili che non soddisfano le norme antinquinamento?

17. L probabilità che un individuo colpisca un bersaglio con un tiro è $\frac{2}{3}$. Se egli tira cinque volte, qual è la probabilità che colpisca il bersaglio esattamente tre volte?

18. Tre persone A, B, C cercano di risolvere un problema lavorando indipendentemente.
A ha una probabilità $1/2$ di trovare la soluzione.
B ha una probabilità $1/3$ e C una probabilità $1/5$.
Calcolare la probabilità che il problema sia risolto da almeno una persona.

19. In un gioco, si lanciano due dadi cubici regolari, con facce numerate da 1 a 6. Si vince se i due numeri ottenuti sono entrambi maggiori di 4.
Qual è la probabilità di perdere?