PROBABILITÀ - SCHEDA N. 2
LE VARIABILI ALEATORIE

1. Le variabili aleatorie

Nella scheda precedente abbiamo definito lo spazio campionario come la totalità degli esiti possibili di un esperimento casuale; abbiamo visto che gli eventi possono essere interpretati come sottoinsiemi dello spazio campionario e abbiamo definito la funzione di probabilità come funzione che assegna agli eventi un numero reale compreso fra 0 e 1.

In analogia a quanto abbiamo visto per la rilevazione di dati sperimentali, introduciamo la nozione di *variabile aleatoria* (o variabile casuale), quella di densità di probabilità (o di distribuzione) di una variabile aleatoria e di funzione di distribuzione cumulata. Useremo le variabili aleatorie per descrivere gli eventi e le densità di probabilità per fornire le probabilità degli eventi in termini di variabili aleatorie.

Dato un esperimento casuale, una **variabile aleatoria** X è una funzione che fa corrispondere un numero reale a ogni esito dell'esperimento.

$$X:\Omega \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

Se l'insieme dei valori assunti dalla variabile aleatoria è finito o numerabile, la variabile aleatoria si dice **discreta**, altrimenti si dice **continua**. Consideriamo inizialmente e per semplicità variabili aleatorie discrete.

ESEMPIO 1. Consideriamo l'esperimento del lancio di una moneta. In questo caso $\Omega = \{\text{testa, croce}\}$. Consideriamo la variabile aleatoria così definita:

$$X\left(\{\text{testa}\}\right) = 1 \qquad \text{e} \qquad X\left(\{\text{croce}\}\right) = 0$$

Quindi: $X : \{\text{testa,croce}\} \rightarrow \{0,1\}$

Che cosa è cambiato? Siamo passati da un insieme non numerico a un insieme numerico. Qual è il vantaggio?

Lanciamo 10 volte la moneta. Indichiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_{10}$ le variabili aleatorie corrispondenti a 10 lanci. Se vogliamo sapere il numero di uscite di testa nei 10 lanci possiamo sommare i valori delle 10 variabili aleatorie. Quindi la variabile aleatoria

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k + \ldots + X_{10} \quad \text{ovvero} \quad X = \sum_{k=1}^{10} X_k$$

rappresenta il numero di uscite di testa in 10 lanci.

2. La densità di probabilità e la funzione di distribuzione cumulata di una variabile aleatoria

La **densità di probabilità** f_X di una variabile aleatoria **discreta** X fornisce la probabilità di ogni evento costruito a partire da X:

$$f_X(x) = P(X = x)\,.$$

Ricordiamo che, come in statistica descrittiva, usiamo le lettere maiuscole per indicare le variabili aleatorie e le lettere minuscole per indicare i valori assunti.

In seguito modelleremo spesso l'esperimento mediante assunzioni su una variabile casuale e la sua funzione di densità di probabilità tralasciando la descrizione dello spazio campionario, degli eventi e delle probabilità degli eventi.

ESEMPIO 2. Consideriamo il lancio di tre monete non truccate e indichiamo con X la variabile aleatoria che indica il numero totale di teste. La variabile X assume valori 0, 1, 2 e 3 e la densità di probabilità f_X è

$$f_X(0)=1/8, \quad f_X(1)=3/8, \quad f_X(2)=3/8, \quad f_X(3)=1/8, \quad f_X(k)=0 \text{ per ogni altro valore di } k$$

La densità di probabilità si può rappresentare con una scrittura che richiama le tabelle utilizzate in statistica descrittiva dove sulla prima riga riportavamo i dati osservati e sulla seconda le frequenze:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$f_X(x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	...

Tabella 1. Densità di probabilità.

Ovvero $P_X(X=x_i)=p_i$ con la proprietà che $\sum_i p_i = 1$ e $0 \le p_i \le 1$.

Notiamo che nella definizione di variabile aleatoria non si specifica come si possano assegnare le probabilità agli eventi su cui assume valori la variabile; come abbiamo già detto, le condizioni sono che tali probabilità siano numeri compresi fra 0 e 1, che la loro somma sia 1 e che la probabilità dell'unione di due eventi disgiunti sia la somma delle probabilità dei due eventi. D'altra parte l'assegnazione delle probabilità non può essere del tutto arbitraria. Se vogliamo che la densità di probabilità di una variabile aleatoria consenta previsioni efficaci, è opportuno assegnare agli eventi probabilità "ragionevoli" e ciò è tanto più possibile quanto più si conosce il fenomeno studiato. Come abbiamo già detto, in alcuni casi, queste informazioni possono essere ottenute osservando più volte il fenomeno nelle stesse condizioni.

In analogia con lo studio delle variabili in statistica definiamo la **funzione di distribuzione cumulata** (o funzione **di ripartizione**) di una variabile aleatoria X, indicata con F_X (o solo con F se è chiaro a quale variabile ci si riferisce), la funzione definita sulla retta reale tale che $F_X(x)$ coincida con la probabilità che si verifichi l'evento $X \le x$.

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Anche in questo caso possiamo utilizzare una rappresentazione tramite tabella:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$F_X(x)$	p_1	p_1+p_2	$p_1+p_2+p_3$	$p_1+p_2+p_3+p_4$	...

Tabella 2. Funzione di distribuzione cumulata.

La funzione di distribuzione cumulata soddisfa tutte le proprietà già viste in statistica descrittiva per le variabili che modellano rilevazioni di dati sperimentali:

1. F_X è una funzione crescente o costante;
2. in corrispondenza di ogni punto di discontinuità la funzione assume il valore a sinistra.
3. la funzione vale 0 per ogni valore minore all'osservazione minima e vale 1 per ogni valore maggiore o uguale all'osservazione massima.

ESEMPIO 3.

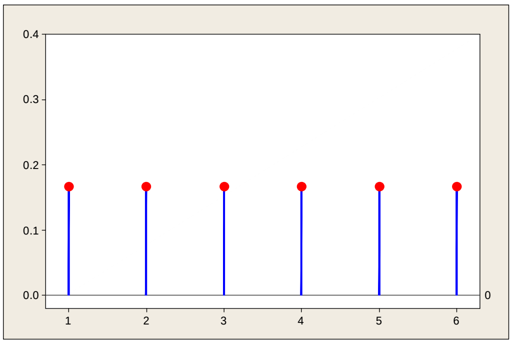
Consideriamo il lancio di due dadi e indichiamo con X1 e X2 il risultato dei due lanci in cui si ha:

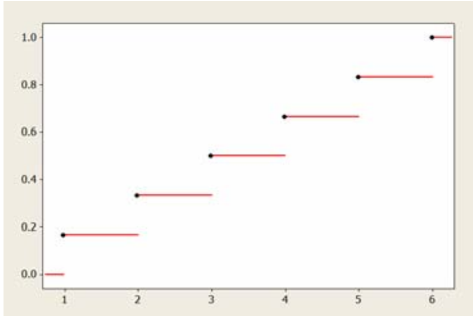
X1	1	2	3	4	5	6
$P_{X1}(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$F_{X1}(x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

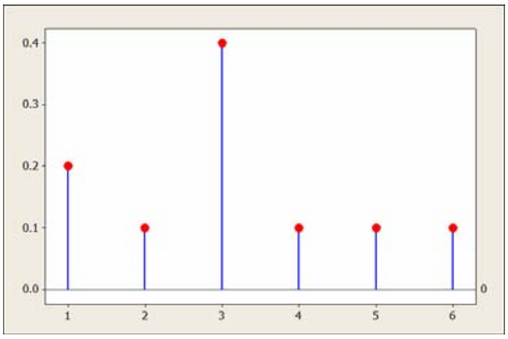
X2	1	2	3	4	5	6
$P_{X2}(x)$	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1
$F_{X2}(x)$	0.2	0.3	0.7	0.8	0.9	1

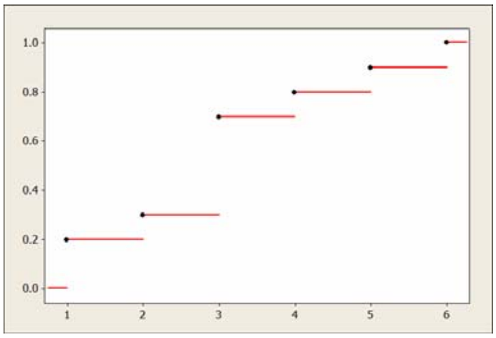
Il primo è un dado equilibrato mentre il secondo è truccato.

Qui sotto sono riportati i grafici delle densità di probabilità e delle funzioni di distribuzione cumulata dei due dadi.









3. La variabile aletoria “primo lancio in cui esce testa”

Lanciamo una moneta e chiediamoci dopo quanti lanci esce testa. È più probabile che testa esca per la prima volta al primo lancio, al secondo, al decimo?

Possibile esperienza (descritta in fondo alla scheda)

E1. La prima volta che esce testa.

Consideriamo la variabile aletoria T che descrive il “primo lancio in cui esce testa”. Quali valori può assumere? 1, 2, 3 … ma anche 1 000, 100 000, …., cioè un qualsiasi numero naturale.
Pur partendo da un esperimento che ha due possibili risultati, abbiamo costruito una variabile aleatoria che può assumere una *infinità numerabile* di valori.

Cerchiamo di costruire la densità di probabilità di T.
Se p è la probabiltà che esca testa in ciascun lancio, la probabilità che testa esca per la prima volta:

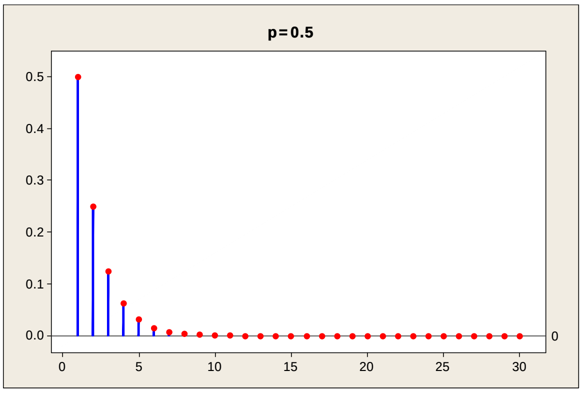
- al primo lancio è p: $P(T=1) = p$
- al secondo lancio: è la probabilità di: “uscita di croce al primo” e “uscita di testa al secondo” con i due eventi indipendenti; quindi:
$$P(T=2) = (1-p)p$$
- al terzo lancio: è la probabilità di: “uscita di croce al primo” e “uscita di croce al secondo” e “uscita di testa al terzo” con i tre eventi indipendenti; quindi:
$$P(T=3) = (1-p)^2 p$$
- al k-esimo lancio:
$$P(T=k) = (1-p)^{k-1} p$$

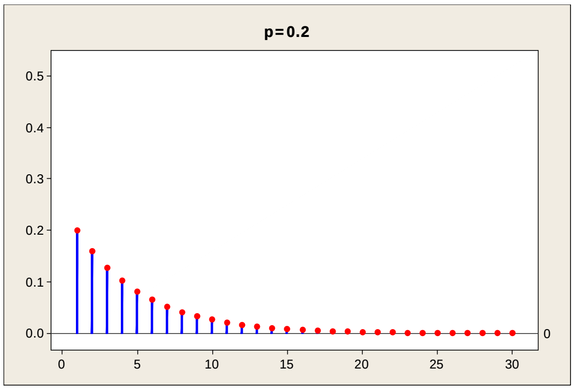
X	*1*	*2*	…	*k*	…
$f_X(x)$	p	$(1-p)p$	…	$(1-p)^{k-1}p$	…

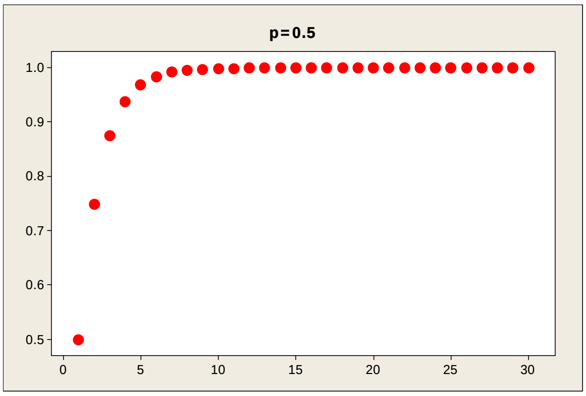
Tabella 3. Densità di probabilità del primo lancio.

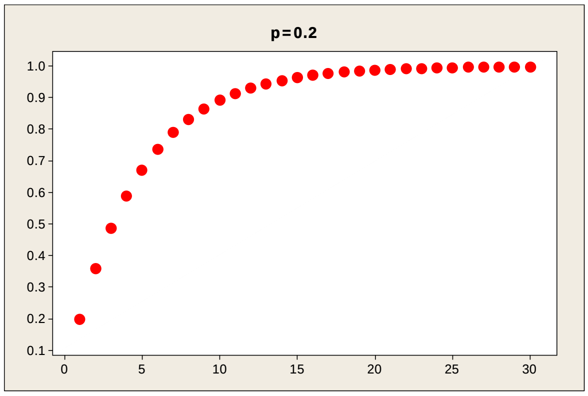
Osserviamo che ciascuna probabilità è compresa fra 0 e 1 e si dimostra che $\sum_{k=1}^{\infty} P(T = k) = 1$.

Qui sotto sono riportati i grafici delle densità di probabilità e la funzione di distribuzione cumulata di T per una moneta equilibrata e per una con probabilità di uscita di testa uguale a 0.2.
Osserviamo che intuitivamente si può capire che la somma delle lunghezze delle barrette nei due grafici è uguale, e deve essere uguale a 1. E la funzione di ditribuzione cumulata in entrambi i casi arriva "vicinissimo" a 1.









4. Trasformazione di una variabile aleatoria discreta

ESEMPIO 5 Consideriamo la variabile aleatoria X che assume i valori –1, 0, 2 con probabilità rispettivamente 0.4, 0.1, 0.5. La variabile aleatoria $Y = X^2$ assume valori 0, 1, 4 con probabilità rispettivamente 0.1, 0.4, 0.5. Infatti, per esempio, Y assume valore 0 solamente se X assume valore 0 e con la probabilità con cui X è 0.

X	$f_X(x_i)$ $[P(X = x_i)]$	$Y = X^2$	$f_Y(y_i)$ $[P(Y = g(x_i))]$
-1	0.4	1	0.4
0	0.1	0	0.1
2	0.5	4	0.5

ESEMPIO 6 Consideriamo la variabile casuale X che assume i valori –1, 0, 1, 2 con probabilità rispettivamente 0.4, 0.2, 0.1, 0.3. La variabile aleatoria $Y=X^2$ assume valori 0, 1, 4 con probabilità 0.2, 0.5 (=0.4+0.1), 0.3.

X	$f_X(x_i)$ $[P(X=x_i)]$	Y	$f_Y(y_i)$ $[P(Y=g(x_i))]$
-1	0.4	1	0.4
0	0.2	0	0.2
1	0.1	1	0.1
2	0.3	4	0.3

Y	$f_Y(y_i)$ $[P(Y=g(x_i))]$
0	0.2
1	0.5
4	0.3

In generale, indichiamo con X una variabile aleatoria discreta che assume valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ e con f_X la funzione di densità associata a X.

Se g è una funzione definita sull'insieme dei valori assunti da X, la variabile aleatoria $Y=g(X)$ assume i valori $y_1, \dots, y_n$ con $y_1=g(x_1)$, $y_2=g(x_2)$,..., $y_n=g(x_n)$ e ha come funzione di densità f_Y la funzione tale che

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \mid g(x_i)=y} f_X(x_i)$$

dove la somma è fatta su tutti gli x_i che, trasformati tramite la funzione g, hanno come valore y

X	$f_X(x_i)$ $[P(X=x_i)]$	Y	$f_Y(y_i)$ $[P(Y=g(x_i))]$
x_1	$f_X(x_1)$	$g(x_1)$	$f_X(x_1)$
x_2	$f_X(x_2)$	$g(x_2)$	$f_X(x_2)$
...		...	...
x_n	$f_X(x_n)$	$g(x_n)$	$f_X(x_n)$

Tabella 3. Densità di probabilità di una variabile aleatoria trasformata.

5. Variabili aleatorie continue

Finora abbiamo considerato solo variabili aleatorie che assumono un numero finito o al più numerabile di valori. Si possono avere anche esempi di variabili aleatorie che assumono valori nell'insieme dei numeri reali (l'istante in cui un certo componente elettronico si guasta, il tempo di decadimento di una sostanza radioattiva, i pesi, le altezze,....).
Le idee fondamentali che abbiamo sviluppato per le variabili casuali discrete valgono anche nel continuo. Vi sono *però* alcune differenze tecniche (ad esempio le sommatorie sono sostituite da integrali).

Nel caso continuo la probabilità che una variabile X assuma un valore uguale a x è nulla (sai darne una giustificazione?). Per variabili aleatorie che assumono valori nell'insieme dei numeri reali, si ha:

$\boldsymbol{P(X=x)=0}$, per ogni x reale. [a]

Questa condizione determina la sostanziale differenza fra il caso continuo e quello discreto. La funzione che associa ad ogni x il valore $P(X=x)$ è la funzione nulla e quindi non dà più informazioni sulle probabilità degli eventi costruiti a partire da X.
Come possiamo quindi definire la funzione di densità di probabilità di X in modo da avere significative informazioni associate alle probabilità degli eventi?

[a] Esistono variabili aleatorie che assumono valori nell'insieme dei numeri reali, ma in alcuni punti la probabilità non è 0.

Una definizione che rimane invariata nel caso continuo è quella di funzione di distribuzione cumulata. Se *X* è una variabile aleatoria la sua **funzione di distribuzione cumulata** è:

$$F_X(x) = P(X \le x) \quad \text{per ogni numero reale } x.$$

Le proprietà già enunciate nel caso discreto continuano a valere nel caso continuo. Se si conosce la funzione di distribuzione cumulata di X, allora si conosce anche la quantità

$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a).$$ [b]

Se F_X è esprimibile come

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

si dice che X è assolutamente continua. Nel seguito considereremo solo la classe delle variabili assolutamente continue e le indicheremo semplicemente come variabili aleatorie continue.

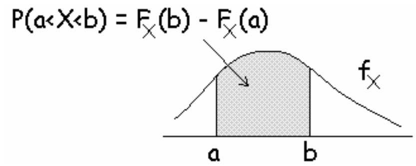
La funzione f_X è la **funzione di densità** di *X*. Soddisfa le seguenti proprietà che la caratterizzano

a) f_X è non negativa; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$.

I valori assunti dalla funzione di densità NON sono probabilità; abbiamo già detto che, per ogni x, $P(X=x)=0$.

Per le proprietà sopra enunciate ha quindi senso parlare solo della probabilità che una variabile aleatoria ha di assumere valori in un intervallo reale e non di probabilità che la variabile aleatoria assuma un valore specifico (infatti quest'ultima è sempre 0).

Come indicato a fianco la probabilità che X assuma valori fra due numeri reali a e b è data dall'area colrata in grigio, ossia dall'area "sottesa al grafico della funzione di densità"



E1. Esperienza: la prima volta che esce testa

1. *Simulate* per 50 volte 200 lanci di una moneta *equilibrata*.
   Per ciascuna simulazione controllate a quale lancio è uscita per la prima volta testa e fate un istogramma di questi valori.

   È più probabile che testa esca per la prima volta al primo lancio, al secondo, al decimo?

2. *Simulate* per 50 volte 200 lanci di una moneta *con probabilità di uscita di testa uguale a 0.30*.
   Per ciascuna simulazione controllate a quale lancio è uscita per la prima volta testa e fate un istogramma di questi valori.

   È più probabile che testa esca per la prima volta al primo lancio, al secondo, al decimo?

3. Quale formula può descrivere la densità di probabilità della variabile aletatoria T "primo lancio in cui esce testa".

---

[b] Osserviamo le quantità $P(a<X<b)$, $P(a \le X<b)$, $P(a \le X \le b)$ e $P(a<X \le b)$ sono uguali.