Percorso (sui cinque anni di scuola secondaria) per il pensiero statistico e probabilistico

Il percorso prevede i seguenti passi:

a) statistica descrittiva con attività molto semplici, che utilizzano le conoscenze che gli studenti hanno già dalla scuola media;
b) scheda 1 (variabili qualitative); scheda 2 (variabili quantitative: rappresentazioni grafiche e quantili); scheda 3 (variabili quantitative: indici di centralità dispersione e forma) progettate e realizzate da Maria Piera Rogantin ed Emanuela Sasso, nell'ambito del progetto Lauree scientifiche nell'a.s. 2005 – 2006;
c) avvio al ragionamento combinatorio (un po' di combinatoria e qualche riflessione sui coefficienti binomiali);
d) lezione sull'avvio al pensiero probabilistico, fondata sulla proposta e discussione del "problema delle parti" come esempio di ostacolo epistemologico, almeno fino alla precisazione della nozione e del pensiero probabilistico. La lezione si conclude con una serie di semplici problemi da risolvere in gruppo, con l'aiuto dell'insegnante (in ogni caso discussi sempre dall'insegnante) in modo da avvicinarsi al pensiero probabilistico con un approccio tipico dell'apprendistato cognitivo;
e) scheda 4 (variabili quantitative: trasformazioni lineari, indici di covarianza e correlazione); scheda 5 (regressione lineare semplice); scheda 6 (facoltativa: cluster analysis) progettate e realizzate da Maria Piera Rogantin ed Emanuela Sasso, nell'ambito del progetto Lauree scientifiche nell'a.s. 2005 – 2006;
f) approfondimento sulla distribuzione binomiale, con la lezione "distribuzione binoimiale", già presente in rete nella stanza "avvio al ragionamento combinatorio" dal 24 Settembre 2005;
g) sistemazione del calcolo delle probabilità nel discreto con il concetto di variabile casuale discreta e principali distribuzioni discrete di probabilità: Lezione "calcolo delle probabilità";
h) distribuzioni continue di probabilità;
i) statistica inferenziale.

Scheda per l'insegnante relativa alla prima lezione di avvio al pensiero probabilistico (il problema delle parti)

Metodologia.

Proposta del problema in piccoli gruppi e discussione collettiva orchestrata dall'insegnante al termine delle varie strategie risolutive proposte dagli studenti.

Obiettivi.

a) fare in modo che gli studenti possano confrontarsi con la caratteristica tipica del pensiero probabilistico (ragionare in termini di "ciò che può ancora accadere", piuttosto che in termini di "ciò che è già accaduto");
b) rinfrescare alcune nozioni e tecniche di calcolo delle probabilità già note dalla scuola elementare e media: eventi elementari; probabilità come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili; legge delle probabilità totali; legge delle probabilità composte; uso dei diagrammi ad albero per rappresentare "ciò che può ancora accadere".

Problema

Due giocatori di pari abilità disputano una serie di partite; vince il gioco chi, per primo, raggiunge un totale di sei vincite. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che questo abbia termine. Si domanda: se al momento della sospensione un giocatore ha vinto cinque partite e l'altro tre, e la posta in gioco é di 24 euro, come deve essere ripartita tale somma fra i due giocatori in modo tale che la ripartizione sia equa?

Prima strategia risolutiva attesa

Gli studenti utilizzano un modello di ripartizione proporzionale in base al punteggio 5 a 3:
$24 : 8 = x : 5$
Quindi spettano 15 euro a chi ha 5 punti e 9 euro a chi ne ha 3.

Discussione matematica collettiva relativa a questa prima strategia
Che cosa accadrebbe se la partita si fosse interrotta sull' 1 a 0? Con la strategia proposta tutta la posta (24 euro) andrebbe al giocatore che ha 1 punto. La soluzione è inevitabilmente sentita come non equa: infatti il giocatore che ha 0 punti non otterrebbe alcunché, pur avendo molte possibilità di recuperare e vincere (questa critica colpisce definitivamente nel segno soprattutto quando si simula il gioco con più studenti e si chiede a uno di essi che sta perdendo 1 a 0 se sarebbe disposto a ritenere equa una ripartizione della posta che prevede 0 euro per lui e 24 euro a chi ha 1 punto).
L'insegnante fa sapere alla classe che questa soluzione, la suddivisione della posta in parti proporzionali al punteggio, fu data da Luca Pacioli, un matematico verso la fine del 1400 e fu contestata qualche decennio più tardi da un altro matematico, Tartaglia, proprio nella forma presa in esame (che cosa accade sul punteggio di 1 a 0). Il riferimento a Pacioli ha può servire a dare dignità all'errore commesso dagli studenti: anche un matematico l'ha commesso.

Altre strategie attese
Sono varie e differenziate. Le più banali sono quelle di proporre di rifare la partita, di suddividere, qualunque sia il punteggio, la posta in due parti uguali; quelle più articolate ripercorrono alcune soluzioni proposte nella storia della matematica prima che il problema venisse affrontato e risolto a Toulouse e a Parigi (da Fermat e Pascal) con la nascita del calcolo delle probabilità. In particolare le soluzioni più articolate hanno il pregio di iniziare a tenere conto non solo delle partite già giocate, ma anche di quelle che ancora potrebbero essere giocate: una prospettiva tipica del calcolo delle probabilità che, per valutare, guarda allo spazio delle possibilità e non (solo) alle sue proiezioni nel mondo reale (ciò che è accaduto). Un cambio di prospettiva a 180 gradi che richiede tecniche adeguate anche di rappresentazione e di valutazione dei casi possibili e di quelli favorevoli (o, meglio, del loro rapporto).
Riporto qui di seguito una discussione registrata in una classe di quinta ginnasio, simile a tante altre discussioni a cui ho assistito, negli anni, in altre classi con ragazzi di primo anno di scuola secondaria di secondo grado, ma anche con ragazzi di terzo anno (che, però, non avevano ancora affrontato nella scuola secondaria elementi di calcolo delle probabilità). Nel dialogo, Ariele è quello che ha 5 punti; Calibrano 3 e Prospero è il gendarme che ha interrotto la partita; invece che di euro (che ancora non esistevano, avevamo parlato di "denari").
Esempio di discussione in classe
Francesca: *Perché non si decide di dare tutta la posta al giocatore che sta vincendo?*
Sonia*: Ma in tal caso le parti non sono più eque! Uno che sta perdendo ha ancora possibilità di vincere. La partita non è finita, è solo stata interrotta dall'intervento di Prospero...*
Pamela: *Sono d'accordo. Dobbiamo tenere conto delle possibilità che Calibano ha ancora di vincere.*
Emanuele: *Sì, però si potrebbe stabilire che, in ogni caso, chi sta vincendo si prenda tutta la posta! È una scelta come un'altra.*
Carlo: *Allora si potrebbe anche stabilire che si continui a giocare un'altra volta ripartendo dal punto in cui sono rimasti.*
Sara: *Allora potremmo anche decidere di far fuori Prospero!*
Insegnante: *Tutte quelle proposte potrebbero essere valide strategie risolutive, se però ci si convince che si tratta di soluzioni eque. Forse quello che ancora non è stato esplorato a fondo è il concetto di equità. Che cosa vuol dire che una suddivisione è equa?*
A questo punto mi è sembrato opportuno introdurre uno spunto di riflessione, anche per evitare che la situazione mi sfuggisse di mano. Proprio per tale motivo ho cercato di mettere in evidenza la voce di Sonia, che fa riferimento all'equità. Il mio scopo è stato solo parzialmente raggiunto: gli studenti, infatti, hanno evitato di proporre altre soluzioni simili a quella di Sara, ma non hanno preso in seria considerazione il problema di stabilire che cosa si intenda effettivamente con *equa suddivisione*. Non ho insistito nella mia richiesta perché non ho ritenuto i tempi sufficientemente maturi. Riporto alcuni momenti del prosieguo della discussione.
Armando: *Il massimo punteggio ottenibile è 6. Allora faccio* 24 : 6 = 4. *Moltiplico* 4 *per* 5 *e poi per* 3 *e ottengo i soldi da dare ad Ariele e quelli da dare a Calibano.*
Matteo: *Non è possibile! Dovresti dare 32 denari, quando ne hai solo 24. Ottieni un numero più grande della posta!*
Silvia: *Dividiamo* 24 per 12. *Otteniamo* 2. *Quindi* 2*5= 10 *denari ad Ariele e* 2*3 = 6 *denari a Calibano*
Armando: *Sì, ha ragione, perché punti totali possibili sono* 12 (Armando si riferisce al massimo numero di partite che in linea di principio possono essere giocate prima che uno dei due giocatori arrivi a 6). *Il fatto è che rimangono* 8 (ossia 24-16= 8) *denari da spartire fra Ariele e Calibano. Questi, visto che non sono ancora stati assegnati, li possiamo dividere in parti eque, cioè metà per uno. Quindi* 10+4 = 14 *denari ad Ariele e* 6+4 = 10 *denari a Calibano.*

Isabella: *Perché dividi per 12? Non si può mai arrivare a 12 partite.*
Simona: *Il numero massimo di partite è 11.*
Matteo: *A Calibano mancano tre punti per vincere. Ad Ariele manca un punto per vincere.* 3+1=4. *La posta è* 24. 24:4 = 6. 6.3 = 18 *denari ad Ariele* e 6.1 = 6 *denari a Calibano*.
Simona: *Ma no, perché moltiplichi i punti che mancano a Calibano per ottenere i denari di Ariele e quelli che mancano ad Ariele per ottenere quelli di Calibano*?
Armando: 24: 11. *Faccio* 24: 11, *perché i punti totali possibili sono* 11.
Simona: *Sì è giusto, ma* 24: *11 non è un valore esatto. Allora dobbiamo dare una soluzione approssimata.*
Davide: *Ma basta lasciare la frazione....*
Emanuele: *Sì, lasciamo la frazione. Calcoliamo quanto vale in denari ogni partita. Poi se uno ha vinto* x *partite moltiplichiamo* x *per il numero massimo di denari che possiamo attribuire a una partita. Quelli che rimangono li dividiamo in parti uguali.*
La discussione, a questo punto, procede in modo piuttosto confuso. Li lascio fare per qualche minuto. Poi consiglio di ritornare a riflettere, per non più di una decina di minuti, nei singoli gruppi per chiarirsi un po' le idee. Prima che riprenda la discussione faccio notare che i tentativi di soluzione proposti hanno avuto almeno due meriti:
• mettere in evidenza che una suddivisione equa deve tenere conto non solo delle partite giocate, ma anche di quelle che rimangono da giocare (come suggerito esplicitamente dall'intervento di Matteo, che addirittura tiene conto solo di quelle che ancora rimangono da giocare);
• ribadire, anche se non esplicitamente, che non si è ancora analizzato a fondo e chiarito che cosa si intende per *equa suddivisione*.
Intervengo anche per sottolineare che in una divisione equa della posta di deve tenere conto delle possibilità di vincita che ciascun giocatore ha al momento in cui la partita è stata interrotta. E per far questo bisogna esplorare le varie possibilità che rimangono quando la partita viene interrotta.
A questo punto Matteo interviene per proporre una soluzione pensata durante il secondo lavoro in gruppo.
Matteo: *Siamo d'accordo sul fatto che si debba tenere conto sia delle partite che rimangono da giocare, sia di quelle già giocate. Per tenere conto di queste ultime abbiamo diviso* 24 *per* 12, *che è il numero massimo di possibilità, non di partite che si possono giocare. In questo modo abbiamo ottenuto* 2, *che è il numero massimo di denari a punto. Allora ad Ariele vanno* 10 *denari e a Calibano ne vanno* 6. *I restanti* 8 *denari li suddividiamo in parti proporzionali alle possibilità di vittoria che hanno i due giocatori. Ad Ariele basta una partita per vincere. A Calibano ne servono tre.* 3+1= 4 *Allora divido* 8 *in quattro parti e ne dò tre ad Ariele e una a Calibano. In definitiva, Ariele prende* 10+6 = 16 *denari e Calibano ne prende* 8.
Alcuni studenti non appartenenti al gruppo di Matteo, provano che cosa succede in casi diversi dal 5 a 3. Per esempio Emanuele chiede a Matteo di controllare la sua risoluzione sul punteggio di 1 a 0. In tal caso Ariele prenderebbe 2 denari per la partita giocata, mentre Calibano non ne prenderebbe nessuno. I restanti 22 denari dovrebbero essere suddivisi in 11 parti di cui 6 vanno ad Ariele e 5 a Calibano (Ariele per vincere deve vincere 5 partite, Calibano 6): 22:11=2 2.6= 12 ad Ariele e 10 a Calibano. In definitiva ad Ariele vanno 14 denari e 10 a Calibano. Altre prove sono effettuate da altri studenti. Mi rendo conto, però, gli studenti non sono tutti sicuri e convinti della risoluzione proposta dal gruppo di Matteo, anche se non sono in grado di muovere critiche significative.
Insegnante: *È stata proposta una soluzione che sembra essere ragionevole. Anche a me sembra ragionevole e lo è sembrata anche ad alcuni matematici che hanno proposto qualcosa di simile. Ma come a quei matematici, anche a noi non convince del tutto; ci lascia un po' di amaro in bocca o forse solo un po' di incertezza. Siamo sicuri, per esempio, di aver preso in considerazione tutte le possibilità di vincita che Ariele e Calibano hanno quando viene interrotta la partita? Vediamo: sul* 5 a 3 *quali potrebbero essere le varie possibilità? Vi chiedo, cioè, di prendere in considerazione, con me, tutti i casi possibili.*
A questo punto la maggior parte degli studenti della classe si trova in un proficuo punto di equilibrio tra disorientamento (il problema, che appariva così banale, è invece piuttosto complesso) e la motivazione a discutere la soluzione proposta da Pascal e Fermat.

La strategia risolutiva di Pascal

Facciamo un po' d'ordine: il problema può essere formalizzato nei due seguenti modi:

1) [*n*: *a* ; *b*] ove *a* e *b* sono numeri naturali minori di *n* e *n* rappresenta il numero di punti che consentono di vincere la partita; *a* e *b* i punti dei due giocatori al momento dell'interruzione della partita.

2) [-*a*, -*b*] dove *a* e *b* sono il numero di partite che restano, rispettivamente, ad *A* e a *B* per vincere.

Agli studenti è stato posto il problema
[6: 5; 3] = [-1, -3].
La strategia risolutiva di Pascal si basa sulla seguente proposizione (quindi ha una teoria specifica di riferimento):
Proposizione 1: se con le stesse possibilità posso ottenere una somma *a* oppure una somma *b* allora la mia speranza matematica è (*a*+*b*)/2; ossia è lecito che io mi attenda e pretenda la somma (*a*+*b*)/2
(Si può far notare che la Proposizione 1 può essere così generalizzata:
Proposizione 2: se il numero dei casi con i quali io ottengo la somma *a* è *p* e il numero dei casi con i quali io ottengo la somma *b* è *q*, ed ammetto che tutti i casi possano verificarsi con la stessa facilità, allora la mia speranza matematica è (*pa* + *qb*)/(*p*+*q*)

Notiamo che si può scrivere $\frac{p}{p+q}a+\frac{q}{p+q}b$, dove per noi, oggi, i fattori di *a* e di *b* sono le probabilità di ottenere rispettivamente, *a* e *b*. Quindi la Proposizione 2 è equivalente alla seguente: "se ho la probabilità *P*(*a*) di ottenere *a* e la probabilità *P*(*b*) di ottenere *b*, allora la mia speranza matematica è *P*(*a*)*a* + *P*(*b*)*b*
Si può pensare alla seguente generalizzazione:

se ho p_i casi con i quali posso ottenere a_i (i = 1, 2, …., n) ed i p_i casi si verificano con pari facilità, la mia speranza matematica è:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{p_1 + p_2 + ... p_n} a_i \;)$$

Pascal passa quindi a risolvere i seguenti problemi.
Problema 1: A gioca con B sotto la condizione che chi avrà vinto per primo tre partite, ritirerà la posta. Ora, se A ha vinto due partite e B ne ha vinta una sola e di comune accordo, vogliono interrompere il gioco, si chiede come debba essere divisa in modo giusto la posta.
La situazione di partenza è $A_{-1}B_{-2}$, cioè ad A manca una partita e a B due. Immaginiamo di fare una partita. Vi è una possibilità che A vinca e quindi ritiri la posta a e vi è una possibilità che B vinca e che perciò si pervenga alla situazione $A_{-1}B_{-1}$, dove A e B hanno le stesse possibilità di vincere. In tale situazione A si considera in possesso di a/2. Dunque il giocatore A dice: ho una possibilità di vincere a e una possibilità di vincere a/2. Per la proposizione 1, la speranza matematica di A è (a+a/2) / 2 = ¾ a
Problema 2. Al giocatore A manchi una partita per vincere il gioco e al suo avversario B ne manchino 3. In che modo si può dividere equamente la posta?
Siamo nella situazione $A_{-1}B_{-3}$. Sia a la posta. Immaginiamo di fare una partita. Vi è una possibilità che A vinca e una che perda. Nel primo caso ritira la posta a, nel secondo ci si riconduce alla situazione $A_{-1}B_{-2}$, precedente. Quindi A ha una speranza matematica data da (a+3/4a)/2 = 7/8a.
Ragionando alla stessa maniera si ottiene che in $A_{-1}B_{-4}$ la speranza matematica di A è 15/16 a.
In generale, nel caso $A_{-1}B_{-n}$, la speranza matematica di A è $\frac{2^n - 1}{2^n} a$. Naturalmente si passa dalla speranza matematica alla probabilità ponendo a = 1.
La formula ora trovata risolve il problema [-1; -3] assegnato in classe. Naturalmente Pascal va avanti e si pone per esempio, il seguente problema:
Problema 3:
Al giocatore A manchino 2 partite per vincere il gioco e al suo avversario B ne manchino 3.

Da $A_{-2}B_{-3}$ si passa ad $A_{-1}B_{-3}$ (speranza matematica di A = 7/8a) oppure ad $A_{-2}B_{-2}$: la s.m. di $A_{-2}B_{-2}$ è ½ a (visto che sono entrambi nelle stesse condizioni!) e quindi la s.m. di $A_{-2}B_{-3}$ è (7/8+1/2)/2 a = 11/16 a.

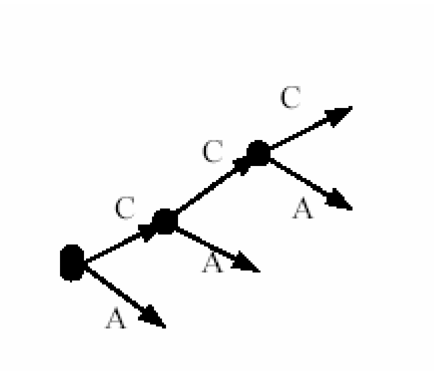
Situazioni	s.m. di A
$A_{-1}B_{-2}$	3/4a
$A_{-1}B_{-3}$	7/8a
$A_{-1}B_{-4}$	15/16a
$A_{-1}B_{-n}$	$\frac{2^n - 1}{2^n} a$
$A_{-2}B_{-3}$	11/16 a
$A_{-2}B_{-4}$	13/16 a
$A_{-2}B_{-5}$	[s.m.($A_{-1}B_{-5}$)+s.m.($A_{-2}B_{-4}$)]/2 = 57/64
$A_{-2}B_{-6}$	[s.m.($A_{-1}B_{-6}$)+s.m.($A_{-2}B_{-5}$)]/2 = 120/128=15/16
$A_{-3}B_{-3}$	1/2
…..	

In questo modo è possibile risolvere in teoria, per ricorsione, qualunque problema di suddivisione della posta in gioco. È chiaro, però, che una risoluzione di questo tipo può essere particolarmente dispendiosa in termini computazionali quando ad entrambi i giocatori manchino molti punti per vincere.

La strategia risolutiva di Fermat

Una risoluzione generale è data anche da Fermat; meno intuitiva, anche per la "finzione matematica" che usa, ma più efficace dal punto di vista computazionale. Agli studenti sarà mostrata solo dopo aver introdotto il calcolo combinatorio e la legge binomiale per la determinazione della probabilità di *k* successi in una serie di *n* prove di eventi indipendenti.

Quello che si può far vedere agli studenti è la risoluzione classica con il diagramma ad albero, che, comunque, è molto simile al modo di ragionare di Fermat:



A= vince Ariele
C = vince Calibrano
Punteggio iniziale: 5 a 3 per Ariele (al meglio delle 6)
P(C) = 1/8
P(A) = 1 – 1/8 = 7/8
Quindi 21 euro ad A e 3 a C.

Si può anche proporre la seguente tabella di confronto sulla soluzione di Pascal al problema e su quella appena utilizzata.

Soluzione "alla Pascal"	Soluzione in termini moderni
Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia 12+6= 18. Sul 5 a 5 si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5 devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariele, ad Ariele vanno 12+6+3=21 denari, mentre a Calibano ne spettano 24-21=3.	La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi: E_1 ; E_2E_1 ; $E_2E_2E_1$ Ove: E_1 è l'evento "Ariele guadagna un punto"; E_2 è l'evento "Calibano guadagna un punto". Poiché E_1 ed E_2 hanno probabilità ½ , per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che E_1, E_2E_1, $E_2E_2E_1$ hanno, rispettivamente, probabilità uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale per eventi incompatibili, 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8. Un'equa ripartizione dei 24 danari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 danari ad Ariele e 3 a Calibano.

Qui di seguito viene riportata per completezza anche l'approccio di Fermat.

Per calcolare la speranza di vincita di A si calcola il numero massimo di partite che possono essere giocate affinché A vinca (o perda) il gioco.

Nel caso (-5, -6) questo numero è 10. In generale questo numero è dato da a+b-1.

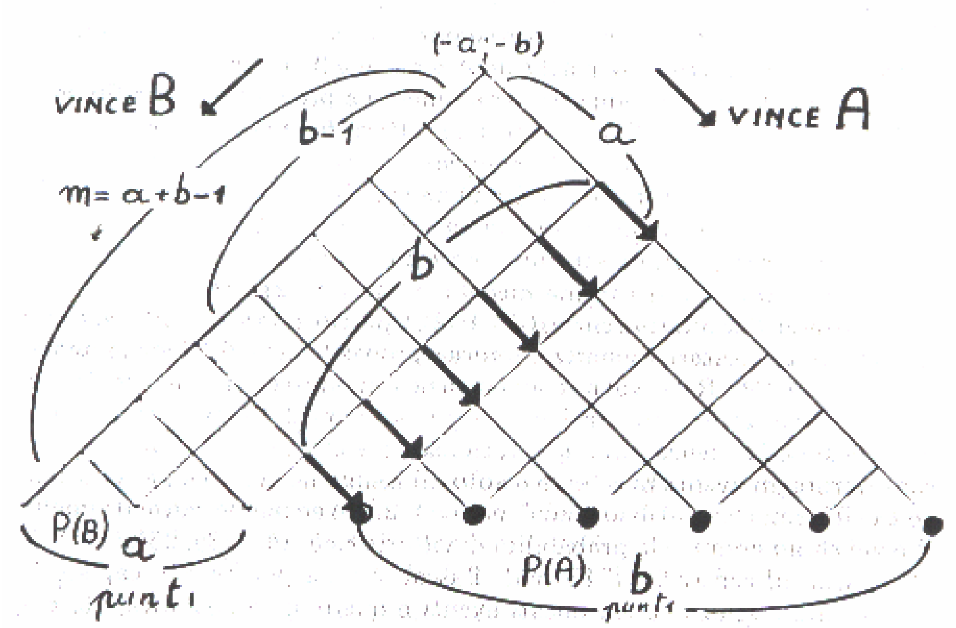
Si calcola poi la probabilità che A vinca almeno un numero *a* di queste partite (così B ne vince al più b-1).
Nel caso (-5 , -6) si calcola la probabilità che A vinca almeno 5 partite all'interno del numero massimo (10) che resta in teoria da giocare

Si ha che p(A) = $\sum_{i=a}^{m}\binom{m}{i}p^{i}q^{m-i}$, che, per p=q=1/2, *m* = 10, *a* = 5 diventa:

$\binom{10}{5}(1/2)^1\ (1/2)^5 + \binom{10}{6}(1/2)^2(1/2)^4 + \binom{10}{7}(1/2)^3(1/2)^3 + \ldots.. \binom{10}{10}(1/2)^5(1/2)^0.$

Rimane da dimostrare che questo modo di calcolo con "finzione matematica" è equivalente al calcolo della probabilità di A di ottenere *a* vittorie (per la prima volta) all'iesima partita con *i* che va da *a* a *m*.
La giustificazione è data, per esempio in un articolo di Mario Barra con l'aiuto del seguente diagramma ad albero:

Sul reticolo, ove a= 3 e b = 6, si parte da O e si percorre un trattino a destra o a sinistra,



rispettivamente con probabilità *p* e *q*. I due calcoli anzidetti corrispondono alla probabilità di passare per le b frecce indicate (quella senza finzione) e (quella con finzione) alla probabilità di arrivare nei b punti finali a destra del grafico (in entrambi i casi si tratta di b eventi disgiunti). Poiché si arriva a questi ultimi punti se e solo se si passa per le frecce la probabilità nei due casi deve essere la stessa.

La risoluzione di un "anonimo" del 1400 senza il ricorso alla probabilità.

"Due huomini giuochano a schacchi e fano d'uno ducato a 3 giuochi.. ." cioè: "due giocatori di scacchi stabiliscono che chi otterrà per primo 3 vittorie vincerà 1 ducato; sono però costretti ad interrompere il gioco quando uno di essi ha ottenuto 2 vittorie e l'altro nessuna".

Come dividere la posta in gioco, cioè il ducato, fra i due giocatori A e B?
Indichiamo i dati del problema con (3:2;0), oppure con (-1;-3).
Per risolvere il problema l'Anonimo ipotizza delle ulteriori partite, dopo l'interruzione del gioco, e

traduce algebricamente le seguenti considerazioni (ridondanti):.

(a) se il gioco si interrompe quando A e B hanno lo stesso punteggio, questi hanno diritto alla stessa parte (1/2 di ducato) della posta in gioco;

(b) se il gioco si interrompe prima della fine, quando A ha diritto ad una certa parte y del ducato, allora a B spetta la parte rimanente (complementare); ciò verrà espresso dicendo che ad un certo punto del gioco le quote di A e B sono y e 1-y;

(c) gli importi, nel caso di vincita o di perdita, debbono coincidere; (almeno nel caso in cui ad un giocatore manchi una sola partita); in altri termini, il valore di una partita deve essere lo stesso per A e per B.

(d) se A, a quota y, vince l'intero gioco con una partita, aggiunge ad y il complementare 1-y. Se invece è B, a quota 1-y, a vincere questa partita allora, per c), lo stesso importo, 1-y, va aggiunto alla quota di B, che quindi raddoppia.

Siano ora y e 1-y le quote che A e B hanno accumulato rispettivamente con 2 e con zero punti. L'autore ipotizza che B, vincendo 2 nuove partite, si porti alla pari con A, in modo da poter determinare l'incognita y uguagliando le quote dì A e B. Il ragionamento più o meno è il seguente: se A vince una ulteriore ipotetica partita, vince l'intero ducato cioè ad y, aggiunge 1 – y. In caso contrario, questo ultimo importo, si aggiunge alla quota di B, che quindi raddoppia da 1 – y a 2 - 2y, portando così la quota di A al complementare, cioè a: 1-(2-2y).

Con il nuovo punteggio: 2 punti per A e 1 per B, si ripete il ragionamento:

se A vince, aggiunge il complementare 2-2y, che, in caso contrario, fa raddoppiare la quota di B da 2-2y a 4 - 4y, portando così quella di A a 1-(4-4y). Poiché ora si trovano entrambi con 2 giochi vinti, si possono uguagliare questi due ultimi importi ottenendo: 4 - 4y=1-(4 - 4y) da cui 8y= 7, cioè y=7/8 che è la quota che spetta ad A nella situazione (-1;-3).

Il difetto di questa soluzione è quello di non indicare alcun procedimento di carattere generale; il suo pregio è quello di avere fornito un prodotto uguale a quello di Pascal e Fermat più di duecento anni prima che una tale soluzione fosse fornita.