

DOMINGO PAOLA

Indici sintetici statistici per variabili quantitative: le medie

Nelle distribuzioni di variabili quantitative (per noi tabelle nelle quali compaiono nella prima colonna misure di grandezze e nella seconda colonna la frequenza o numero di volte con cui tali misure si presentano) ha senso utilizzare indici sintetici medi che servono a dare un'idea di "intorno a quale valore medio" la distribuzione si addensa.

Possiamo pensare ai valori medi come a output di funzioni che hanno in ingresso i vari dati (le misure della grandezza presa in considerazione). L'output è proprio il valore medio



Oppure, con altra notazione, $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \text{valor medio}$, con f legge da determinare.

Il problema diventa quello di determinare una f sensata. Dovremmo farci guidare dall'idea generale che un valor medio adeguato e sensato dovrà essere tale che sostituendo quel valore, diciamo m , a ciascuno dei valori $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ rimanga invariato un aspetto che interessa del problema.

Supponiamo, per esempio, che ci interessi studiare il reddito di un insieme di persone. Si può iniziare a fare una rilevazione dei redditi individuali, ottenendo una serie di dati che indichiamo con $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ immaginando di aver considerato n persone. Che cosa sarà il reddito medio? Sarà quel reddito m che sostituito a ciascuno dei valori $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ lascia invariata la loro somma; ossia m deve essere tale che $n * m = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$. In tal caso $m = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n}{n}$, ossia la media aritmetica dei dati raccolti.

Ma che cosa accadrebbe se noi considerassimo un problema nel quale, invece della somma di più dati, volessimo mantenere invariato il loro prodotto P ? Quale dovrebbe essere il loro valore medio m ?

L'equazione in tal caso è $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n = m^n$, ossia $m = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n}$, ossia quella che viene detta *media geometrica*.

Quindi, in generale, il valor medio di un insieme di dati dipende dal problema considerato. Voi avete sempre considerato, fino a poco prima di Pasqua, problemi nei quali aveva senso considerare come valor medio la media aritmetica. Con l'ultima esercitazione che vi ho proposto, vi sarete resi conto che non sempre la media aritmetica è quella che ha senso e fornisce la risposta adeguata a un problema.

Per esempio, vediamo una risoluzione dei diversi problemi che sono stati assegnati:

a) Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono all'aereo di viaggiare alla velocità di crociera di 932 Km/h; al ritorno la velocità è, invece, di 856 Km/h.

Qual è la velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

b) Una agenzia che effettua indagini di mercato ha rilevato per una rete televisiva i seguenti dati medi giornalieri di ascolto, nel periodo invernale e nella fascia oraria dalle 20 alle 21:

Giorno della settimana	Lunedì	Martedì	Mercoledì	Giovedì	Venerdì	Sabato	Domenica
Numero medio spettatori (in migliaia)	1.200	1.800	2.000	1.600	1.200	800	900

Una agenzia di pubblicità in quale giorno potrebbe consigliare a un proprio cliente di inserire uno spot pubblicitario di un prodotto per la neve, volendo usare la fascia oraria 20 – 21?

c) In un ciclo di lavorazione tre apparecchiature lavorano in serie: la prima macchina ha un rendimento del 90% , la seconda dell'80% , la terza del 30%. Qual è il rendimento medio complessivo?

d) Uno studente nella pagella del primo quadrimestre ha riportato i seguenti voti:

Italiano	7
Storia	8
Geografia	7
Lingua inglese	6
Scienze	5
Matematica	4
Educazione Fisica	9

Il padre gli ha promesso un regalo se la media dei suoi voti fosse stata superiore al 7. Otterrà lo studente il regalo?

e) Uno studente universitario iscritto al corso di laurea in Matematica ha superato durante il primo anno i seguenti esami¹ riportando le seguenti votazioni:

Esame	Punteggio in trentesimi	Crediti
Laboratorio di Matematica	25	9
Analisi Matematica	24	12
Geometria	21	6
Algebra	27	6
Calcolo delle probabilità	23	9
Fisica generale	24	9
Lingua inglese	30	3
Fondamenti di Informatica	28	3
Abilità relazionali	30	3

Lo studente accede ad una borsa di studio se ha conseguito una media superiore a 27/30. Otterrà il nostro studente la borsa di studio?

f) In una prova multidisciplinare di Storia, Inglese, Matematica, Diritto, gli studenti vengono valutati con un punteggio da 0 a 15 per ogni materia. Il voto finale è dato dalla media dei quattro punteggi parziali. La prova non si considera superata se uno studente prende 0 punti in una delle materie. Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?

Esercizio 1

Partiamo dalla considerazione che la velocità media deve essere tale che, se l'aereo si muovesse su tutto il tragitto, con quella velocità percorrerebbe lo spazio $2\Delta S$ (andata e ritorno) nello stesso tempo che impiega per percorrere $2\Delta S$ muovendosi all'andata con velocità V_1 e al ritorno con velocità V_2 . Ciò porta anche a capire che un valor medio di velocità deve essere compreso tra V_1 e V_2 ed è tale che $V_m = 2\Delta S / \Delta T_{tot}$ dove ΔT_{tot} è il tempo totale trascorso.

Primo metodo

$$\Delta T_1 = \Delta S / V_1 \quad \Delta T_2 = \Delta S / V_2$$

$$\Delta S + \Delta S = 2\Delta S \quad \Delta T_1 + \Delta T_2 = \Delta T_{tot}$$

$V_m = 2\Delta S / \Delta T_{tot} = 2\Delta S / (\Delta S / V_1 + \Delta S / V_2)$ da cui si ottiene $V_m = 2 / (1/V_1 + 1/V_2)$ e quindi $V_m = 2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$, media armonica

Secondo metodo

Si calcola prima la media T_m dei due tempi (ossia il tempo che impiegherebbe l'aereo a percorrere o l'andata o il ritorno se si muovesse con velocità V_m) $T_m = (S/V_1 + S/V_2)/2$ Quindi per avere la velocità media divide lo spazio S (per esempio l'andata) per il tempo medio e ottiene $V_m = S / ((S/V_1 + S/V_2)/2)$ da cui $V_m = 1 / ((1/V_1 + 1/V_2)/2) = 2V_1V_2 / (V_1 + V_2)$, media armonica.

Si avrà pertanto, ammettendo uguali i Km percorsi nell'andata e nel ritorno:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

Come vedete, il linguaggio dell'algebra ha consentito di dimostrare l'equivalenza dei due procedimenti e la correttezza della media armonica rispetto a quella aritmetica.

Provate ora a risolvere il seguente problema:

una macchina si muove per 1 ora a 50 km/h e per un'altra ora a 100Km/h; qual è la sua velocità media? In questo caso lo spazio percorso nei due tragitti cambia, non è lo stesso; invece il tempo impiegato a effettuare i due tragitti è lo stesso. Verificate che, in questo caso, ha senso effettuare la media aritmetica delle velocità, ossia che la velocità media è $(v_1+v_2)/2$.

Esercizio 2

In questo caso il valore sintetico che risolve il problema non è una media, ma la moda, ossia il giorno della settimana con la massima frequenza di ascolto (mercoledì).

Esercizio 3.

Vi invito a cogliere il senso del problema. Lavoriamo su base 100. La prima macchina quanto rende? 90%, quindi su 100 pezzi teorici ne produce 90 (possiamo immaginare, se vi riesce più semplice che di 100 pezzi prodotti, 10 siano difettosi e inutilizzabili). Le macchine lavorano in serie, quindi alla seconda macchina ne arrivano solo 90 dei 100 teorici. Se si danno 90 pezzi alla seconda macchina quanti pezzi si ottengono? L'80% di 90, ossia 72 pezzi. Se si immettono 72 pezzi nella terza ed ultima macchina quanti pezzi si hanno? Il 30% di 72, quindi 21,6. Dunque da 100 pezzi teorici si ottengono in realtà, con l'intervento in serie delle 3 macchine, 21,6 pezzi. Il problema è allora di trovare tre macchine, tutte con la stessa resa, che diano alla fine dei tre passaggi 21,6 pezzi. Come fare?

¹ Secondo il nuovo ordinamento universitario ad ogni esame è associato un numero di crediti: ciascun credito corrisponde a circa 25 ore di lezione-tutoraggio-impegno individuale dello studente. Ogni anno lo studente è tenuto ad accumulare 60 crediti.

Risolvendo l'equazione $x^3 = 0,216$ (con la calcolatrice: SOLVE($X^3=0,216,X$)) otteniamo $x = 0,60$, ossia il 60%. Ciò vuol dire che, se sostituissimo alle tre macchine A, B, C tre macchine uguali tutte con rendimento del 60%, otterremmo lo stesso rendimento finale, ossia 21,6 pezzi prodotti sui 100 in teoria producibili. La media, in tal caso, è quella geometrica (quella aritmetica, invece, darebbe il 66,7% circa).

Esercizio 4

Poiché in questo caso va rispettata la somma dei punteggi ottenuti, la sintesi corretta è la media aritmetica. E' da far notare un errore che potreste commettere: calcolare le medie parziali dell'area umanistica (Italiano, Storia, Geografia, Lingua Inglese), scientifica (Scienze, Matematica) e di Educazione Fisica e poi fare la media semplice delle medie.

Riflettere su ciò può essere efficace perché dà l'opportunità di studiare un esempio di operazione non associativa. Infatti nel fare una media di medie parziali occorre tener conto di quante sono le unità statistiche che ciascuna media parziale sintetizza (in altri termini, le discipline umanistiche, essendo di più, devono pesare di più). Naturalmente qui ci sono tutte le riserve sul fatto di considerare i voti scolastici come grandezze quantitative (altrimenti non avrebbe nemmeno senso parlare di media). Nel contesto del problema la media aritmetica è la risposta corretta; si può però criticare il testo stesso e la pretesa di considerare i voti come misure. Di questo abbiamo già discusso in classe.

Esercizio 5.

Non è possibile effettuare una media aritmetica semplice che non tenga conto dei crediti attribuiti a ogni esame. Se un esame vale 10 crediti e un altro 1, si può dire che il voto ottenuto nel primo pesa quanto il voto ottenuto nel secondo? Ovviamente no. Per avere una valutazione corretta del voto medio è necessario fare una media aritmetica pesata, ossia

$$m = \frac{25 \cdot 9 + 24 \cdot 12 + 21 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 23 \cdot 9 + 24 \cdot 9 + 30 \cdot 3 + 28 \cdot 3 + 30 \cdot 3}{9 + 12 + 6 + 6 + 9 + 9 + 3 + 3 + 3} = \frac{25 \cdot 9 + 24 \cdot 21 + 21 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 23 \cdot 9 + 30 \cdot 6 + 28 \cdot 3}{60} = 24.8 \text{ Quindi minore di } 27.$$

Esercizio 6.

Quale dei valori medi utilizzati nei casi precedenti potrebbe andar bene in questo esempio?

Ciò che si vuole è che, quando si presenta uno zero, la sintesi si annulli. Dunque occorre utilizzare un valore medio fondato sul prodotto. E' forse la media geometrica la soluzione del problema posto? Essa in effetti è l'unica media che, assumendo in tal caso il valore 0, consente di escludere uno studente che abbia riportato un punteggio nullo in almeno una delle quattro materie. Naturalmente sono possibili altre soluzioni, come quella di prendere la media aritmetica, ma di porre una condizione, indipendente dalla media ottenuta, che se almeno una votazione è 0, il candidato non passa l'esame.

Riassumendo, ecco le medie che abbiamo preso finora in considerazione:

Media aritmetica degli n valori x_1, x_2, \dots, x_p , con rispettive frequenze f_1, f_2, \dots, f_p :

$$m = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_p \cdot f_p}{f_1 + f_2 + \dots + f_p}$$

(tale media si dice anche media pesata, perché ciascun dato viene considerato con un peso che dipende dalla frequenza con cui il dato compare; se tutti i dati compaiono solo una volta, si parla anche di media aritmetica semplice... ma queste precisazioni terminologiche sono "quisquiglie", direbbe Totò). Notate che la somma delle frequenze dà il numero totale dei dati, ossia n .

Media geometrica degli n valori x_1, x_2, \dots, x_p , con rispettive frequenze f_1, f_2, \dots, f_p :

$$m = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_p^{f_p}} \text{ oppure } m = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Media armonica degli n dati x_1, x_2, \dots, x_n

$$m = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Un'operazione di media serve per ottenere o semplificare la risoluzione di un certo problema, o per rappresentare sinteticamente un insieme di dati. Qualunque valore medio deve però essere compreso tra il valore minimo e il valore massimo dell'insieme di dati a disposizione. A parte questa proprietà che vale per ogni media, ciascuna media ha altre proprietà particolari che la caratterizzano. Per esempio, la media aritmetica è tale che la somma algebrica delle differenze tra i vari valori e la media aritmetica è nulla (**come lo dimostrereste?**).

Vi sono anche relazioni che legano fra di loro le varie medie; per esempio, è possibile dimostrare che

$$\text{media armonica} \leq \text{media geometrica} \leq \text{media aritmetica}$$

Provate a risolvere il seguente "problema dei campi e della piena del Nilo".

Due contadini egiziani, Sesostris e Tutmosis, possiedono alcune unità quadratiche di terreno tra loro confinanti che devono essere ripermistrate dopo ogni piena del Nilo; x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_p sono i lati dei quadrati in possesso, rispettivamente di Sesostris e Tutmosis. I due contadini decidono, al momento di ripermistrare il terreno, di fare appezzamenti quadrati aventi tutti la stessa area; naturalmente l'area totale degli appezzamenti in loro possesso non deve cambiare. Quale deve essere l'estensione della superficie di ogni nuova particella

quadrata dei due contadini e quale deve essere il lato m di ogni nuovo quadratino di Sesostri, supponendo che ognuno voglia anche mantenere fisso il numero di unità quadrate in suo possesso?

Allegati a questa "lezione": gli interventi "pasquali" degli studenti di prima D (in rosso compaiono i miei commenti che segnalano incomprensioni, affermazioni scorrette o imprecise e che, talvolta, spiegano il perché degli errori). Riporto solo interventi sistematici e non quelli di semplice dichiarazione di accordo con proposte di risoluzione (per esempio gli interventi di Marco Lentini e alcuni di Luigi Mandraccio)

Francesco Canuti

In base al lavoro svolto questa mattina in classe ho fatto una sintesi con mie considerazioni al fondo della situazione per quanto riguarda il primo problema che dice :

Un aereo viaggia da Roma a New York. All'andata le correnti favorevoli permettono di viaggiare alla velocità di crociera di 932km/h; al ritorno la velocità è invece , 856Km/h.

Qual è la sua velocità media dell'aereo nell'intero percorso andata-ritorno?

Subito sono passato a fare la solita media matematica insegnataci alle medie vale a dire somma delle velocità diviso 2 e l' ho applicata senza pensarci molto e il risultato sembrava verosimile ma poi il prof ci ha fatto notare che prendendo i due casi limite cioè che la velocità dell'andata fosse 1000Km/h e quella del ritorno 0Km/h la media non sarebbe venuta come ci aspettavamo.

Poi abbiamo pensato alla regola di fisica per calcolarci la velocità che è ΔS fratto ΔT ma noi non conosciamo il tempo e allora ce lo siamo calcolati applicando $\Delta S / \Delta V$ e ci siamo trovati il tempo poi abbiamo approssimativamente calcolati la lunghezza del percorso e lo abbiamo diviso per la prima velocità e poi lo stesso con la seconda velocità trovandoci così i due tempi che poi sommati assieme ci danno il tempo totale del viaggio che poi lo abbiamo diviso per il percorso sia dell'andata che del ritorno trovandoci così la velocità media dell'aereo.

CONSIDERAZIONI PERSONALI

Spero che per chi non avesse capito questo sia servito Osservando la prima media cioè quella sbagliata e la seconda il risultato non si discostava di molto ma poi abbiamo capito che la prima media andava bene finché le due velocità erano più o meno uguali ma quando i numeri erano molto diversi i risultati non venivano ciò che noi ci aspettavamo come nel primo caso .

Esempio:

$$V1=855\text{Km/h } V2=20\text{Km/h}$$

$$855\text{Km/h} + 20\text{Km/h} = 875\text{Km/h}$$

$$875\text{Km/h} \div 2 = 437,50\text{Km/h}$$

non è la media che ci aspettavamo per cui noi questa media è applicabile solo nei casi come nel testo (No, in realtà la media aritmetica **non è applicabile** in problemi in cui si ha un tragitto suddiviso in spazi uguali percorsi con differente velocità e quindi non è applicabile nel problema proposto, anche se l'errore commesso è piccolo, essendo le due velocità molto vicine. La media aritmetica sarebbe invece applicabile se il tragitto è suddiviso i parti percorse con differenti velocità e in tempi uguali; ovviamente, in tal caso, gli spazi percorsi sono diversi).

Andrea Martinelli

Qui sotto trovate riflessioni sui problemi di ieri.

- A. (sto cercando una dimostrazione che unisca le due formule date ieri).
- B. Io direi che uno spot pubblicitario dovrebbe essere collocato nel giorno di maggior ascolto, in modo da ampliare il numero delle persone che ricevono il messaggio, e quindi, nel nostro caso, di Giovedì (Si tratta del mercoledì, il giorno di maggior frequenza degli ascolti, ossia la moda).
- C. Da una prima occhiata direi che ci sono tre macchine che lavorano molto ed una che lavora poco. Quindi ci si potrebbe aspettare una media aritmetica del rendimento delle 3 macchine del 66%; un valore non troppo alto ma neanche troppo basso. Poi ho pensato ad un altro sistema: consideriamo il rendimento complessivo delle macchine in riferimento al rendimento di totale massimo, considerando le tre macchine come una sola. Si ha così un valore pari a 200/300; con una proporzione (200:300=x:100) si ottiene il valore in percentuale. Esso corrisponde al 66%.(In questo caso la media aritmetica è scorretta... vedere discussione nei successivi messaggi)
Voglio sottolineare che non sono affatto sicuro al 100% di questi sistemi di calcolo.
- D. La media aritmetica dei voti dello studente è di 6.57. Volendo arrotondare si potrebbe affermare che il ragazzo ha raggiunto la media del 7. Tuttavia è corretto fare la media fra materie diverse, che hanno difficoltà diverse e che richiedono abilità differenti? Ragionando in questo modo forse il sette non è quanto "vale" realmente lo studente: infatti nonostante vada molto bene in Ed. Fisica ed in Storia ha serie difficoltà in matematica e scienze. Quindi, secondo me, non è corretto affermare che la sua preparazione globale sia da 7. In realtà i voti non sono vere e proprie grandezze quantitative (per esempio la differenza che c'è fra 1 e 2 non è la stessa di quella che c'è fra 5 e 6: un insegnante non ha in genere difficoltà ad attribuire un 2 a un compito da 1, mentre ha più difficoltà a passare dal 5 al 6 o dal 9 al 10). Tuttavia, in questo contesto (e spesso in quello scolastico, ahimé) la pratica di effettuare la media dei voti è accettata. E la media è proprio quella aritmetica, visto che si tratta di determinare qual è quel voto che, sostituito a ciascuna delle differenti votazioni nelle differenti materie dà la stessa somma totale. Tale voto è proprio la media aritmetica dei voti, cioè 6.57. Quindi lo studente non otterrà il regalo. Si potrebbe riflettere se è normale che uno studente abbia voti così buoni nelle materie umanistiche e così scarsi in quelle scientifiche; se poi l'insegnante di scienze e di matematica è lo stesso, come

avviene nella scuola media, si potrebbe dubitare del giudizio dell'insegnante, oppure ci si potrebbe chiedere se ha senso la richiesta del padre... ma si tratta di tutta un'altra storia. Attenzione a un errore comune: quello di fare le medie parziali delle materie umanistiche, poi quella delle materie scientifiche e poi fare la media delle medie. Bisogna tenere conto del peso differente tra materie umanistiche, che sono in maggior numero e materie scientifiche, che sono solo 2.

- E. Se la "cosa" funziona come credo di aver capito, il ragazzo non otterrà la borsa di studio. La sua media infatti è tra 25/26 trentesimi. Tuttavia se crediti interagiscono sui punteggi (ma come ???) la media potrebbe anche mutare. Non è possibile effettuare una media aritmetica semplice che non tenga conto dei crediti attribuiti a ogni esame. Se un esame vale 10 crediti e un altro 1, si può dire che il voto ottenuto nel primo pesa quanto il voto ottenuto nel secondo? Ovviamente no. Per avere una valutazione corretta del voto medio è necessario fare una media aritmetica pesata, ossia

$$(25*9+24*12+21*6+27*6+23*9+24*9+30*3+28*3+30*3)/(9+12+6+6+9+9+3+3+3)$$

Si tratta poi di vedere se il numero che si ottiene è o non è maggiore di 27.

- F. Non credo di aver campito la richiesta di questo problema. Me la potrebbe riformulare in altre parole???

Quale dei valori medi utilizzati nei casi precedenti potrebbe andar bene in questo esempio?

Ciò che si vuole è che, quando si presenta uno zero, la sintesi si annulli. Dunque occorre utilizzare un valore medio fondato sul prodotto. E' forse la media geometrica la soluzione del problema posto? Essa in effetti è l'unica media che, assumendo in tal caso il valore 0, consente di escludere uno studente che abbia riportato un punteggio nullo in almeno una delle quattro materie. Naturalmente ci sono anche altre possibili soluzioni. Per esempio fare una media aritmetica, precisando, però, che se è presente almeno uno zero in una delle votazioni, allora il candidato non supera l'esame qualunque sia la media. Provate a calcolare la media aritmetica e quella geometrica con i valori dati. Quale è la loro differenza? Voi accettereste di esser valutati con una media geometrica o preferite quella aritmetica? Perché?

Luigi Mandraccio

Risoluzione problema A:

La classica formula per calcolare la media aritmetica è:

"somma di tutti i valori / il numero dei valori sommati"

E' facilmente comprensibile che questo concetto non è applicabile, poiché i dati (quelli del nostro caso come altri) non si prestano ad una simile operazione.

Con la media matematica (aritmetica; si tratta sempre di medie calcolate con formule e operazioni matematiche. Questa si chiama aritmetica) il risultato sarebbe:

$$(932 + 856)/2 = 894$$

Proviamo invece a seguire una diversa linea, come la seguente:

il primo dato da trovare è la distanza tra New York e Roma, ma non è necessario trovare un valore preciso ma bensì basta prendere un valore (fittizio) come 5000 Km (che sarà quello da noi preso in considerazione).

E' poi importante ricordare la formula (del moto rettilineo uniforme) $S = V * T$ che si trasforma nella formula indiretta $T = S / V$; quindi tramite questa formula si trova il tempo trascorso per i viaggi:

- andata: 5,37 ore
- ritorno: 5,84 ore

Facciamo ora la somma dei tempi = 11,21 e poi 2 volte la distanza (fittizia) = 10000 Km.

Quindi si ha $10000 / 11,21 = 892$ Km/h che è la media reale tra le due velocità di crociera.

Risoluzione problema B:

In questo problema non vedo applicabile l'operazione di media ma basta usare solamente un po' di furbizia: il giorno consigliabile per trasmettere lo spot pubblicitario è sicuramente il giovedì (mercoledì) perché la quantità di ascolti, come dimostrano i dati, in quel giorno è più alta che negli altri. (Si tratta della moda, il dato più frequente)

Risoluzione problema C:

Ricordo ora la definizione di rendimento (quella che interessa a noi): *"rapporto tra l'energia ottenuta in forma utile da una macchina e quella spesa: rendimento di un motore"*.

In questo caso è a mio parere possibile utilizzare il calcolo tramite la media matematica, poiché questa volta non si tratta di valori rapportabili con tempo e spazio (ad esempio) ma al massimo rapportabile con il combustibile consumato.

Ne consegue il calcolo seguente: $(90+80+30)/3 = 67\%$ (Andrea Martinelli ha arrotondato per difetto) (arrotondato per eccesso o 66 arrotondato per difetto) di rendimento in media.

Vi è poi un secondo modo, proposto da Andrea, che io trovo buono e che è il seguente: si considerano tutte le 3 perc. insieme e si rapportano tra loro in una equazione, la seguente:

$$200:300=x:100$$

Svolgendo questa equazione si arriva ad avere come valore della x il numero 67 (arrotondato per eccesso o 66 arrotondato per difetto). Come risulterà dalla successiva discussione, questa soluzione è scorretta.

Risoluzione problema D:

In questo caso la media aritmetica è proprio da usare poiché è l'unico sistema per risolvere il problema; facendo la media ne risulta 6,57. Ora sta al padre decidere se approssimare per difetto (ed allora il risultato sarebbe 6) oppure per eccesso (ed allora il risultato sarebbe 7); a seconda della scelta del padre tra questi 2 metodi il ragazzo avrà o no il regalo.

Risoluzione problema E:

Facendo la media tra i punteggi di questo studente si ottiene 25,78/30 e quindi per questo dato non gli è possibile accedervi perché la soglia è per una media superiore ai 27/30, anche se per quanto riguarda i crediti sarebbe stato a posto perché la somma di quelli riportati fa proprio 60 (come indicato nel testo). **Il fatto è che si deve fare, come ho indicato prima, una media pesata e non una media semplice, in quanto alcuni esami "pesano" più degli altri (in base al numero di crediti che consentono di ottenere).**

Matteo Peluffo

A Penso di aver trovato una dimostrazione per affermare che i due metodi dell'altro ieri sono equivalenti.

$$1) \Delta T_1 = \Delta S_1 / V_2 \quad \Delta T_2 = \Delta S_2 / \Delta V_2$$

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \Delta S_{tot} \quad \Delta T_1 + \Delta T_2 = \Delta T_{tot}$$

$$V_m = \Delta S_{tot} / \Delta T_{tot}$$

$$2) \Delta T_1 = \Delta S / V_1 \quad \Delta T_2 = \Delta S / V_2$$

$$\Delta T_{tot} = (\Delta S / V_1) + (\Delta S / V_2)$$

$$\Delta S * (1/V_1 + 1/V_2) = \Delta T_{tot}$$

$$V_m = \Delta S_{tot} / \Delta T_{tot}$$

Bisogna fare solo attenzione che $\Delta S_{tot} = 2 \Delta S$

B Per quanto riguarda il problema B, dai dati si vede chiaramente che il mercoledì è il giorno di maggiore ascolto. I dati in tabella sono però anch'essi delle medie di altri dati riferiti a dei periodi di tempo. Quindi è possibile che in altri periodi dell'anno non sia il mercoledì il giorno con maggiore ascolto. Comunque con i dati in tabella io direi che il giorno con più ascolto sia il mercoledì, anche se mi sembra fin troppo facile.

C Le due soluzioni del problema da parte di Andrea Martinelli sono la stessa cosa in quanto si ottiene in entrambi la frazione 200/3. Il secondo procedimento è solo più lungo. Ho dei dubbi se i due procedimenti esprimano veramente la media matematica perché così facendo si sopperisce al poco lavoro svolto dalla terza macchina. Secondo me sarebbe più opportuno fare così:

$$(90 + 80) / 2 = 85\% \text{ media delle prime due macchine}$$

$$(85 + 30) / 3 = 38,3\% \text{ rendimento complessivo medio delle tre macchine}$$

Questo sistema mi pare più corretto di quelli proposti da Martinelli ma non ne sono sicuro al 100%.

Come già detto la risoluzione è errata. Non è possibile qui utilizzare la media aritmetica (vedere discussione sui prossimi messaggi).

D Fare una media del rendimento scolastico di uno studente non ha senso, comunque se la si vuole fare, l'alunno potrà avere o meno il regalo a seconda del criterio di arrotondamento della media 6,57. Con un po' di buonsenso forse, essendo il rendimento del I quadrimestre sarebbe opportuno arrotondare per difetto; anche si arrotondasse per eccesso il regalo non lo otterrebbe perché raggiungerebbe il 7 ma non lo supererebbe: nel testo è scritto "media...superiore a 7".

E Vorrei sapere anch'io in che modo influiscono i crediti nella media di fine anno.

F La media aritmetica secondo me non è adeguata perché non rispecchia la abilità dello studente che potrebbe avere difficoltà in alcune delle quattro materie proposte. Potrebbe essere più opportuno valutare le prove delle quattro materie singolarmente, considerandole passate se si ottiene un punteggio maggiore a 8. Le materie con un punteggio inferiore a questo, non devono influire sul punteggio delle altre prove. **Purtroppo il testo specifica che il voto finale è la media dei voti ottenuti nelle singole discipline. La proposta di Matteo è ragionevole, ma sposta il problema senza risolverlo.**

Andrea Martinelli

direi che per quanto riguarda il problema dei giorni in cui fare lo spot, il più adeguato è il mercoledì. Io avevo scritto che era giovedì per distrazione. Come avevo precedentemente scritto il giorno deve essere quello con la media d'ascolto più alta.

Per ciò che concerne il problema dei tre arnesi che lavorano in serie vi mando alcune mie riflessioni su questo problema.

La cosa che mi rendeva molto dubbioso sulla prima procedura (quella che ho scritto nella mia ultima e-mail) è quel "in serie". Lì per lì non capivo esattamente perché, ma ora lo so: se le tre macchine lavorassero contemporaneamente e svolgessero tutte il medesimo lavoro, allora sarebbe giusto fare la media aritmetica (chi lavora di più compensa chi lavora di meno) ma queste 3 macchine non lavorano insieme e non fanno neppure lo stesso lavoro.

Faccio un esempio (ogni riferimento ai miei hobby è da intendersi come puramente casuale):

Siamo in un cantiere. Vi sono tre mezzi movimento terra (un escavatore, una pala ed un camion) e l'obiettivo è quello di fare uno sbancamento nel terreno e di portare via la terra scavata. La catena dovrebbe funzionare così: l'escavatore scava estraendo la terra e facendone un mucchio, la pala prende questa terra e la carica su un camion che la porta via. Se tutti lavorano al 100% abbiamo un sistema che rende il 100%. Ma se abbiamo un escavatore che non lavora (0%) non possiamo dire che il rendimento del cantiere è del 66% (media aritmetica fra 0%, 100%, 100%) perché dal cantiere non è uscito neppure un grammo di terra e quindi io affermerei che il rendimento è stato dello 0%. Inoltre se tutti e tre i mezzi avessero lavorato al 66% delle loro possibilità si potrebbe affermare che il rendimento è stato del 66%, seguendo la media aritmetica. Ma attenzione: i due casi sopra non sono uguali (anche se le medie aritmetiche dicono il contrario): nel primo non è stato mosso neppure un grammo di terra mentre nel secondo caso una parte del lavoro è stata compiuta. Esempi analoghi possono essere fatti dando il valore 0% ad uno qualsiasi degli altri mezzi. Nulla cambia.

Da tutta questa bella chiacchierata sulle ruspe se ne conclude che la media aritmetica non è applicabile (sia nella forma da me proposta sia che in quella suggerita da Peluffo) perché porta a terribili paradossi. Ora vedrò di trovare un qualcosa che non porti a paradossi e consenta di descrivere bene il fenomeno.

Luigi Mandraccio

il rendimento è l'energia utile ricavata rispetto alla spesa forse il rendimento, nel caso della 3^a macchina, non è basso ma bensì relativo al lavoro che deve svolgere; forse per il lavoro che deve svolgere non deve usare le sue massime capacità ma solamente una parte di esse.

la stessa cosa vale per le altre 2 macchine, in misura diversa naturalmente.

il sistema per calcolare il rendimento medio è proprio quello di calcolarlo prendendo un valore ipotetico come può essere 100 Watt (per tutte e 3 le macchine) ed un consumo di 50 Ampere (per tutte e 3 le macchine); partendo da questo ci si può calcolare i vari valori (naturalmente fittizi).

L'interpretazione scelta da Luigi per dare significato al problema complica e introduce considerazioni non necessarie.

Luigi Mandraccio

Ho appena guardato le riflessioni di Matteo e la risposta del prof.: le precisazioni di Matteo sul problema A sono da me perfettamente condivise, tanto che il metodo alternativo a quello del professore è stato concepito da Matteo e da me mercoledì mattina, quando abbiamo cominciato a risolvere i problemi, ma la spiegazione fornita da Matteo sulle due tecniche è eccellente. Per quanto riguarda il problema B ormai siamo già da tempo sicuri della soluzione: il giorno è mercoledì.

Problema C: le osservazioni di Matteo sono a mio parere da verificare perché forse invece di sommare le 2 percentuali maggiori si potrebbero sommare quelle minori e poi procedere con 'altra perc. ed allora il risultato sarebbe diverso; quello che più mi incuriosisce è il fatto di cercare degli altri modi per risolvere un problema che mi sembra fatto a posta per essere risolto con il metodo classico. **Attenzione: sembra che i suggerimenti di Andrea Martinelli non siano stati compresi o letti.**

L'osservazione che Matteo fa (a proposito del problema D) sulla frase "superiore al 7" è giusta ma secondo me (è sempre da confrontare con le idee del padre del ragazzo) potrebbe andare anche bene una media del 7 perché spesso la frase "superiore" è associata "o uguale a" e ne risulta "superiore o uguale a".

Sono poi pienamente d'accordo con Matteo sul problema F.

Andrea Marchese

Problema dell'aereo

Come tutti anche io per istinto ho fatto la media tra le due velocità, ma quando il prof. mi ha fatto provare la regola su un caso limite con $V_1 = 1000 \text{ km/h}$ e $V_2 = 0 \text{ km/h}$ ho capito che la media non poteva funzionare, allora ho pensato che si poteva fare la media dei tempi che l'aereo impiegava per percorrere il tragitto. Per farlo ho immaginato che tra Roma e New York ci fossero 4660 km. Allora ho fatto $S/V_1 = t_1$ allo stesso modo ho trovato t_2 (facendo S/V_2). Quindi ho fatto $(t_1 + t_2)/2$ e ci siamo trovati la media dei due tempi che nel mio caso è 5,22. Ho poi diviso la media dei due tempi per lo spazio in modo da trovarmi la velocità media. Non sono sicuro che questa regola sia giusta ma mi sembra che funzioni anche nei casi limite. Riassumendo la regola è: $V_{\text{media}} = S / [(S/V_1 + S/V_2)/2]$

Problema della pubblicità

Ad una prima occhiata direi che dovrebbe mandarla un mercoledì quando ci sono più ascolti, bisogna però vedere a che pubblico è destinata la pubblicità e bisognerebbe vedere di quanto aumenta il prezzo per mettere la pubblicità.

Problema del rendimento delle macchine

Si può dire che complessivamente hanno un rendimento del 200/300.

Per trasformare il valore in percentuale bisogna dividere per tre, secondo me si può dire che il rendimento medio è del 66,7%. **NO, anche qui non si tiene conto di indicazioni già fornite da Andrea Martinelli.**

Problema della media matematica

Penso che in questo caso si possa applicare la media matematica. Si trova che la media è 6,57 (arrotondabile a 7) il padre voleva una media superiore al sette quindi penso che allo studente non spetti il regalo.

Per quanto riguarda gli altri due problemi non ho capito bene come risolverli.

Luigi Mandraccio

1^a macchina: rendimento del 90%

2^a macchina: rendimento del 80%

3^a macchina: rendimento del 30%

totale 200

possiamo dire che alla 1^a manca il 10%

possiamo dire che alla 2^a manca il 20%

possiamo dire che alla 3^a manca il 70%

totale 100

il rendimento è l'energia utile ricavata rispetto alla spesa. Forse il rendimento, nel caso della 3^a macchina, non è basso ma bensì relativo al lavoro che deve svolgere; forse per il lavoro che deve svolgere non deve usare le sue massime capacità ma solamente una parte di esse. La stessa cosa vale per le altre 2 macchine, in misura diversa naturalmente.

Il sistema per calcolare il rendimento medio è proprio quello di calcolarlo prendendo un valore ipotetico come può essere 100 wattora (360000 joule) (per ognuna delle 3 macchine) ed un consumo di 50 watt (per ognuna delle 3 macchine); partendo da questo ci si può calcolare i vari valori (naturalmente fittizi).

(precisazione: il "wattora" è per convenzione l'unità di misura del lavoro per macchine elettriche ed 1 wattora corrisponde a 3600 joule; il watt è l'unità di misura della potenza elettrica)

Quindi:

1^a: 90 wattora per 50 watt

2^: 80 wattora per 50 watt

3^: 30 wattora per 50 watt

In totale le 3 macchine consumano 150 watt di energia elettrica e producono 200 wattora di energia utile (consideriamo questo dato all'ora). **Mi sembra un po' strano: producono più di quello che consumano? Un rendimento maggiore di 1 va contro il principio di conservazione dell'energia!!**

Consideriamo ora che le macchine lavorino dalle 8;30 alle 17;30 (misura approssimata); se così fosse allora il consumo totale sarebbe 1500 watt di energia elettrica e la produzione di energia utile sarebbe di 2000 wattora (in una giornata di lavoro). Probabilmente si potrebbero prendere degli esempi riguardo ad una pseudo catena di montaggio, come una sequenza di macchine da assemblaggio per auto (sedile - portiera - cofano) ed applicare i dati sopra scritti ad una di queste situazioni ma è chiaro che a seconda di come si sistemano i dati il risultato cambia; probabilmente la cosa più conveniente sarebbe prima capire l'importanza del lavoro di una macchina nei confronti di un'altra e poi attribuire ad ogni macchina la giusta importanza e quindi capire se è giusto fare la media matematica o adottare una risoluzione basata su esempi ed ipotesi.

L'interpretazione scelta da Luigi per dare significato al problema complica e introduce considerazioni non necessarie.

Andrea Martinelli

Ciao a tutti,

Per il problema dei 3 macchinari che lavorano insieme direi che, alla luce di quanto ho detto ieri con l'esempio del cantiere, il rendimento medio potrebbe essere del 21,6%.

Ecco come sono arrivato a questa conclusione.

The screenshot shows a window titled "DERIVE for Windows - [Algebra 2:1 D:\MAT.MTH]". The interface includes a menu bar (File, Edit, Author, Simplify, Solve, Calculus, Declare, Options, Window, Help) and a toolbar with various mathematical symbols. The main workspace contains a list of steps from #1 to #12, with arrows pointing to explanatory text:

- #1: $\frac{90}{100} - 0.2 \frac{90}{100}$ → Dal rendimento della prima macchina ho tolto il mancato rendimento della seconda.
- #2: $\frac{18}{25}$
- #3: $\frac{18}{25} - 0.7 \frac{18}{25}$ → Dal rendimento delle prime due macchine ho tolto il mancato rendimento della terza.
- #4: $\frac{27}{125}$
- #5: 0.216 → Trasformazione di un valore espresso in frazione in uno espresso con la percentuale.
- #6: $0.216 \cdot 100$
- #7: **21.6%**
- #8: $0 - 0 \cdot 0$
- #9: 0
- #10: $0 - 0 \cdot 0$ → Esempio di applicazione di questa strategia anche nel caso limite 0%; 100%; 100%
- #11: 0
- #12: 0%

Infatti se considero tutta la catena come un unico macchinario dal rendimento del 21.6% elimino tutti i dati particolari (90%;80%;30%) ma il risultato non cambia. Io ho interpretato il problema in questo modo. Spero vivamente che sia corretto ma ho ancora qualche dubbio.....**21,6 sono i pezzi prodotti (su un totale teorico di 100) dalle tre macchine in serie. Non sono, però, il rendimento medio.**

Marco Paparella

Ecco le mie considerazioni sui problemi posti mercoledì:

a)E' evidente che la media matematica non porta alla soluzione esatta anche se all' inizio ci ha tratto in inganno quasi tutti (me compreso).

Io ho fatto un ragionamento del genere:

Hp: Lunghezza del viaggio : 5000Km Velocità viaggio 1: 932Km/h Velocità viaggio 2: 856 Km/h

Ts: Velocità media dell'intero percorso.

$5000/932 = 5,36h$ (durata viaggio 1) $5000/856 = 5,84h$ (durata viaggio 2) $5,36+5,84 = 11,20 h$ (durata dell' intero percorso) $5000 \cdot 2 = 10000$ (lunghezza dell'intero percorso) $10000/11,2 = 892,86 Km/h$ (velocità media dell'intero percorso)

b)Penso che non ci siano dubbi che se l'obiettivo è quello di fare più ascolti sicuramente lo spot dovrà essere mandato in onda il mercoledì.

c)Le soluzioni proposte sono state tante ma io sono più propenso per quella più semplice siccome il testo chiede il rendimento **medio** complessivo:

$(90 + 80 + 30) / 3 = 66,67\%$ Non si tengono in alcun conto i suggerimenti di Andrea, in particolare la dimostrazione che questo procedimento è del tutto scorretto.

d) Il ragazzo non avrà di sicuro il regalo perché la sua media è di 6,57, e anche volendo arrotondare a 7 la media non sarà mai *superiore* al 7 come richiesto nel testo

e) Se si considerano solamente i punteggi in trentesimi la media del ragazzo non sarà tale da farlo accedere alla borsa di studio (la sua media è di $25,78/30$) Non è possibile fare una semplice media aritmetica, ma ci vuole una media pesata.

Penso che sia da chiarire il modo in cui influiscono i crediti nel punteggio finale.

f) Non ho ben capito il significato dell'ultima domanda posta nel problema: "Quale valore medio consente di rappresentare adeguatamente questo modo di valutare?"

Andrea Marchese

ho pensato al problema delle macchine che lavorano in serie.

Non avevo capito bene il testo, forse, visto che lavorano in serie avranno il rendimento complessivo dell'ultima. O forse di quella che lavora meno, oppure bisognerà fare: l'80% di 90 e poi il 30% del risultato e alla fine viene che il rendimento complessivo è 21,6%. Non sono sicuro neanche di questo.

Andrea Martinelli

In un primo momento avevo pensato ad un valore medio da sostituire a tutti i valori particolari. Poi ho pensato di considerare tutta la catena come un unico insieme. Tuttavia avevo, come ho scritto, qualche dubbio su questa interpretazione. Ora credo (e spero) di essere riuscito a risolvere il problema. Ecco come ho fatto:

$100 \cdot x^3 = 21,6$ (sì, mi è venuta in mente pensando alle trote...). Una volta trovato il valore X esso va moltiplicato per 100 per averlo in percentuale. Si ottiene così il rendimento medio complessivo di tutte le macchine che è del 60%. Ecco quella che spero sia una prova a sostegno di ciò:

$100p - 40\% = 60p$ (rendimento 1° macchina 60%)

$60p - 40\% = 36p$ (rendimento 2° macchina 60%)

$36p - 40\% = 21,6p$ (rendimento 3° macchina 60%)