Esercizi proposti
Variabili aleatorie, densità di probabilità e funzioni di ripartizione.

1. Sia data la funzione tale che f(1) = f(4) ¼ ; f(2) = f(3) = ½ . Può rappresentare una densità di probabilità di una variabile aleatoria? Giustifica la risposta e, in caso di risposta affermativa, fornisci almeno una possibile interpretazione di questa funzione in termini di un fenomeno aleatorio che essa può descrivere.
2. Quale è la variabile aleatoria *X* che descrive l'esperimento del lancio di due dadi a sei facce non truccati e che prende in considerazione la somma dei punteggi ottenuti? Quale è la sua densità di probabilità e la sua funzione di distribuzione cumulata?
3. Produci altri due esempi di variabili aleatorie e determina, per ciascuna di esse, la densità di probabilità e la funzione di distribuzione cumulata.
4. Considera i seguenti modelli:
   a) un'urna che contiene *n* biglie numerate;
   b) un disco suddiviso in *n* settori circolari che ruota;
   c) un "dado" a *n* facce.

   Per ciascuno di essi costruisci un caso concreto e determina, per esso, la variabile aleatoria *X* che lo descrive, la sua densità di probabilità e la sua funzione di distribuzione cumulata.

Esercizio risolto.
Sia *X* la variabile aleatoria numero di figli maschi in una famiglia con quattro figli. Qual è la probabilità che una famiglia estratta a caso dalla popolazione considerata abbia almeno tre figli maschi?
Determiniamo innanzitutto la densità di probabilità di *X* supponendo che:
a) la probabilità che nasca un maschio e quella che nasca una femmina siano uguali fra loro;
b) gli eventi "nasce un maschio" e "nasce una femmina" siano fra loro indipendenti.

In questo caso le leggi sulla probabilità composta portano a scrivere la seguente tabella:

X	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Quindi $P(X \geq 3)$ = ¼ + 1/16 = 5/16.
Ovviamente la probabilità che abbia meno di tre figli maschi è 1 – 5/16 = 11/16.

5. In un'urna si trovano 4 palline numerate (1, 2, 3, 4) e si effettuano due estrazioni rimettendo, dopo la prima estrazione, la pallina nell'urna. Scrivi la variabile aleatoria "somma dei punti" e determina i seguenti eventi:
   $P(X = 2)$; $P(X = 4)$; $P(X \leq 4)$; $P(X \geq 3)$; $P(2 \leq X \leq 4)$; $P(X \geq 3$ o $X \leq 2)$

6.

Condizionamento e indipendenza

Esempio svolto
Sia *X* la variabile aleatoria che descrive la somma dei punti ottenuti lanciando due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde, la cui densità di probabilità è data dalla seguente tabella.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Sia *Y* la variabile che descrive il punto ottenuto sul dado rosso, la cui densità di probabilità è data dalla seguente tabella:

Y	1	2	3	4	5	6
$P_Y(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Supponiamo ora di voler sapere se e come cambia la tabella relativa a X sapendo che il dado rosso mostra la faccia 3, ossia supponiamo di voler conoscere la densità di probabilità della nuova variabile aleatoria Z tale che
$Z = X|(Y = 3)$ (leggi: distribuzione di X sapendo che $Y = 3$).
L'evento "il dado rosso mostra la faccia 3" esclude che possano verificarsi i punteggi 2 e 3, 10, 11, 12 (ossia, la loro probabilità è 0) e consente di attribuire uguale probabilità ai punteggi possibili:

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_Z(x)$	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0

O, meglio:

Z	4	5	6	7	8	9
$P_Z(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Infatti il secondo dado assumerà i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6 ciascuno con probabilità 1/6 e, a ogni valore assunto, per ottenere la somma dei punteggi dovremo addizionare 3 (punteggio ottenuto sul dado rosso).

1. Se si effettuano due successive estrazioni di palline da un'urna contenente 11 palline verdi, 2 nere e 5 bianche, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna e si considerano le due variabili aleatorie
X = colore uscito alla prima estrazione
Y = colore uscito alla seconda estrazione
Si ha che X e Y sono fra loro dipendenti o indipendenti? Giustifica la risposta.

2. Cambierebbe la risposta al precedente esercizio se la pallina estratta alla prima estrazione non venisse immessa nuovamente nell'urna? Giustifica la risposta.

3. Nell'esempio in cui si è considerata la variabile aleatoria X che descrive la somma dei punti ottenuti lanciando due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde, hai visto che tale variabile è dipendente dall'evento $Y = 3$. Possiamo quindi concludere che Y e X non sono indipendenti; possiamo anche concludere che tutti gli eventi del tipo $X = k$ sono dipendenti da $Y = 3$? Per esempio, i due eventi $X = 4$ e $Y = 3$ sono dipendenti? Giustifica la risposta.

4. Fai almeno altri due esempi, uno di dipendenza e uno di indipendenza di variabili aleatorie.

Esempio svolto
Si lanci due volte un dado regolare a sei facce numerate da 1 a 6. Gli esiti dei lanci e la loro probabilità possono essere descritti dalle due variabili aleatorie X e Y e dalle loro densità di probabilità:

X	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	1	2	3	4	5	6
$P_Y(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

X e Y sono la stessa funzione; però una descrive il primo lancio e l'altra il secondo, quindi può

accadere che *X* e *Y* assumano valori diversi nell'esperimento dei due lanci successivi. Possiamo così essere interessati all'evento "esce 1 al primo lancio ed esce 5 al secondo lancio". Qual è la probabilità di questo evento?
$P(X = 2 , Y = 5) = P(X = 2) * P(Y = 5 \mid X = 2) = 1/6 * 1/6 = 1/36$
Nota che $P(X = 2) * P(Y = 5 \mid X = 2) = P(X = 2) * P(Y = 5)$, ossia gli eventi esce 1 al primo lancio ed esce 5 al secondo lancio sono indipendenti.

5. Calcola tu stesso le probabilità dei seguenti eventi composti nella situazione descritta nel precedente esempio:
   a) "esce un numero pari nel primo lancio e un numero dispari nel secondo"
   b) "esce un numero pari al primo lancio e un numero maggiore di 2 nel secondo"
   c) "esce un numero pari nel primo lancio e un numero pari nel secondo"
   d) "esce un numero minore di 3 e maggiore di 4 nel primo lancio e un numero pari nel secondo"

6. Da un'urna, contenente 3 palline nere (0), 2 bianche (1) e 4 verdi (2), vengono effettuate due successive estrazioni di una pallina, senza rimpiazzo. Dopo avere individuate le due variabili aleatorie *X* e *Y* che descrivono la situazione e dopo avere scritto in forma di tabella le loro densità di probabilità, determina la probabilità dell'evento "sono state estratte una pallina nera e una bianca".
Nota, infine, che $P(X = 0) * P(Y = 1 \mid X = 0) \neq P(X = 0) * P(Y = 1)$, ossia gli eventi esce nera alla prima estrazione ed esce bianca alla seconda sono dipendenti.

7. Sia *X* la variabile aleatoria che descrive la somma dei punti ottenuti lanciando due dadi a sei facce, uno rosso e uno verde. Scrivi la sua densità di probabilità $P_X(x)$, verificando che i valori che essa assume appartengono all'insieme: $\left\{ \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \quad \frac{4}{36}, \frac{5}{36} \right\}$
Sia *Y* la variabile che descrive il punto ottenuto sul dado rosso. Scrivi la sua densità di probabilità $P_Y(x)$.
Considera quindi la loro distribuzione congiunta; allo scopo ti chiediamo di completare la seguente tabella:

X Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	1/36	1/36					0	0	0	0	0	1/6
2		1/36			1/36				0			1/6
3							1/36	1/36	0	0		
4		0	0						1/36			
5							1/36		1/36			
6									1/36		1/36	
	1/36		3/36				5/36				1/36	1

Se osservi la tabella, per rispondere alla domanda
Quale è la probabilità dell'evento "la somma è 10, sotto la condizione che sul dado rosso è uscito

un numero minore o uguale a 5"?
Vedrai che è sufficiente addizionare le prime cinque probabilità che compaiono nella colonna corrispondente all'evento X = 10. Si ottiene 1/18.
Qual è la probabilità che, sapendo che la somma è 10, il numero sul dado rosso è minore o uguale a 5?

8. Una fabbrica un pezzo meccanico M mediante tre tipi di macchinari A, B, C. A fornisce il 50% della produzione, B il 40% e C il 10%. Si sa che sono difettosi il 2% dei pezzi prodotti da A, il 3% dei pezzi prodotti da B e il 5% dei pezzi prodotti da C. Se si estrae un pezzo a caso da tutti quelli prodotti:

a) qual è la probabilità che sia difettoso?
b) Qual è la probabilità che il pezzo estratto sia difettoso e sia stato prodotto dalla macchina A?
c) Sapendo che il pezzo estratto è difettoso, qual è la probabilità che provenga dalla macchina B?