Dal *laboratorio* alla *lezione*: descrizione di un esempio

Domingo Paola
Liceo scientifico A. Issel – Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova

Qualche breve riflessione sul *laboratorio di matematica*

Il termine *laboratorio* rimanda al lavoro, alle dimensioni dell'agire e del fare. In qualche modo evoca anche laboriosità e quindi attenzione, coinvolgimento, partecipazione al processo di costruzione del prodotto.
Quando si parla di *laboratorio di matematica*, magari utilizzando la suggestiva metafora della bottega rinascimentale (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994), lo si fa spesso per evocare un modello di insegnamento – apprendimento diverso dalla *lectio*, ossia quello che, a partire dall'alto medioevo, in particolare dall'epoca carolingia ha sempre più contraddistinto le azioni che si esercitavano nei luoghi e nelle istituzioni preposte all'educazione e all'istruzione (Illich, 1992). Nella bottega rinascimentale, nel laboratorio dell'artigiano, ma anche in famiglia si apprendeva facendo e vedendo fare, per imitazione ed emulazione di altri principianti e dell'esperto; si comunicava con un linguaggio che Illich identifica con il termine di vernacolo (Illich, 1992) intendendo con esso un linguaggio che si impara per contatto con la madre e con il proprio nucleo familiare, strettamente legato all'ambiente in cui si vive e che prescinde da qualunque tirocinio programmato.
Nelle istituzioni preposte all'azione di istruzione ed educazione si apprende in genere mediante la *lectio*, ossia leggendo e rileggendo la pagina scritta, mettendone in rilievo gli elementi portanti; si apprende usando un linguaggio colto che viene (e deve essere) insegnato[1].
Il *laboratorio* evoca l'idea di lavoro, fatica, operosità; la *lezione* evoca una trattazione da parte dell'esperto, un insegnamento impartito. Il *laboratorio* fa pensare a un coinvolgimento del corpo e della mente; la *lezione* evoca una partecipazione esclusivamente intellettuale. Il lavoro artigianale che si svolge nel *laboratorio* si gioca sui tempi lunghi, necessari al processo di produzione dell'artefatto; la *lezione* si svolge in tempi scanditi e ben definiti, più simili a quelli della produzione industriale che non a quelli della produzione artigianale.
Il pendolo che indica le funzioni della *lezione* oscilla tra due estremi: da una parte l'indottrinamento, dall'altra l'analisi e la riflessione sulle conoscenze, che consentono di approfondire, di vedere gli oggetti di studio da nuovi e diversi punti di vista e di aprire orizzonti di ricerca non ancora esplorati. Perché il modello della *lezione* ha avuto una diffusione così capillare, pervasiva e durevole? La fortuna della *lezione* nella tradizione del nostro sistema di istruzione ed educazione è a mio avviso dovuta a una scuola che è stata fino a oggi esplicitamente e consapevolmente selettiva. Attraverso l'azione esercitata nelle *lezioni* si cercava di garantire a numeri di studenti sempre più consistenti un'alfabetizzazione di base che consisteva essenzialmente nel leggere, nello scrivere e nel far di conto e poi si passava all'istruzione secondaria che aveva una duplice azione: da una parte "secolarizzare" gli studenti che avevano motivazioni, voglia e mezzi per proseguire negli studi; dall'altra espellere dal sistema di istruzione ed educazione tutti gli altri. I problemi sono iniziati a sorgere con la scuola di massa, con la sempre maggiore consapevolezza che non è più possibile esercitare una selezione esplicita, né una selezione nascosta (quella che manda avanti sempre e comunque, lasciando ad altri la responsabilità di una seria valutazione). I problemi si sono manifestati nel momento in cui la scuola diventa di tutti e per tutti, nel senso che la sua funzione prioritaria diviene quella di aiutare i giovani a conseguire le conoscenze e le competenze necessarie per partecipare a una cittadinanza informata e consapevole, in un

[1] D'ora innanzi utilizzerò il termine *lezione* in luogo di *lectio*.

mondo in cui le sfide per le giovani generazioni diventano sempre più difficili da affrontare. Oggi la scuola non può più limitarsi a garantire un'alfabetizzazione di base per tutti e una preparazione forte a un'élite. La scuola dovrebbe aiutare tutti i futuri cittadini ad acquisire competenze e conoscenze essenziali per partecipare in modo informato e consapevole alle sempre più difficili scelte che la vita pubblica impone. Il pendolo della *lezione* deve quindi essere spostato, fin dalla scuola dell'obbligo e non solo per le scuole superiori, dall'indottrinamento all'analisi, all'approfondimento, alla riflessione sulle conoscenze che via via si costruiscono. Le nuove esigenze, i nuovi obiettivi, più volte dichiarati nei documenti delle istituzioni scolastiche, si scontrano con una tradizione che è quella della *lezione*, in cui, a meno di non essere esperti dell'argomento, si è in qualche modo costretti a limitarsi ad ascoltare, a prendere appunti, a leggere testi scritti, a rielaborare ciò che si è ascoltato e letto e a riprodurlo, oralmente e per scritto, più volte, in modo da arrivare a produzioni simili a quelle del docente o del libro di testo. Vista da questa prospettiva, la *lezione* comporta modalità di insegnamento – apprendimento che non necessariamente favoriscono l'uso del pensiero critico e che non sempre richiedono una partecipazione attiva e responsabile nel processo di costruzione del sapere. Sono convinto che la scuola abbia bisogno di molto *laboratorio di matematica*, in cui si possano costruire significati degli oggetti di studio, attraverso esperienze realizzate in ambienti di insegnamento – apprendimento ricchi e adeguati, prima che le *lezioni* possano aprire nuovi orizzonti al sapere, attraverso la loro funzione di analisi critica e di approfondimento.
Non dirò altro relativamente al *laboratorio di matematica* e alle sue caratteristiche, rimandando, per tutto ciò, agli scritti di Mariolina Bartolini Bussi e di Giampaolo Chiappini presenti in questo numero della rivista. Mi limiterò a descrivere un'attività, svolta in una classe di primo anno di scuola secondaria di secondo grado, che, a mio avviso, costituisce non solo un buon esempio di che cosa si debba intendere quando si sente parlare di *laboratorio di matematica*, ma consente anche di far capire come e quando sia possibile passare dal *laboratorio* alla *lezione*.

Un esempio di attività di laboratorio di matematica in una prima liceo scientifico

UNO ZOOM SULLA CLASSE

Nel momento in cui è stata realizzata l'attività che qui descrivo, gli studenti frequentavano il primo anno di un liceo scientifico (sperimentazione PNI, Piano Nazionale dell'Informatica) a Finale Ligure, in provincia di Savona. La classe era formata da ventidue studenti, di cui nove femmine e tredici maschi, abituati fin dai primi giorni dell'anno scolastico a lavorare a coppie e in piccoli gruppi collaborativi[2]. La classe, inoltre, è stata scelta per la realizzazione di un progetto di ricerca internazionale che si propone di studiare i comportamenti degli studenti di scuola secondaria di secondo grado mentre lavorano in un ambiente messo a disposizione dal software TI-nspire della Texas Instrument[3]. Gli studenti, fin dal secondo mese di scuola, hanno utilizzato TI-nspire, nell'aula di informatica, per circa due o tre moduli orari alla

[2] Preferisco utilizzare, in riferimento alla tipologia di lavoro dei gruppi, l'aggettivo "collaborativi" in luogo di "cooperativi" per evidenziare che in queste attività non si prevede una suddivisione del lavoro fra individui o sottogruppi, come spesso accade fra esperti che devono realizzare un prodotto finale attraverso la cooperazione dei vari componenti (gruppi cooperativi), ma tutti i componenti del gruppo, in ogni fase, collaborano all'individuazione, alla realizzazione e alla comunicazione di strategie adeguate ad affrontare una situazione problematica (gruppi collaborativi).

[3] Il progetto è coordinato in Italia da Ferdinando Arzarello del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino ed è finanziato dalla Texas Instrument. Una quarta classe di un liceo scientifico di Torino, con la professoressa Pierangela Accomazzo, è coinvolta nello tesso progetto di ricerca. Il progetto si propone anche di studiare limiti e potenzialità dell'uso di TI-nspire nell'insegnamento – apprendimento della matematica, prima che tale software venga commercializzato.

settimana[4]. Inoltre ciascuno studente ha avuto una copia del software per lo studio individuale a casa. Si può quindi affermare che, al momento dello svolgimento dell'attività qui descritta, gli studenti potevano considerarsi buoni conoscitori di quelle risorse messe a disposizione dal software per affrontare l'attività proposta. Mi limito a descrivere a grandi linee il percorso didattico seguito dagli studenti fino al momento in cui l'attività è stata proposta[5]. La spina dorsale del corso è costituita dai concetti di funzione, modello, problema e teoria, che attraversano pervasivamente e in profondità tutti e cinque gli anni di corso. Gli studenti avevano svolto all'inizio dell'anno alcune attività con i sensori di posizione, volte a introdurre, attraverso un approccio fortemente percettivo, basato sul movimento del proprio corpo, il concetto di funzione come "grandezza che varia rispetto a un'altra". In seguito sono state loro proposte diverse attività volte ad acquisire tecniche adeguate allo studio delle variazioni di grandezze, in particolare le tecniche delle differenze finite, assai utili per studiare se una funzione cresce o decresce (se la variabile indipendente varia con passo costante, il segno delle differenze prime è proporzionale alla pendenza locale e quindi dà informazioni sulla crescenza) e su come cresce o decresce (ossia lo studio della concavità con il segno delle differenze seconde). Particolare risalto è stato dato al concetto di pendenza e di funzione lineare: relativamente a questo tipo di funzioni gli studenti avevano acquisito una discreta abilità nella determinazione dello zero e nello studio del segno, nonché nel confronto e nella composizione di due funzioni lineari. Al momento in cui è stata proposta l'attività gli studenti sapevano distinguere tra crescite polinomiali (quelle per cui esiste n tale che le differenze finite di ordine n sono costanti), in particolare le crescite lineari e quadratiche, e crescite esponenziali (quelle caratterizzate dalla costanza del rapporto tra due termini consecutivi o dal fatto che le successioni delle differenze variano anch'esse esponenzialmente, in modo direttamente proporzionale ai valori della grandezza oggetto di osservazione).

L'ATTIVITÀ PROPOSTA

Agli studenti è stato consegnato la seguente scheda di lavoro, che riporto integralmente e in cui sono contenute tutte le indicazioni per lo svolgimento dell'attività e il problema da risolvere[6] .

Indicazioni per lo svolgimento dell'attività

L'attività che dovrete svolgere oggi richiede di studiare come variano le aree di tre successioni di rettangoli che ora verranno definite. Vi chiediamo di strutturare l'attività nel seguente modo:

1. ascoltate attentamente la lettura dell'attività da parte dell'insegnante in classe;

---

[4] Il corso di matematica PNI consiste di 5 moduli orari a settimana. Utilizzo il termine "modulo orario", perché nel Liceo Issel le lezioni sono formate da unità di cinquanta e non di sessanta minuti, sia per facilitare la realizzazione di progetti volti a differenziare l'offerta formativa per tenere conto delle diverse esigenze, dei diversi interessi e dei diversi stili di apprendimento degli studenti, sia per evitare agli studenti l'obbligo di rientri pomeridiani che, in alcuni casi, creerebbero forti disagi a causa della conformazione territoriale del finalese.

[5] Chi fosse interessato ad avere informazioni più dettagliate sul percorso didattico può collegarsi al sito web http://www.matematica.it/paola e cliccare sul bottone "Corso di matematica". Accederà a una pagina che descrive l'intero percorso che in genere svolgo dei primi tre anni di un corso liceale a sperimentazione PNI. Per ora le attività presenti sul sito sono ancora scritte in fogli di lavoro di TI-InterActive! (sul sito sono date le indicazioni per scaricarne una demo gratuita), un software della Texas Instrument che dovrebbe essere prossimamente sostituito con TI-nspire. In futuro cercherò di inserire sul sito anche attività costruite con TI-nspire. Chi preferisse la lettura di materiale cartaceo può far riferimento a sei articoli che, a partire da febbraio 2007, vengono pubblicati in successivi numeri della rivista *L'insegnamento della matematica e della scienze integrate,* del Centro Ricerche Didattiche Ugo Morin.

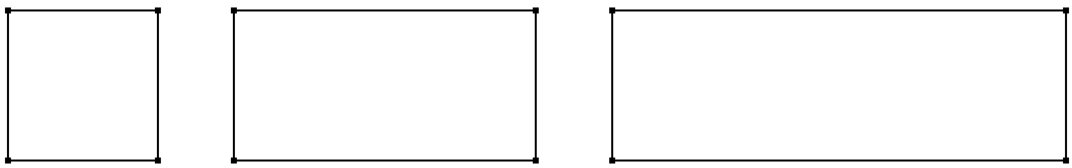
[6] Il problema è stato tratto da un lavoro presentato qualche anno fa al PME di Utrecht (Hershkowitz, R & Kieran, C. , 2001). Sono debitore a Ornella Robutti per avermelo segnalato.

2. per dieci minuti pensate individualmente al problema, senza l'aiuto di carta e matita, né, tantomeno, di TI-nspire. In questi dieci minuti cercate di produrre congetture su come variano le aree dei rettangoli di ciascuna successione;
3. nei successivi dieci minuti discutete le congetture prodotte con il vostro compagno o la vostra compagna[7], usando solo carta e matita; pensate a possibili strategie di approccio al problema (di verifica o di esplorazione) da svolgersi poi con TI-nspire;
4. nei 60 minuti rimanenti potrete utilizzare TI-nspire per verificare le vostre congetture, effettuare esplorazioni e, infine, produrre una risposta al problema e ad alcune domande specifiche che abbiamo posto alla fine di questa scheda.

Problema

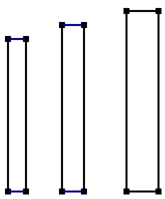
Considerate le tre seguenti successioni a), b) e c) di rettangoli:

a) l'altezza è fissata e uguale a 1 cm; la base del primo rettangolo misura 1cm, mentre i successivi rettangoli si ottengono aumentando sempre di 1cm la base, come suggeriscono le seguenti figure:



...

b) Il primo rettangolo ha altezza 1 cm e base 0,1 cm; i successivi rettangoli si ottengono aumentando di 0,1 cm sia la base, sia l'altezza, come suggeriscono le seguenti figure:



...

c) il primo rettangolo è un quadrato di base e altezza 0,01 cm; i successivi rettangoli hanno sempre altezza di 0,01 cm, mentre le rispettive basi si ottengono raddoppiando la base del precedente rettangolo considerato, come suggeriscono le seguenti figure:

....

Che cosa potete dire, in generale, relativamente al tipo di crescita delle aree dei rettangoli di ciascuna successione? Giustificate la risposta.
In particolare, esistono rettangoli della seconda e della terza successione che hanno area maggiore di quella del centesimo rettangolo della prima successione?
Esiste un valore di n a partire dal quale i rettangoli di posto maggiore di n della seconda successione hanno area sempre maggiore dei rettangoli di posto corrispondente della prima successione?
Esiste un valore di m a partire dal quale i rettangoli di posto maggiore di m della terza successione hanno area sempre maggiore dei rettangoli di posto corrispondente della prima successione? Giustificate le risposte.

---

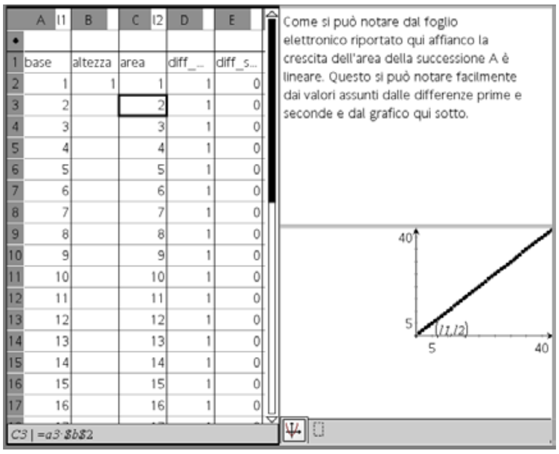
[7] In questa fase gli studenti dovevano lavorare in coppia, avendo a disposizione un computer per ogni coppia. La scelta suddividere gli studenti in coppie di lavoro è dettata da una duplice esigenza: da un lato garantire agli studenti un facile e frequente accesso alle funzioni del software (cosa difficile se gruppi numerosi di studenti lavorano su un solo computer); dall'altro non perdere del tutto i vantaggi didattici offerti dalle interazioni sociali nei piccoli gruppi di lavoro.

DESCRIZIONE DEL LAVORO SVOLTO NEL *LABORATORIO DI MATEMATICA*

Le prime tre fasi di lavoro, senza l'uso del software, sono state utili soprattutto a far concentrare gli studenti sul testo del problema; la seconda, in particolare, è stata utile per dar modo a tutti di avere il tempo di pensare a possibili strategie risolutive.

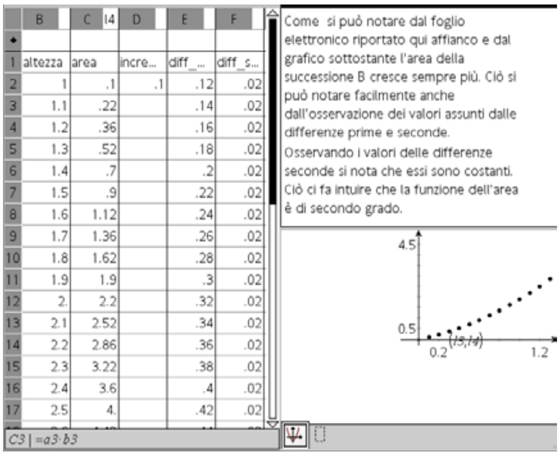
Dopo queste fasi iniziali solo alcuni studenti mostravano idee interessanti rispetto all'evoluzione delle aree dei rettangoli delle successioni b) e c); quasi tutti, però, avevano idea di come utilizzare le risorse messe a disposizione da TI-nspire per esplorare la situazione, ossia il comportamento delle successioni delle aree.

Quasi tutti i gruppi erano in grado di produrre autonomamente fogli di lavoro simili a quelli del gruppo di Luca e Serena, di cui riportiamo alcuni suggestivi frammenti (figure 1, 2, 3):



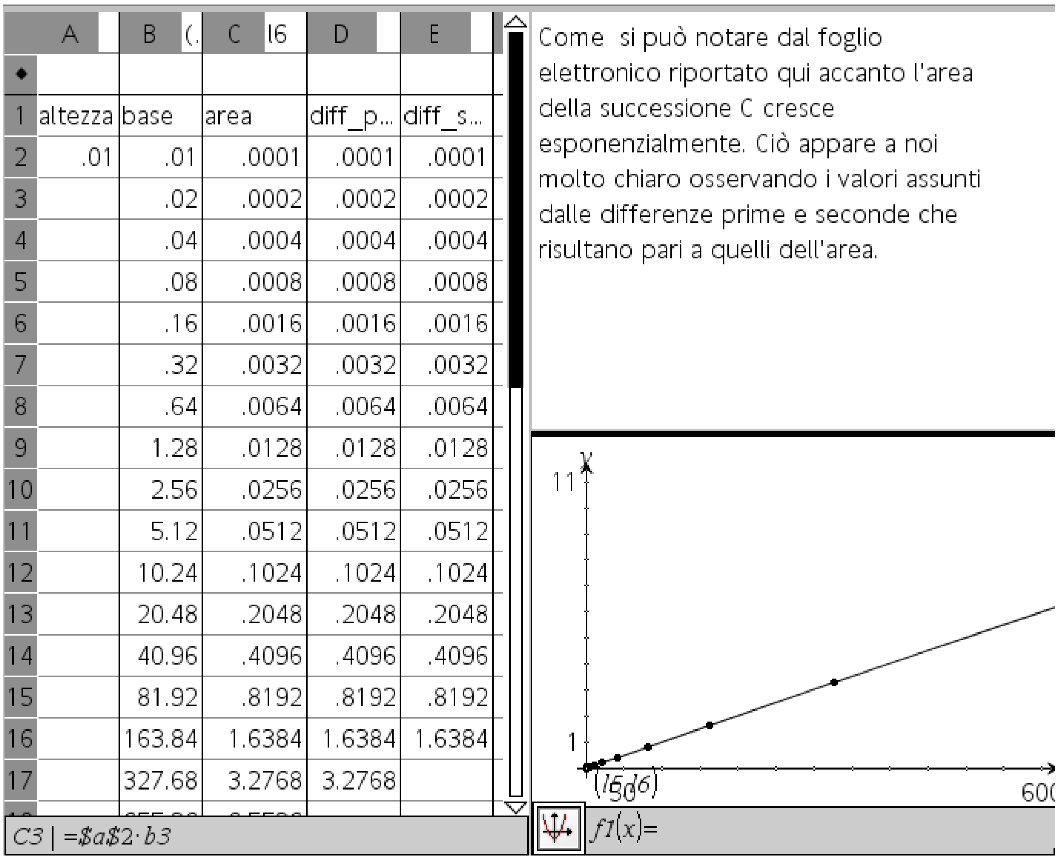
	A l1	B	C l2	D	E
1	base	altezza	area	diff_...	diff_s...
2	1	1	1	1	0
3	2		2	1	0
4	3		3	1	0
5	4		4	1	0
6	5		5	1	0
7	6		6	1	0
8	7		7	1	0
9	8		8	1	0
10	9		9	1	0
11	10		10	1	0
12	11		11	1	0
13	12		12	1	0
14	13		13	1	0
15	14		14	1	0
16	15		15	1	0
17	16		16	1	0

Fig. 1



	B	C l4	D	E	F
1	altezza	area	incre...	diff_...	diff_s...
2	1	.1	.1	.12	.02
3	1.1	.22		.14	.02
4	1.2	.36		.16	.02
5	1.3	.52		.18	.02
6	1.4	.7		.2	.02
7	1.5	.9		.22	.02
8	1.6	1.12		.24	.02
9	1.7	1.36		.26	.02
10	1.8	1.62		.28	.02
11	1.9	1.9		.3	.02
12	2.	2.2		.32	.02
13	2.1	2.52		.34	.02
14	2.2	2.86		.36	.02
15	2.3	3.22		.38	.02
16	2.4	3.6		.4	.02
17	2.5	4.		.42	.02

Fig. 2



	A	B	C l6	D	E
1	altezza	base	area	diff_p...	diff_s...
2	.01	.01	.0001	.0001	.0001
3		.02	.0002	.0002	.0002
4		.04	.0004	.0004	.0004
5		.08	.0008	.0008	.0008
6		.16	.0016	.0016	.0016
7		.32	.0032	.0032	.0032
8		.64	.0064	.0064	.0064
9		1.28	.0128	.0128	.0128
10		2.56	.0256	.0256	.0256
11		5.12	.0512	.0512	.0512
12		10.24	.1024	.1024	.1024
13		20.48	.2048	.2048	.2048
14		40.96	.4096	.4096	.4096
15		81.92	.8192	.8192	.8192
16		163.84	1.6384	1.6384	1.6384
17		327.68	3.2768	3.2768	

Fig. 3

La figura 1 è rappresenta una porzione del foglio di calcolo utilizzato da Luca e Serena per studiare la prima successione di rettangoli. Gli studenti riportano nelle prime tre colonne, rispettivamente i valori delle basi, delle altezze e delle aree dei rettangoli; nella quarta e nella quinta colonna sono riportate le differenze prime e le differenze seconde delle aree.
I valori della terza colonna (quella delle aree) sono ottenuti copiando la formula =a2*b2, ove il carattere "dollaro" ($) serve, come in excel, per rendere assoluto il riferimento alla cella (b2) che contiene il valore (costante) dell'altezza. Gli studenti nel blocco di appunti scrivono: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco la crescita dell'area della successione A è lineare. Questo si può notare facilmente dai valori assunti dalle differenze prime e seconde e dal grafico qui sotto".
Luca e Serena si esprimono con buona proprietà di linguaggio; affrontano e risolvono il problema sia dal punto di vista numerico che grafico e rilevano esplicitamente che questi due piani sono fra loro in accordo, ossia dicono la stessa cosa. Per quel che riguarda il piano simbolico, si fermano alle formule definite nel foglio elettronico e alla descrizione delle caratteristiche della crescita nel linguaggio naturale, senza scrivere una formula per ricorrenza o la formula $f_a(n) = n$ che dà l'area dei rettangoli della successione *a* in funzione della base *n* o del numero d'ordine del rettangolo considerato nella successione. Altri studenti, invece, scrivono questa formula (nessuno, però, usa l'indice *a* in riferimento alla prima successione); in ogni caso, nessuno studente ha difficoltà a comprendere il significato di tale formula una volta che essa sia suggerita da interventi dell'insegnante nel piccolo gruppo di lavoro.
La figura 2 riporta una parte del foglio di lavoro costruito da Serena e Luca per studiare la seconda successione. Rispetto al foglio precedente è stata aggiunta una cella (D2) nella quale si è riportato il valore dell'incremento delle altezze e delle basi (0,1). Gli studenti hanno quindi costruito con la formula "=a2+d2" le misure delle basi dei rettangoli (a partire dal valore 0,1; con la formula "=b2+d2" le misure delle altezze dei rettangoli (a partire dal valore 1) e con la formula "=a2*b2" le relative aree.
Sul foglio di appunti scrivono: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco e dal grafico sottostante l'area della successione B cresce sempre più. Ciò si può notare facilmente anche dall'osservazione dei valori assunti dalle differenze prime e seconde. Osservando i valori delle differenze seconde si nota che sono costanti. Ciò fa intuire che la funzione dell'area è di secondo grado".
Anche in questo caso, la risposta è interessante, esauriente ed espressa con un linguaggio appropriato. Anche in tal caso, però, i piani numerico e grafico sono quelli maggiormente utilizzati sia in fase di esplorazione che in fase di sistemazione da parte degli studenti. Il piano simbolico, come prima, è appena accennato e non si esplicita la relazione che lega la base all'altezza e che consente di esprimere l'area in funzione di una sola variabile. Per esempio, se si usa come variabile indipendente il numero d'ordine dei rettangoli nella successione, indicando con *n* tale variabile, abbiamo che l'area viene espressa dalla formula:

$$f_b(n) = (1 + (n - 1) * 0{,}1) * (n * 0{,}1), \text{ o anche da } f_b(n) = 0{,}01 * n^2 + 0{,}09 * n .$$

La figura 3 si riferisce al foglio di lavoro utilizzato per studiare la terza successione. Gli studenti mettono nella cella A2 il valore costante della misura dell'altezza (0,1) e nella colonna B ottengono le misure delle basi con la formula "=b2*2" a partire dal primo valore (0,1). Le aree vengono calcolate con la formula "=a2*b2". Gli studenti scrivono nel blocco di appunti: "Come si può notare dal foglio elettronico riportato qui a fianco l'area della successione C cresce esponenzialmente. Ciò appare a noi molto chiaro osservando i valori assunti dalle differenze prime e seconde che risultano pari a quelli dell'area".
Si noti che non viene fatto alcun riferimento al grafico, che è quello di una funzione lineare. Incuriosito da questo fatto ho chiesto a Luca e Serena come mai il grafico di una crescita esponenziale risultasse essere una retta: in altri termini chiedevo conto agli studenti di questo apparente paradosso. Sono rimasto piacevolmente sorpreso quando Luca mi ha spiegato che riteneva ciò assolutamente normale, in quanto quel grafico rappresenta la variazione dell'area

al variare della misura della base, che è anch'essa una successione esponenziale[8]. Altri studenti che hanno seguito questa strada, sono invece rimasti prima sorpresi e poi disorientati dal fatto che l'esplorazione numerica portava a dire che si trattava di una crescita esponenziale (la maggior parte ha osservato la costanza fra i rapporti di due termini successivi) e il grafico della variazione dell'area in funzione della variazione della base era quello di una funzione lineare: solo due studenti che hanno completato il lavoro sono riusciti a risolvere l'apparente paradosso osservando, come Luca aveva già fatto, che la linearità dipendeva dal fatto che la variabile indipendente variava anch'essa esponenzialmente.
Questa è una tipica situazione nella quale è opportuno passare dal *laboratorio* alla *lezione*. Nel *laboratorio* gli studenti hanno osservato, fatto esperienza, prodotto e validato congetture, attivato processi risolutivi e comunicativi, in cui hanno utilizzato più o meno adeguatamente le risorse di uno strumento; nel *laboratorio* gli studenti hanno anche lavorato in quella nebbia necessaria a ogni significativo processo di apprendimento. Sono ormai maturi per la *lezione*, ossia una lettura con la guida dell'esperto (l'insegnante) a scopo di sistemazione e istituzionalizzazione delle conoscenze più o meno consapevolmente utilizzate e poi all'analisi e alla riflessione su di esse, all'eventuale apertura verso temi o argomenti che il docente intravede, ma gli studenti non possono ancora autonomamente riconoscere.

DAL *LABORATORIO* ALLA *LEZIONE*

Il primo obiettivo di una *lezione* dovrebbe essere quello della sistemazione e istituzionalizzazione. Inizialmente si sono quindi presentate e discusse alcune tipologie di diverse strategie che gli studenti hanno attuato per risolvere il problema. In seguito mi sono incaricato di produrre io stesso una mia risoluzione, però sullo stile di quelle proposte dagli studenti, cercando di:

a) utilizzare le idee che ritenevo migliori fra quelle utilizzate dai vari gruppi;
b) usare un linguaggio ancora più adeguato, preciso e appropriato di quello utilizzato dagli studenti[9].

Naturalmente, in questa fase della *lezione* mi sono anche preoccupato di far riflettere sull'importanza della ricerca di formule, per ricorrenza o chiuse che esprimessero la variazione dell'area delle successioni dei rettangoli, in particolare cercando di chiarire il perché alcuni studenti sono stati sorpresi dal grafico della terza successione. Relativamente a ciò ho fatto notare che quando si dice "l'area della terza successione di rettangoli varia esponenzialmente", bisognerebbe precisare "rispetto a che cosa varia": ossia bisogna precisare la variabile indipendente.
Ciò suggerisce una possibile fase di apertura verso nuove tematiche, relative alla questione di quale sia, se c'è, la scelta "più naturale" della variabile indipendente. Non le ho affrontate, però, con la classe, perché sentivo che gli studenti non avevano ancora l'esperienza necessaria per apprezzarle. Ho quindi preferito rinviare la discussione a quando gli studenti avranno effettuato altre esperienze di studio di grandezze che variano il cui grafico varia cambia drammaticamente a seconda della scelta della variabile indipendente.
Qui mi limito a osservare che il problema su quale sia la scelta più naturale della variabile indipendente, quella rispetto a cui diventa corretto dire che l'area varia esponenzialmente, è

---

[8] Si noti che anche in questo caso Luca e Serena non producono alcuna formula del tipo $f_c\ (n) = 0{,}0001*2^n$ oppure $\begin{cases} f(1) = 0,0001 \\ f(n) = 2 \cdot f(n-1) \end{cases}$, pur gestendo in modo adeguato il significato degli output del calcolatore e controllando costantemente quanto stanno facendo.

[9] Per fare evolvere verso le forme istituzionali il linguaggio degli studenti, quando mi accorgo che gli studenti hanno capito ma hanno difficoltà ad esprimersi in forma chiara e adeguata, adotto, ormai consapevolmente e volontariamente, la tecnica di usare gli stessi gesti degli studenti ma di accompagnarli con parole del linguaggio istituzionale (Arzarello & Paola, in stampa).

un problema molto simile a quello che affrontò Newton quando si chiese quale grandezza scegliere per studiare , rispetto a questa, le variazioni di tutte le altre grandezze. Newton aveva bisogno di una grandezza che variasse linearmente, con moto rettilineo uniforme e individuò tale grandezza con il tempo. Le variazioni di tutte le altre grandezze avrebbero potuto essere studiate rispetto al tempo. Come osserva Enrico Bellone (Bellone, 1989), Newton osserva in proposito che non è possibile valutare il tempo se non come *tempo* misurato mediante un movimento. Ed è proprio questa una delle principali ragioni per cui Newton avverte il bisogno di precisare che:

"in quanto segue, io non tengo conto del tempo così formalmente considerato, ma, a partire da quantità proposte che sono dello stesso genere, io suppongo che una di esse cresca con flusso equabile: a questa tutte le altre possono essere riferite come se essa stessa fosse tempo, e così, per analogia, il nome tempo le potrebbe essere conferito non impropriamente. E allora, ogni qualvolta che nel seguito incontrerete la parola *tempo* […] con questo nome non si dovrà intendere il tempo formalmente considerato, ma quell'altra quantità, grazie alla cui crescita o flusso equabile, si espone e si misura il tempo" (Newton, *Principia*, cit. in Bellone, 1989, pag. 62)

La riflessione di Newton sarebbe quanto mai opportuna per dare dignità e senso alla questione "quale è la scelta più naturale per la variabile indipendente nello studio della variazione della terza successione di rettangoli?" Si tratterebbe di una riflessione tipica della *lezione* che, quando l'esperienza e la sensibilità degli studenti consentiranno di affrontarla, consentirà approfondimenti e analisi affascinanti, al confine tra la matematica, la fisica, la loro storia e la filosofia.

Spero di essere riuscito a dare un'idea di come *laboratorio* e *lezione* possano integrarsi fortemente e significativamente, l'uno offrendo agli studenti la terra fertile per far germogliare e crescere la pianta della conoscenza, l'altra fornendo gli elementi per rinforzarne le radici attraverso l'analisi e la discussione con la guida dell'esperto.

È in questo modo che, a mio avviso, si creano davvero quelle condizioni che consentono di trasformare l'esperienza in cultura.

Bibliografia

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'algebra come strumento di pensiero. analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderno 6 del CNR, Progetto strategico ITD, Pavia.

Arzarello, F. & Paola, D. (in stampa), Semiotic game: the role of the teacher, *Proceedings of the 31th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, Seul.

Bellone, E. (1989), *I nomi del tempo*, Bollati Boringhieri, Torino.

Hershkowitz, R & Kieran, C. (2001) Algorithmic and meaningful ways of joining together representatives within the same mathematical activity: an experience with graphing calculators *Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, v.1, p. 96 – 107, Utrecht.

Illich, I. (1992), La madre lingua insegnata (Discorso di apertura al plenum del quinto congresso mondiale del World Council of Comparative Education Societies, Parigi, 1984), in Illich, *Nello specchio del passato*, red Edizioni, (titolo originale, *In the Mirror of the Past. Lectures and Addresses, 1978 – 1990*, Maryon Boyars, London)