**Il problema delle parti per un’introduzione al pensiero probabilistico**

Giuseppina Fenaroli\*, Elda Guala\*, Manuel Goizueta#, Domingo Paola°, Giulia Sanna\*

\*Dipartimento di Matematica Università di Genova

# Universitat Autònoma de Barcelona

° Liceo “G. Bruno” di Albenga

**Introduzione**

Il calcolo delle probabilità, a differenza di altre parti classiche della matematica, come l’aritmetica e la geometria, si è sviluppato in tempi relativamente recenti. Questo fatto appare a prima vista curioso, se si pensa che i giochi d’azzardo, noti e praticati fin dall’antichità, comportano valutazioni di carattere probabilistico e che in fondo ogni nostra valutazione è effettuata, in ultima analisi, in condizioni di incertezza. Appare invece del tutto plausibile quando lo si osservi dal punto di vista dello sviluppo della consapevolezza, da parte degli ambienti culturali presenti nelle varie epoche storiche, circa gli ambiti di realtà per cui si ritiene possibile estendere l’uso della “razionalità” e del “calcolo”. Tale uso prevede, infatti, la formulazione di idee e concetti adatti alla formalizzazione delle situazioni in esame, condivisibili nella comunità culturale dominante e, inoltre, operativamente interfacciabili con le capacità computazionali presenti in una certa epoca storica. In mancanza di tali presupposti diventa improbabile lo sviluppo di una qualunque disciplina scientifica. Nella letteratura storica viene indicato come momento di inizio del calcolo delle probabilità l’anno 1654, in cui è datata la corrispondenza tra Pascal e Fermat su quei problemi detti “delle parti” che diedero origine a quella nuova disciplina scientifica che Pascal denominò “aleae geometria”. Però, per evidenziare la complessità delle vicende storiche e intellettuali attraverso le quali questa nuova disciplina è emersa e si è sviluppata, è opportuno tener conto di quanto scrive Antonio Carlo Garibaldi in [Garibaldi, 1982]: *Fino alla metà del secolo XIX, sia i cultori di probabilità che gli storici della matematica si limitavano a indicare l’inizio del calcolo delle probabilità in quel 1654, sottolineando la parte del Cavaliere de Méré, accanito giocatore e uomo di mondo, che propose a Pascal i primi problemi di probabilità. Fu nella seconda metà del 1800 che gli storici della matematica pervennero a segnalare, talora di passaggio e comunque in modo ancor vago e frammentario, alcuni precursori, se non dei* ***concetti****, almeno di una certa* ***problematica*** *di tipo probabilistico.*

Anticipiamo che, ai fini della nostra attuale ricerca in didattica della matematica, siamo particolarmente interessati proprio a certi aspetti della dialettica tra questi ***concetti*** e questa ***problematica*** che sono in sintonia particolare con l’introduzione della probabilità in classe. Tra gli autori più noti che si interessarono ai giochi d’azzardo prima di Pascal e Fermat si possono citare Luca Pacioli, Nicolò Tartaglia, Girolamo Cardano, Giovanni Francesco Peverone, Pietro Cataneo, Lorenzo Forestani. La lettura degli scritti di questi autori può contribuire a rendere in parte plausibile il ritardo con cui il calcolo delle probabilità si è sviluppato rispetto all’aritmetica e alla geometria in quanto rende evidenti alcune criticità significative legate al ragionamento probabilistico: la difficoltà a legare le problematiche sul caso a ragionamenti e strumenti matematici conosciuti; la difficoltà a pensare in termini di ciò che può ancora accadere o, più in generale, la difficoltà a tenere conto delle possibilità a favore o contro un certo evento senza conoscerne l’esito; la difficoltà di trovare adeguate rappresentazioni per lo spettro degli eventi possibili; la definizione di equità in un gioco come guadagno atteso nullo; la rinuncia a individuare, nella casualità con cui si succedono singoli eventi, leggi deterministiche di tipo causa – effetto o volontà di carattere divino e, al tempo stesso, la ricerca di regolarità in media che consentano di approfondire le peculiarità della nozione di casualità.

**Il problema delle parti**

Il problema delle parti, considerato all’origine della nascita del calcolo delle probabilità, consiste nel trovare la corretta suddivisione della posta tra due o più giocatori che interrompono una partita. Nella terminologia pascaliana ciò è detto *faire les partis des jeu* e si utilizza, nel caso di due giocatori, una notazione convenzionale di cui ci serviremo nel seguito: (*n*; *a*,*b*), dove *n* è il numero dei giochi convenuti per vincere la partita mentre gli interi *a*, *b*, minori di *n* rappresentano i punteggi raggiunti dai giocatori al momento dell’interruzione [Garibaldi, 1982]. Tale problema, quando si osservi lo sviluppo delle sue soluzioni nell’ambito della storia delle matematiche può, a nostro avviso, costituire un valido strumento per affrontare in classe, in modo naturale e in un contesto adeguato, molte delle criticità sopra elencate. Inoltre proprio per il fatto che esiste una letteratura storica ricca e cronologicamente estesa, con diversi tentativi di risoluzione, può risultare interessante confrontare tali tentativi con quelli sviluppati in classe dagli studenti [Paola, 1998]. A tal fine può essere opportuno analizzare alcune soluzioni storicamente importanti, schematizzando con la terna (*n*; *a*,*b*) la seguente situazione:

*A e B decidono di giocare a testa o croce con una moneta non truccata. Ogni mano, corrispondente a ogni lancio di moneta, è vinta da A se esce testa e da B se esce croce. Vince la partita il giocatore che per primo arrivi a vincere un numero convenuto n di mani. All’inizio del gioco, ognuno dei due giocatori metterà la sua parte della posta in gioco, p. Il vincitore si prenderà l’intera posta 2p. Prima che la partita sia terminata, però, i giocatori interrompono il gioco; in quel momento A ha vinto* a *mani, mentre B ne ha vinte* b*. Come va divisa la posta in gioco?*

La soluzione di Luca Pacioli (1523)

Pacioli affronta il problema (60; 20,50) e propone di dividere la posta proporzionalmente alle mani vinte prima dell’interruzione:

70 = 20 + 50 mani giocate prima dell’interruzione da A e da B.

*V*(*A*) = vincita di A; *V*(*B*) = vincita di B.

Impostando la proporzione *V*(*A*) : *V*(*B*) = 20 : 50 si ottiene:



Generalizzando le proporzioni si ottiene

*V(A)* :(2*p*) *= a* : (*a+b*)e *V(B)* :(2*p*) *= b* : (*a+b*)

Quindi, per il generico problema (*n*; *a*, *b*) abbiamo:



Osserviamo che Pacioli tiene conto solo del passato del gioco.

La soluzione di Girolamo Cardano (1529)

Cardano propone di dividere la posta considerando i numeri di mani che i due giocatori devono ancora vincere per potersi aggiudicare l’intera partita. Nel caso dell’esempio precedente, (60; 20,50), abbiamo che ad A mancano 40 mani per vincere e a B ne mancano 10. Impostiamo quindi la proporzione

*V*(*A*) : *V*(*B*) = 10 : 40. Applicando la proprietà del comporre si ha *V*(*A*) : (2*p*) *=* 10 : 50 e *V*(*B*) : (2*p*) *=* 40 : 50, da cui = 20%;  = 80%. Generalizzando abbiamo:

*V*(*A*):(2*p*) = (*n* – *b*):(2*n* – *a* – *b*); *V*(*B*):(2*p*)= (*n* – *a*):(2*n* – *a* – *b*);

e quindi  e  .

Osserviamo che Cardano tiene conto solo del futuro del gioco.

La soluzione di Pietro Cataneo (1559)

Cataneo affronta il problema (*n*; *a*,*b*) ragionando sul numero massimo di mani che possono essere giocate affinché il gioco si concluda con la vittoria di uno solo dei due giocatori, che è (*n*–1) + (*n*–1) + 1 = 2*n* – 1. Per esempio, nel caso considerato da Cataneo, cioè (8; 5,3), il numero massimo di mani che possono essere giocate in totale è 15 (quando la partita finisce 8 a 7 per A o per B). Cataneo sceglie di suddividere una porzione della posta tenendo conto del punteggio che hanno i due giocatori al momento dell’interruzione della partita e di dividere in parti uguali la porzione di posta rimanente. Così, nella situazione (8; 5,3), A prende i  della posta e B ne prende i . Gli altri della posta vanno divisi in parti uguali. Si ottiene che:

*V*(*A*) = 2*p* +  (2*p* –2*p*) = 2*p*

*V*(*B*) = 2*p* +  (2*p* –2*p*) = 2*p*

Per il problema generalizzato (*n*; *a*,*b*) si ottiene:





Osserviamo che Cataneo, per suddividere equamente la posta, prende in considerazione sia il passato del gioco (il punteggio su cui la partita è stata interrotta) sia il futuro (il numero massimo di partite giocabili).

La soluzione di Blaise Pascal (1654)

Per dare un’idea della soluzione di Pascal utilizziamo, per rappresentare il problema delle parti, la notazione (– *a’*,–*b’*), che mette in risalto che ad A mancano *a’ = n* – *a*  partite per vincere e a B ne mancano *b’* = *n* – *b*. La soluzione di Pascal è tipica del procedimento di analisi: suppone di avere vinto e quindi di avere diritto ad avere tutta la posta e poi procede a ritroso osservando quali sono i passi indietro o meglio gli stadi che deve attraversare per giungere alla situazione da cui si è partiti. Il procedimento di Pascal si fonda sulle due seguenti regole di equità:

* si divide la posta per due nelle situazioni in cui i giocatori hanno vinto lo stesso numero di partite;
* ciascuno prenda ciò che gli spetta in caso di perdita (*x*) più metà della differenza (*y* – *x*) tra ciò che gli spetta in caso di vittoria (*y*) e ciò che gli spetta in caso di perdita (*x*).

Vediamo il ragionamento di Pascal in alcuni casi particolari. Per esempio, nel caso per (– 1,– 2) Pascal considera ciò che si può verificare giocando un’ulteriore partita: (0,– 2) che decreta la vittoria di A, oppure (– 1,– 1) in cui A e B dovrebbero dividersi la posta in parti uguali. Quindi, detta 2*p* la posta, A ha diritto ad avere, nella situazione (– 1,– 2), la somma  mentre a B spetta . Analogamente, nel caso (– 1,– 3), giocando un’ulteriore partita abbiamo le seguenti possibilità: (0,– 3), in cui A ha diritto a prendere tutta la posta, oppure (– 1,– 2), che è già stato risolto e che, come abbiamo visto, assegna ad A la somma . Pertanto, nel caso (0,– 3) A ha diritto a prendere  e B ha diritto ad avere .

La soluzione di Pierre Fermat (1654)

Per dare un’idea della soluzione di Fermat, riportiamo le parole che Pascal stesso scrisse in una lettera a Fermat per spiegare la soluzione trovata da Fermat sul caso ( – 2 , – 3) quando, cioè, mancano al più quattro partite alla conclusione del gioco [Devlin, 2008]: *Dunque per vedere quanti esiti possono avere quattro partite fra due giocatori, è necessario immaginare che essi giochino con un dado a due facce (giacché non sono che due giocatori) come a testa o croce e che essi gettino quattro di questi dadi (poiché essi giocano in quattro partite); e adesso è necessario vedere quanti assetti differenti possono avere questi dadi. Questo è agevole da verificare: essi possono averne sedici che è la seconda potenza di quattro, cioè il quadrato. Immaginiamo che una delle facce sia segnata A, favorevole al primo giocatore, e l'altra B, favorevole al secondo; dunque questi quattro dadi possono porsi in uno di questi sedici assetti*:

AAAA ABAA BAAA BBAA AAAB ABAB BAAB BBAB

AA BA ABBA BABA BBBA AA BB ABBB BABB BBBB

*E poiché mancano due partite al primo giocatore tutte le facce che hanno due A lo fanno vincere, dunque ce ne sono per lui 11; e poiché mancano tre partite al secondo, tutte le facce che hanno tre B lo fanno vincere. Dunque è necessario che essi dividano la somma come 11 a 5*.” L’idea, generale, quindi, è quella di contare il numero di partite che mancano, diciamo *m*, considerare i casi possibili (2*m*) e, fra questi, contare quelli favorevoli alla vincita di uno dei due giocatori, per esempio A. Se *k* sono tali casi, allora, detta 2*p* la posta, A deve ricevere .

**L’esperienza in classe**

In esperienze passate [Paola D. 1998], con diverse classi che non avevano ancora affrontato temi legati al calcolo delle probabilità, era stato proposto di affrontare il problema (6; 5,3). In tutte le esperienze condotte si era osservato che gli studenti risolvevano il problema “à la Pacioli”. Solo l’intervento dell’insegnante, che proponeva agli studenti di trovare un’equa suddivisione della posta nel caso in cui la partita fosse stata interrotta sull’1 a 0, induceva gli studenti a riflettere sui limiti della suddivisione in parti proporzionali al punteggio su cui la partita era stata interrotta e ad avviare la ricerca di proposte di soluzioni alternative. In questa ricerca prima o poi emergevano quasi sempre soluzioni che iniziavano a tenere conto anche di ciò che sarebbe ancora potuto accadere. Nell’esperienza che qui descriviamo abbiamo pensato di modificare leggermente la consegna per evitare che gli studenti cadessero subito nella trappola della suddivisione in parti proporzionali al punteggio su cui la partita era stata interrotta:

*Domingo e Giulia giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l’esito. Vince tutta la posta di 24 euro (12 dei quali sono di Domingo e 12 di Giulia) chi per primo totalizza 6 punti. La partita viene però interrotta sull’1 a 0 per Giulia. Come devono dividersi la posta Domingo e Giulia in modo tale che la suddivisione sia giusta?* La parte dell’esperienza che qui descriviamo ha richiesto un’intera mattinata di lavoro (cinque ore). Per quindici minuti gli studenti hanno lavorato individualmente, in modo tale che ciascuno potesse farsi un’idea delle possibili strategie risolutive; successivamente sono stati formati cinque gruppi composti da quattro o cinque studenti che hanno lavorato alla ricerca della strategia risolutiva per circa due ore. Nella seconda parte della mattinata sono state presentate e discusse collettivamente le strategie risolutive proposte da ciascun gruppo. Esse possono essere suddivise in tre tipologie principali:

1. ogni giocatore prende metà della posta: infatti, se la partita è stata interrotta, non c’è un vincitore né un perdente;
2. la somma *s* che spetta al giocatore che sta vincendo è una funzione che varia linearmente con la differenza *d* di punteggio. In particolare *s* = 2 *d* + 12;
3. la posta deve essere suddivisa in parti proporzionali al punteggio (soluzione à la Pacioli).

Nonostante la richiesta facesse riferimento a una situazione precisa (1 a 0 per Giulia), tutti i gruppi hanno sentito il bisogno di esplorare altri casi; ci sembra di potere affermare che per alcuni studenti la considerazione di casi diversi dall’1 a 0 sia stata suggerita dall’esigenza di generalizzare la soluzione trovata, mentre per altri sia stata motivata dall’opportunità di verificarne la correttezza. È interessante osservare che la discussione collettiva ha aiutato a superare la difficoltà iniziale ad attivare strategie risolutive rivolte al futuro, facendo prima emergere la proposta di soluzioni miste, à la Cataneo e, in seguito, soluzioni che cercavano di tenere in considerazione ciò che ancora poteva accadere e quindi nello spirito di quelle proposte da Cardano, Pascal e Fermat. Per esempio, Simone, ha proposto la seguente strategia risolutiva: “*si moltiplica 2.4* [una sorta di premio per ogni partita vinta] *per il numero di partite vinte da ciascun giocatore e poi si addiziona al risultato ottenuto la metà della posta rimasta*”. Si tratta di una strategia mista che assegna una porzione della posta in gioco in modo proporzionale al punteggio su cui la partita è stata interrotta e divide in parti uguali la posta restante, perché, come ha detto Simone, se la partita non è terminata è *giusto* dividere la posta *ancora in gioco* in parti uguali fra i due giocatori. Alessandro fa però notare che, secondo questa soluzione, i due giocatori avrebbero diritto ad avere la stessa posta sia nel caso (6; 1,0), sia nel caso (6; 5,4). In entrambi i casi, infatti, al giocatore che sta vincendo spetterebbero 13.2 euro. Eppure, secondo Alessandro, “*il 5 a 4 è un punteggio più favorevole dell’1 a 0, perché chi vince 5 a 4 è più vicino alla vittoria*”. Nel prosieguo della discussione Alessandro afferma esplicitamente che “*una soluzione è equa se è proporzionale a quanto manca alla vittoria*”. Qui è chiaro e anche consapevole il riferimento a ciò che ancora deve accadere: siamo quindi di fronte a un approccio vicino a quello del calcolo delle probabilità. Una soluzione che ha trovato forte condivisione è stata quella proposta da Alessia: la somma *s* che spetta al giocatore che sta vincendo deve essere una funzione che varia linearmente con la differenza *d* di punteggio. In particolare *s* = 2 *d* + 12. Per esempio, nel caso (6; 1,0) il giocatore che vince ha diritto a una posta *s* = 14 euro; nel caso (6; 5,2) il giocatore vincente ha diritto a una posta *s* = 18 euro. La soluzione è stata apprezzata per la sua semplicità, per il fatto che utilizza uno strumento matematico (le funzioni lineari) ben noto alla classe e per il fatto che tiene conto di quello che sembra essere un parametro molto importante per la soluzione del problema: la differenza di punteggio fra i due giocatori. Nonostante il gradimento della maggior parte della classe, alcuni studenti hanno portato alcune argomentazioni molto interessanti, fondate su casi limite, che hanno creato nella stessa Alessia forti perplessità sulla adeguatezza della soluzione che aveva proposto. In particolare Matteo suggerisce di confrontare il caso (1000;999,969) con il caso (1000;30,0). Tali casi portano alla stessa suddivisione della posta in gioco con il metodo proposto da Alessia, ma “*per vincere, chi è a 969 deve fare 30 vittorie di seguito per pareggiare, mentre a chi è a 999 basta un solo tiro per vincere*”. Alcuni studenti, fino alla fine della discussione, hanno mostrato forti difficoltà a ragionare in termini di ciò che ancora può accadere; per esempio Maria Laura, dopo l’intervento di Matteo e quello di altri studenti che considerano casi analoghi, afferma “*è giusto lavorare sulla differenza, inutile pensare a quello che potrebbe accadere, perché intanto non accadrà*”. Ciò suggerisce un’avversione a considerare situazioni caratterizzate da incertezza. Durante la discussione è emersa l’esigenza di avere strumenti di rappresentazione e valutazione dell’incerto; si tratta di una condizione assai importante per preparare il terreno al calcolo delle probabilità, argomento delicato e causa di diversi equivoci argomentativi, come la storia mostra. Le modalità con cui il problema è stato affrontato dagli studenti sembrano potersi ispirare a quel modello che Jaako Hintikka chiama “*logic of inquiry*” [Hintikka, 1998, 1999], un modello dinamico e dialettico di confronto fra due agenti, il primo intenzionato a convalidare e il secondo a confutare affermazioni; si tratta di un modello che sembra avere interessanti applicazioni nella didattica della matematica [Arzarello & al, 2014].

**Conclusioni**

Nell’attività di risoluzione del problema proposto, gli studenti non avevano la possibilità di confrontarsi con una teoria probabilistica in qualche modo già data. Per esempio, gli studenti non sapevano che cosa fosse un gioco equo; la risoluzione del problema non era conseguibile, per gli studenti, con le leggi del calcolo delle probabilità, in quanto a loro ignote. Si trovavano quindi realmente in quel processo non finito di ricerca di ipotesi che caratterizza la risoluzione di problemi in un ambiente aperto, nel senso di Cellucci, [Cellucci, 1998]. L’efficacia delle strategie che hanno messo in opera, difficilmente poteva avere un riscontro sperimentale o teorico; l’unico strumento di controllo erano il confronto e il dialogo con altri risolutori. La bontà di una soluzione era una proprietà che andava continuamente condivisa, concordata, discussa, in base a criteri che via via cambiavano.

Naturalmente, visto che l’obiettivo didattico di tale attività era un’introduzione motivata e significativa al calcolo delle probabilità e ai suoi concetti fondamentali [Fenaroli, G., Penco, M.A. 1983], un’altra strada di riflessione sulle strategie risolutive scelte consisteva nel confronto con le soluzioni proposte dai matematici che si occuparono di questo problema nel corso del tempo e che crearono le basi per la nascita del calcolo delle probabilità. Pertanto una successiva attività in questa sperimentazione, consistita in due mesi di lavoro in classe per quattro ore alla settimana, è stata la proposta agli studenti delle soluzioni di Pacioli, Cataneo, Cardano, Pascal e Fermat. Non abbiamo qui la possibilità di descrivere le modalità con cui si è svolta tale attività e i risultati che ha prodotto. È però interessante osservare che la maggior parte degli studenti, almeno inizialmente, ha affermato di preferire le soluzioni di Pacioli e Cataneo, perché si basano sui punteggi raggiunti e quindi sono *più realistiche* rispetto a quelle che considerano le partite che potrebbero ancora accadere e che, pertanto, sono *incerte*. Altri fattori ritenuti da molti studenti veri e propri punti di forza di una soluzione sono stati la semplicità, la facilità di applicazione e di generalizzazione con una formula risolutiva chiusa, che consenta di risolvere velocemente il problema nelle varie situazioni che si possono presentare. Le soluzioni di Pascal e Fermat, sicuramente più complesse di quelle di Pacioli, Cataneo e Cardano, sono state considerate inizialmente meno convincenti dalla maggior parte degli studenti. Solo dopo una lunga e sistematica attività di discussione e di considerazione di diversi casi particolari gli studenti hanno iniziato ad apprezzare le soluzioni di Pascal e Fermat. L’aspetto che riteniamo più formativo di questa attività è l’occasione che gli studenti hanno avuto di confrontarsi, in tempi e spazi adeguati, con alcuni prodotti culturali preesistenti nella storia della matematica, cioè le soluzioni al problema delle parti e, più in generale, la stessa teoria della probabilità.

**Bibliografia**

Arzarello, F., et al. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching Mathematics and its Applications* 33(1): 39-51.doi: 10.1093/teamat/hru002

Barra, M.(1992). Il “problema della divisione della posta in gioco” e delle valutazioni di probabilità: 500 anni di storia - Soluzione bayesiana, in Atti del Convegno *Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*, Ancona, p. 143-174.

Cellucci, C. (1998). *Le ragioni della logica*, Laterza, Roma-Bari.

Devlin, K. (2008). *La lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano

Fenaroli, G., Penco, M.A. (1983). Origini del concetto di probabilità nel '600. In F. Bevilacqua (cur.) *Storia della fisica, un contributo per l'insegnamento della fisica.* Milano, Angeli, 1983, pp. 112-126.

Garibaldi, A.C.(1982).Sulla preistoria del calcolo delle probabilità, in *Atti del Convegno La Storia delle Matematiche in Italia*, Cagliari, p.377-384.

Hintikka, J. (1998). The principles of Mathematics revisited. Cambridge: Cambridge University Press.*.*

Hintikka, J. (1999). Inquiry as Inquiry: A logic of Scientific Discovery. *Springer Science+Business Media Dordrecht.*

Paola D. (1998).‘Il problema delle parti. Prassi didattica e storia della matematica’, *La didattica delle scienze*, 198, 31–16.

**Fonti storiche consultate**

Bernoulli, J. (2006), *The Art of Conjecturing*, (translated with an introduction and notes by E. D. Sylla), The Johns Hopkins University Press, Baltimora.

Girolamo Cardano, *Practica arithmeticae et mensurandi singularis,* Mediolani, 1539; cap. 61 esimo: “De straordinariis et ludis”. Nelle Opere di Cardano (Lugduni, 10 voll., 1663) essa figura nel vol. IV mentre il De ludo aleae è ivi pubblicato per la prima volta nel vol. I (*Opuscola moralia et philosophica...*)

Pietro Cattaneo da Siena, *Le pratiche delle due prime matematiche con la aggionta, libro d’abaco e geometria...,* 2nda edizione, Venezia, 1559, carte 65 e verso.

Luca Pacioli da Borgo, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, 1494*; 2nda edizione, Vinegia, 1523, parte I, distinctio IX, trac. X de straordinariis, carta 197 e verso.