On sent les mathématiques en classe à travers les nouvelles technologies

Domingo Paola
Liceo scientifico A. Issel – Finale Ligure
G.R.E.M.G. - Département des mathématiques de l'Université de Gêne

Les technologies aujourd'hui disponibles dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques offrent aux étudiants et aux enseignants des ressources autrefois impensables. Il s'agit de changements qui ont un caractère plus culturel que technique et qui, pour être exploités efficacement , ont besoin d'étude et de réflexion. Comme a écrit Jimmy Kaput "We are early in an exciting new era for technology in Mathematics Education. Both the representational infrastructures are changing and the physical means for implementing them are changing. We are seeing new alphabets emerging, new visual modalities of human experience are being engaged and new physical devices are emerging – all at the same time. Much work need to be done" (Kaput, 2002). Les nouvelles technologies permettent de projeter, de proposer et de réaliser des activités didactiques où les élèves ont la possibilité de faire de véritables expériences de milieux et d'objets mathématiques. Le titre que j'ai choisi a le but d'évoquer ce que Galileo Galilei appelait *expériences sensées*, ("sensate esperienze" en italien). Le mot italien "sensate" est employé avec deux différents signifiés : les expériences sont liées aux aspects perceptifs, mais elles sont guidées par la raison et la théorie. Quelques modalités d'utilisation des nouvelles technologies, que je vais soutenir dans ma présentation orale, rendent possibles des expériences sensées et, précisément pour cela, permettent de favoriser :

- la construction de signifiés des objets d'étude;
- le début de la pensée théorique.

Ma présentation se base sur deux assomptions fondamentales.
La première concerne le rôle et la fonction qu'un système d'éducation et d'instruction devrait avoir dans l'actuelle société. La tâche principale de l'école d'aujourd'hui est d'aider les jeunes à acquérir la capacité d'exercer la pensée critique et consciente. Ceci est indispensable dans une société dévastée par la banalisation du langage publicitaire qui multiplie les rêves et réduit la fantaisie et la créativité, qualités indispensables pour affronter les défis de plus en plus difficiles et complexes que les problèmes politiques, sociaux et économiques nous posent.
La deuxième assomption concerne un des problèmes principaux de l'éducation mathématique, celui de la construction de signifié des objets mathématiques : les connaissances mathématiques, d'où viennent-elles? Comment va-t-on les construire? Comment s'organisent-t-elles et comment s'y reporter? Les recherches sur les neurosciences et quelques positions des sciences cognitives mettent en évidence une composante biologique dans la construction de la connaissance: nos idées, celles mathématiques en particulier, s'enracinent dans nos expériences sensorielles et motrices. Par exemple selon Lakoff et Nunez, "The detailed nature of our bodies, our brains, and our everyday functioning in the world structures human concepts and human reason. This includes mathematical concepts and mathematical reason" (Lakoff & Nunez, 2000). Selon Seitz "the motor system including related structures is a self – organizing dynamical system contexted among musculoskeletal, environmental, and social forces. We do not simply inhabit our bodies; we literally use them to think with" (Seitz, 2000). D'autres recherches mettent en évidence, dans la construction de la connaissance, des composantes culturelles et sociales, outre celles individuelles: "In opposition to the objectivist referential approach, the semiotic cultural-approach that I am advocating does not claim a transcendental status for mathematical objects. [The semiotic cultural approach] conceives of mathematical knowledge as the result of a cognitive praxis: ideas and mathematical objects are conceptual forms of historically, socially and culturally embodied reflective mediated activity" (Radford, in print). En synthèse, la seconde assomption affirme qu'une grande partie des connaissances mathématiques peuvent être construites en favorisant l'intégration des racines biologiques-cognitives et de celles culturelles des idées mathématiques. Cette intégration peut être favorisée et rendue possible grâce à une action ciblée et consciente de l'enseignant, surtout dans la gestion de l'interaction sociale en classe et dans l'emploi des instruments comme médiateurs dans les processus de construction et de communication des connaissances. Pour ce dernier aspect, de récentes recherches dans le domaine de la psychologie suggèrent de prêter une attention particulière à la gestualité des étudiants, parce que les gestes jouent un rôle très important dans les processus de conceptualisation (Goldin Meadow, 2000) L'enseignant, en d'autres termes, a la tâche de favoriser l'intégration entre le niveau perceptif-corporel et le niveau socialement partagé des mathématiques comme un patrimoine culturel historiquement situé.
Certes ces deux assomptions ont des implications qui ne peuvent qu'influencer les projets de milieux d'enseignement/apprentissage et la réalisation d'activités didactiques. En particulier, les principales caractéristiques des milieux d'enseignement/apprentissage dans lesquels ont été réalisées les activités didactiques que je vais présenter sont les suivantes :

- une didactique longue, finalisée à la construction de signifié des objets d'étude;
- l'attention non seulement aux produits, mais aussi et surtout aux processus de la pensée que les étudiants activent dans la résolution des problèmes;
- l'attention aux aspects liés à l'interaction sociale (des travaux en petits groupes, des discussions mathématiques orchestrées par l'enseignant, l'observation et l'évaluation des argumentations produites par les étudiants, observation de leur capacité de les soutenir, d'écouter celles de leurs camarades et d'intervenir de façon pertinente);

- l'utilisation d'instruments comme médiateurs sémiotiques culturels dans les processus d'acquisition des connaissances;
- l'attention au rôle des racines cognitives dans la construction de signifiés des objets d'étude et au rôle des théories dans le passage de formes de connaissance implicite et tacite à des formes de connaissance explicite et consciente.

Avant de passer à la description et à l'analyse d'un exemple d'activité didactique, j'aimerais souligner deux possibles risques relatifs à l'emploi de nouvelles technologies. Le premier est celui d'assumer une position acritique de refus, par exemple par préoccupation que l'emploi de nouvelles technologies puisse inhiber l'acquisition de composantes importantes pour une bonne formation mathématique. Le deuxième est celui d'une approche purement technique ou qui, plus en général, voit les instruments uniquement comme de simples prothèses utilisées pour remédier à une carence d'habilité. Ces deux positions devraient être, l'une et l'autre, dialectiquement dépassées grâce à une vision en mesure de considérer les instruments technologiques comme imprégnés de culture et de les utiliser en tenant compte de l'apport qu'ils peuvent donner à l'évolution individuelle vers un savoir institutionnel, socialement partagé. Comme a écrit Rabardel, "Les approches historico-culturelles de la psychologie ont mis en évidence que les fonctions psychiques supérieures se forment, chez l'homme, dans l'histoire culturelle et sociale. Les artefacts, les outils, les signes contribuent à la formation des fonctions psychiques et des connaissances. Les instruments constituent des formes qui structurent et médiatisent nos rapports aux situations et aux savoirs" (Rabardel, 1999).

Pour des raisons de temps et de clarté, la discussion portera sur quelques exemples concernant l'emploi de nouvelles technologies pour favoriser l'acquisition du concept de fonction. En particulier, dans ce résumé, je présente seulement un des exemples que j' analyserai ensuite dans ma présentation orale. L'analyse se base sur un enregistrement video réalisé dans une première classe de lycée scientifique (étudiants âgés de 14 ans). Dans cette activité, dont l'objectif était de commencer à étudier les relations existantes entre les propriétés des graphiques de la loi horaire de la position et de la loi horaire de la vitesse, on a employé des calculatrices graphiques connectées à un senseur de mouvement. Avec cet instrument, les étudiants peuvent observer la trace de la variation dans le temps de la position d'un des leurs camarades qui bouge par rapport à un système de référence dont l'origine est fixée dans le senseur. Les élèves avaient déjà employé précédemment les senseurs de mouvement dans des activités qui avaient comme objectif de faire expérimenter la possibilité de modifier le graphique d'une fonction (celui de la loi horaire de la position) en modifiant le propre mouvement. Par exemple, dans une des activités précédentes, les étudiants s'étaient déjà aperçu que s'approcher de l'origine du système de référence ou s'en éloigner produit des graphiques qui sont, respectivement, décroissants ou croissants; ou bien que l'augmentation de la vitesse donne des graphiques plus "raides", c'est à dire des graphiques qui ont augmenté la valeur absolue de la pente locale. Je vais décrire maintenant, en peu de mots, l'activité, de la durée de deux heures, que les étudiants ont vécue en classe et ensuite j'analyserai, dans le détail, deux brefs moments dont je projetterai l' enregistrement vidéo pendant l'exposition orale.

Après avoir divisé les étudiants en petits groupes, les activités ont été effectuées dans l'ordre suivant :

1. un étudiant de chaque groupe a été appelé à bouger par rapport au senseur de façon que le graphique de la loi horaire puisse reproduire, le plus fidèlement possible, un graphique dessiné au tableau par l'enseignant. Les camarades du groupe avaient la possibilité de répéter le mouvement pour remédier aux éventuelles différences importantes entre le graphique dessiné au tableau et celui de la loi horaire. A la fin de chaque mouvement, les autres étudiants étaient invités à intervenir dans la discussion collective guidée par l'enseignant, pour individualiser d' éventuelles erreurs commises et leurs causes.
2. De nouveau, au moins un étudiant par groupe a été appelé à bouger par rapport au senseur. Mais cette fois, le mouvement devait être accompli de façon que la trace de la loi horaire, projetée sur le mur à l'aide d'un vidéo écran connecté à un tableau lumineux, restât derrière l'étudiant qui se déplaçait ; elle pouvait donc être vue par les camarades mais pas du tout par celui qui effectuait le mouvement. Pendant son mouvement l'étudiant devait décrire les principales caractéristiques du graphique de la loi horaire visible aux camarades. Les autres élèves étaient invités à intervenir à la fin du mouvement pour mettre en évidence d'éventuelles erreurs commises dans la description et pour en expliquer les causes éventuelles.
3. Au moins un étudiant par groupe, en donnant la précédence à ceux qui n'avaient pas encore eu la possibilité de se déplacer, a du accomplir un mouvement par rapport au senseur de façon que le graphique de la loi horaire de la position fut généré et projeté sur le mur, visible à tous. A la fin du mouvement tous les étudiants étaient invités à participer à une discussion collective ayant le but de réussir à individualiser les caractéristiques essentielles du graphique de la loi horaire de la vitesse.

Dans un bref enregistrement extrait de l'activité 1, on voit M., qui, devant reproduire, en se déplaçant, le graphique dessiné sur le tableau (voir fig. 1) regarde le tableau et l'écran pour coordonner ses mouvements.

Fig. 1

M. réussit à se déplacer de façon que le graphique qu'il reproduit soit très semblable à celui dessiné sur le tableau, démontrant ainsi une bonne capacité de coordination et un bon niveau de connaissance tacite: M. sait *comment* se déplacer pour reproduire le graphique tracé au tableau. Dans la discussion qui suit, un des camarades de son groupe, E., décrit avec des mots le mouvement de M., en s' aidant avec des gestes expressifs des mains qui révèlent une bonne compréhension du phénomène observé.

E. "D'abord il se déplace lentement" [il bouge la main droite horizontalement vers la droite], …"après vite" [il bouge rapidement sa main droite vers le haut, fig.2a] …"ensuite il descend tout de suite" [il bouge sa main rapidement jusqu'à toucher le banc, fig.2b]… "puis il ralentit" [il bouge lentement sa main vers la gauche, en décrivant en l'air une courbe convexe, d'abord descendante et puis montante fig.2c]… "et de nouveau très vite" [sa main monte vers la droite, rapidement fig. 2d]… "et enfin il s'arrête" [en esquissant un mouvement horizontal de sa main vers la droite].

a b c d

Fig.2

Les gestes d'E. démontrent qu'il a clairement compris le phénomène observé, en particulier les relations entre le graphique et le mouvement . On peut dire que les gestes de ses mains contiennent toutes les caractéristiques des loi du mouvement. En effet quant il veut décrire une augmentation de la vitesse, sa main bouge plus vite; vice versa il bouge plus lentement sa main quant il veut décrire une diminution de vitesse. Sa main trace en l'air des profils semblables au graphique dessiné sur le tableau et reproduit sur le mur grâce à l'écran vidéo. Dans les graphiques cartésiens, toutefois, les informations relatives aux variations d'un graphique (il croît ou décroît et comment croît-il ou décroît-il?) sont codifiées statiquement en un signe unique, qui est le graphique même. Cela peut rendre quelques informations difficilement accessibles, en particulier les relations entre la concavité du graphique et les changements de vitesse de la variable dépendante par rapport à celle indépendante. Dans les gestes d'E. au contraire, il y a deux aspects clairement distingués: le premier concerne la trajectoire de sa main, qui reproduit la forme du graphique de la loi horaire de la position; le deuxième concerne la vitesse avec laquelle se déplace sa main qui reproduit les variations de vitesse du corps en mouvement. On peut dire que les gestes d'E. peuvent constituer une sorte d'instrument de médiation sémiotique entre le phénomène observé (mouvement de M.) et le signe culturel employé pour le représenter (le graphique cartésien de la loi horaire de la position). Naturellement les gestes suggèrent un processus d'intériorisation des relations qui lient la croissance et la concavité d'un graphique à la vitesse et à la variation de vitesse d'un corps, mais ils créent aussi un possible espace de communication dans la classe qui peut favoriser l'évolution vers les signifiés scientifiques institutionnels des signes introduits par l'enseignant sur le tableau pour d' autres étudiants aussi. En effet les mots et les gestes d' E. sont ensuite utilisés par d' autres étudiants aussi au cours de la discussion, soit pour expliquer aux autres, soit pour expliciter à soi même.

Dans un autre bref extrait d'enregistrement tiré de l'activité 2, G. décrit, pendant qu'il bouge avec le senseur et la projection du graphique placés derrière lui, les caractéristiques du graphique de la loi horaire de la position. Les mots qu'il utilise sont ceux liés à l'expérience quotidienne du mouvement. En se référant au graphique semblable à celui de la figure 3 il dit:

G.: "ligne horizontale…monte doucement…descend vite…ligne horizontale …monte vite…halte" …

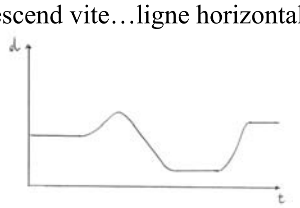

Fig. 3

Comme on peut le remarquer, les mots non seulement sont fortement liés aux expériences perceptives, mais ils ne permettent pas non plus, par exemple, une classification efficace et adéquate entre les différents genres de croissance. Les expressions "il monte doucement" et "il monte vite" ont un sens seulement en termes relatifs l'un avec l'autre et il ne semblent pas consentir à G. d'apprécier les variations de vitesse à l'intérieur de chacun de ces passages qu'il caractérise avec un seul terme ("doucement" ou "vite"). Bien plus riche en signifié et en ultérieurs développements serait la classification des différentes sortes de croissance avec des mots du type "il croit constamment", "il croit de moins en moins" et "il croit de plus en plus", qui permettraient d'identifier des graphiques de fonctions croissantes (respectivement) linéaires, concaves, convexes. Naturellement un rôle fondamental dans la construction de signifié est joué par l'enseignant : son intervention est cruciale pour permettre aux étudiants de devenir conscients du signifié institutionnel des concepts qui sont l'objet de leur apprentissage. Certainement, dans le cas de G., mais aussi dans celui d'E. et d'autres étudiants, on peut noter que le langage qu'ils utilisent est encore profondément lié aux aspects perceptifs, aux expériences de la vie quotidienne, tandis que certains de leurs gestes et de leurs mouvements incorporent déjà des aspects du savoir institutionnel. On peut dire que les étudiants se trouvent dans une sorte de zone de développement proximale au sens de Vygotsky (Vygotsky, 1978). L'enseignant devrait les aider sur le plan linguistique en leur suggérant les mots les plus adéquats soit pour décrire ce qu'ils démontrent d'avoir commencé à comprendre soit pour favoriser le passage d'une connaissance tacite à une connaissance consciente.

La troisième activité qui avait comme objectif celui de commencer à expliciter les relations entre le graphique de la loi horaire de la position et celui de la vitesse, confirme que désormais les étudiants ont compris comment contrôler un graphique et comment le reproduire à travers le mouvement. Ils savent en plus que la vitesse est liée à la pente locale et la concavité (même si seulement quelques uns l'appellent ainsi) à la variation de vitesse, mais leurs références se situent encore seulement aux aspects perceptifs. Cela est confirmé par la difficulté que les élèves démontrent d'avoir dans l'interprétation des vitesses négatives, c'est à dire le fait que le graphique de la vitesse puisse aussi descendre sous l'axe du temps. Une vitesse négative n'a pas de sens perceptivement: sa signification demande un recours à la théorie que les étudiants ne semblent pas encore en mesure d'accomplir de façon autonome et pour lequel le rôle de l'enseignant est fondamental. De ces propos on peut déduire que le choix d'employer les nouvelles technologies dans l'enseignement apprentissage des mathématiques ne va pas du tout diminuer l'importance du rôle de l'enseignant, bien au contraire. L'enseignant est le garant du processus de construction de signifié des objets d'étude; il est le garant du processus de départ vers le savoir théorique et vers la compréhension du rôle que ce dernier joue pour donner lieu à la pensée rationnelle. L'enseignant doit en plus favoriser la genèse de schémas d'emploi des instruments finalisés aux objectifs cognitifs à poursuivre. Les instruments comme on l'a déjà dit, ne sont pas neutres, mais ils sont imprégnés de savoir et de culture, mis à disposition des étudiants avec des activités ciblées. Cela implique des conséquences aussi sur le signifié même des objets d'étude. L'histoire des mathématiques est riche en exemples instructifs: par exemple le compas de Descartes, construit à partir des idées du mouvement et de l'exigence de voir les courbes au moment de leur naissance pour en capturer le signifié, porte graduellement à prendre en considération les aspects algébriques d'une courbe. La génération de mathématiciens qui a suivi Descartes se contenta ainsi des équations et prêta de moins en moins attention à la façon dont, en fait, on construit les courbes (Shea,1991). De la même façon, le recours aux technologies, aux expériences et aux métaphores liées au mouvement, véhicule des signifiés différents de ceux induits par des exemples de fonctions définies par points ou sur des ensembles finis et vues comme des sous ensembles de couples du plan cartésien . En plus, comme a dit Radford, le système senseur- calculateur "is more than a gadget to economize actions. It carries in itself, in a compressed way, socio – historical experiences of cognitive activity and scientific standards of investigation . However, by taking over some of the human actions, certain aspects of the socio – historical experiences that the system holds remain 'hidden' from the individuals using it" (Radford, 2005). Enfin il faut préciser qu' il ne suffit pas que l'enseignant mette les étudiants en condition de faire des expériences: tous les jours les élèves font des expériences directes liées au mouvement. Ce qui distingue ces expériences des activités prises en considération précédemment c'est le conteste dans lequel elles viennent effectuées et la présence d'un adulte, l'enseignant, qui les propose, les structure et les analyse avec des objectifs précis de caractère didactique. Comme a écrit Luis Radford, "Cultural conceptual objects are lighthouses that orient navigators' sailing boats. They impress classroom interaction with a specific teleology" (Radford, in press). Naturellement la conscience de l'enseignant de la dimension historique culturelle des objets des mathématiques a un grand impact sur le type d'interaction sociale en classe et sur les modalités de construction de signifiés (Furinghetti, 1997).

Bibliographie

Furinghetti, F. : 1997, History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies in linking different domains, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55 – 61.

Goldin – Meadow, S.: 2000, Beyond Words: The Importance of Gesture to Researchers and Learners, *Child Development*, 71, 231 – 239.

Kaput, J.: 2002, Implications of the Shift from Isolated, Expensive Technology to Connected, Inexpensive, Divers and Ubiquitous Technologies, in (Fernando Hitt ed.) *Representations and Mathematics Visualization*, Mexico, p. 80 – 109.

Lakoff, G. & Nunez, R.: 2000, *Where Mathematics Comes From,* Basic Books, New York.

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, in Bailleul M. (Ed.) *Actes de la Xème école d'été de didactique des mathématiques*, IUFM de Caen.

Radford, L.: 2005, The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (Eds.), Activity and Sign. Grounding Mathematics Education (pp. 137-152). New York: Springer.

Radford, L.: (in press), The anthropology of meaning, *Educational Studies in Mathematics*.

Seitz, J. A.: 2000, The Bodily Basis of Thought, New Ideas in Psychology: An International Journal of Innovative Theory in Psychology, 18 (1) 23 – 40.

Shea, W.R.: 1991, *The Magic of Numbers and Motion. The Scientific Career of René Descartes*, Watson Publishing International Nantucket, Massachussetts.

Tall, D.: 2003, Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. (Talk given in Rio de Janiero available at the web site: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003a-rio-plenary.pdf).

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge MA: Harvard University Press.