

La migliore approssimazione lineare di una funzione nelle "vicinanze" di un suo punto

Introduzione alle funzioni esponenziali

(si prevedono circa 10 ore di lavoro in classe)

Prerequisiti: i prerequisiti della lezione sulle funzioni lineari e quanto affrontato e studiato nelle lezioni sulle funzioni lineari e sui modelli lineari.

Premessa

Le attività proposte in questa lezione sono essenzialmente attività di esplorazione e scoperta effettuate con l'ausilio del modulo grafico di TI-InterActive!: l'obiettivo di queste attività, che non viene dichiarato adesso, perché sarebbe poco comprensibile, è di particolare importanza per il prosieguo del corso.

Nome e cognome dei componenti del gruppo che svolge le attività di gruppo di questa lezione

Nome e cognome dei componenti della coppia che svolge le attività di coppia di questa lezione

Nome e cognome della studentessa o dello studente che svolge le attività individuali di questa lezione

Scheda 0 (guidata e di gruppo)

Inserite modulo grafico di TI-InterActive! le seguenti funzioni:

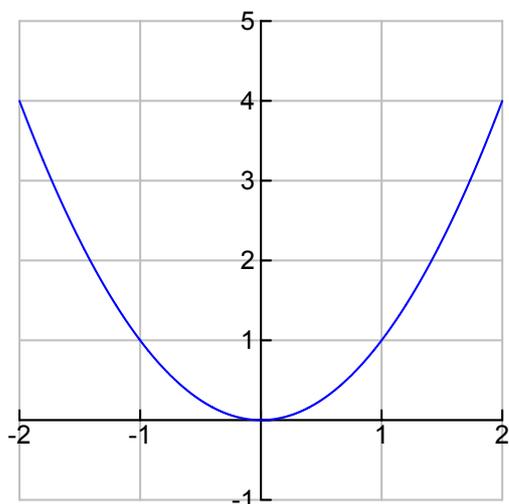
$$y = x^2$$

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

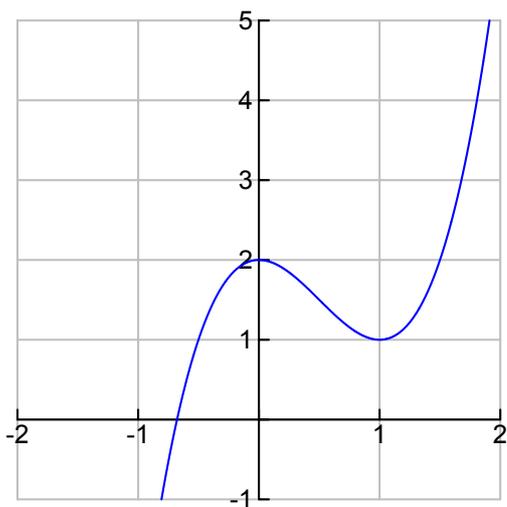
$$y = x^4 - x^3 + 2x$$

e fate disegnare il loro grafico in un'opportuna finestra che contenga i punti di ascisse -1 e 1.

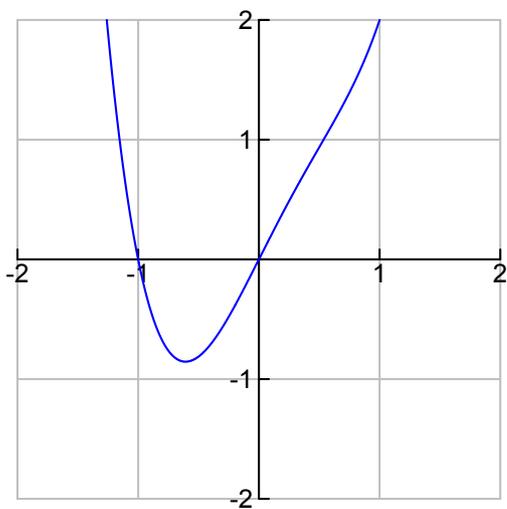
Se, per la prima funzione, scegliete la finestra [-2; 2] x [-1; 5] otterrete il grafico:



Se, per la seconda funzione, scegliete la stessa finestra [-2; 2] x [-1; 5] otterrete il grafico:



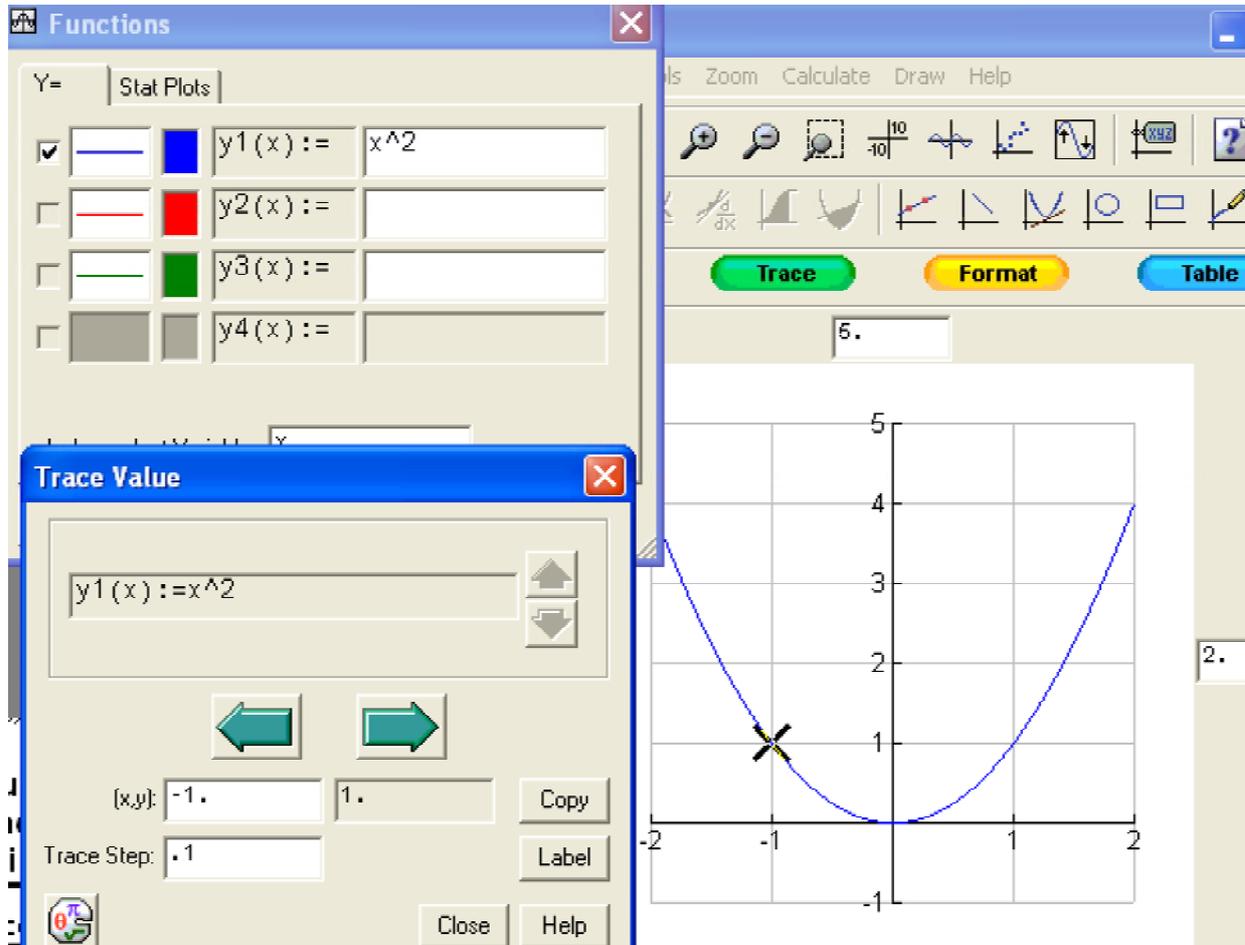
Se, per la terza funzione, scegliete la finestra [-2; 2] x [-2; 2] otterrete il grafico:



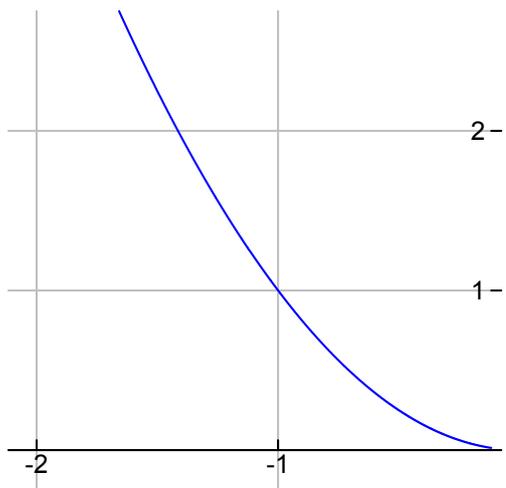
Eventuali differenze con i grafici ottenuti dal gruppo di lavoro ed eventuali problemi non risolti:

Osservate con attenzione le operazioni che ora vengono indicate per quel che riguarda la funzione $y = x^2$.

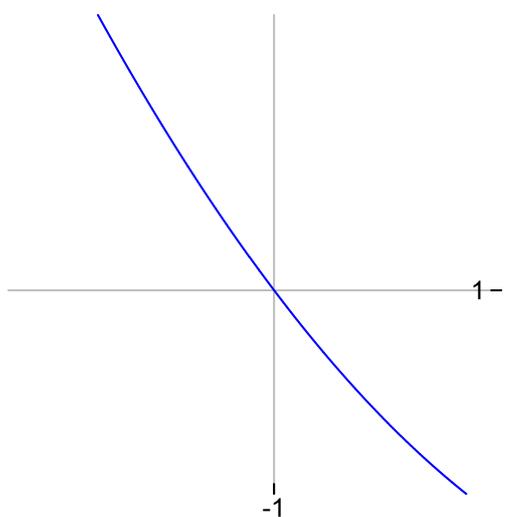
Utilizzando la funzione trace (F3, quando si è nel menu grafico, ossia quando si ha di fronte lo schermo con il grafico della funzione), spostatevi nel punto più vicino al punto di ascissa -1:

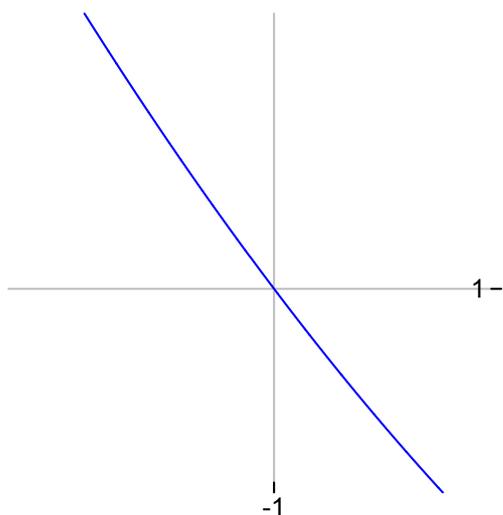


Scegliete il menu Zoom, dove sono disponibili diverse possibilità di zoom (ossia di ingrandimento della funzione... una sorta di microscopio che consente di vedere sempre meglio che cosa accade vicino a un punto della funzione). Scegliete ZoomBox, che consente di effettuare uno zoom centrato nel punto scelto, ossia nel punto di ascissa -1. Il risultato dovrebbe essere il seguente grafico:



Effettuate un altro ZoomIn centrato nello stesso punto e poi un altro ancora e un altro ancora. Dovreste ottenere, in successione, i seguenti grafici:



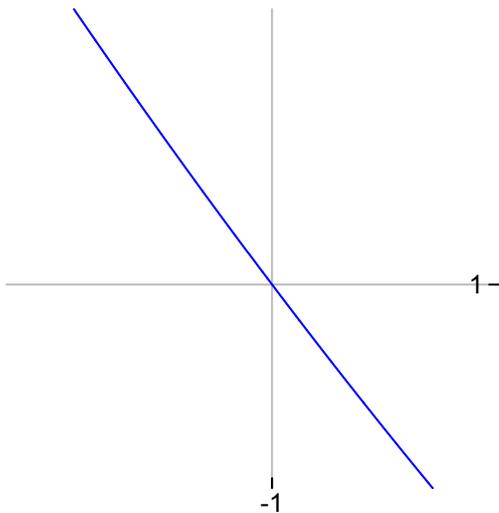


Come potete notare, il grafico della funzione, man mano che ci si "stringe" vicino al punto $(-1; 1)$ tende ad essere sempre più rettilineo. Vi aspettavate tutto ciò?

Le osservazioni del gruppo: ciò che ci attendevamo, ciò che era inatteso; quello che riusciamo a spiegare (spiegare!!) e quello che non riusciamo a capire (elencare con attenzione e impegno, cercando di essere il più possibile chiari):

Effettuate ora tanti zoom box sempre centrati nel punto $(-1; 1)$ fino a che il valore massimo e minimo della scala delle ascisse non coincidono; quindi tornate indietro di un passo con uno zoom out. La situazione è comunque quella rappresentata nella seguente finestra, sulla quale potete cliccare due volte per vedere le dimensioni della finestra grafica.

La linea che vedete assomiglia a una retta: qual è la sua pendenza?

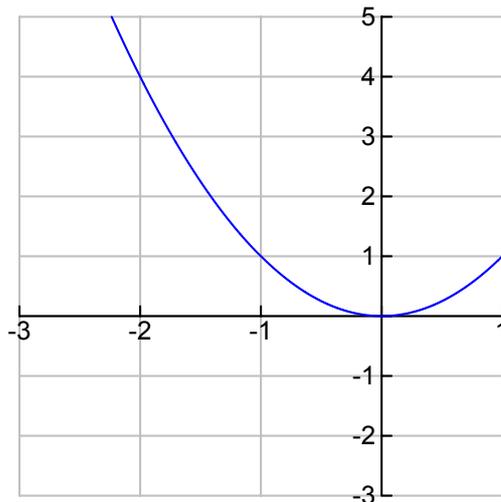


La pendenza di questa retta può darci informazioni sulla pendenza del grafico della funzione $f(x) = x^2$ vicino al punto di ascissa -1 ? Giustificate la risposta.

Risposta

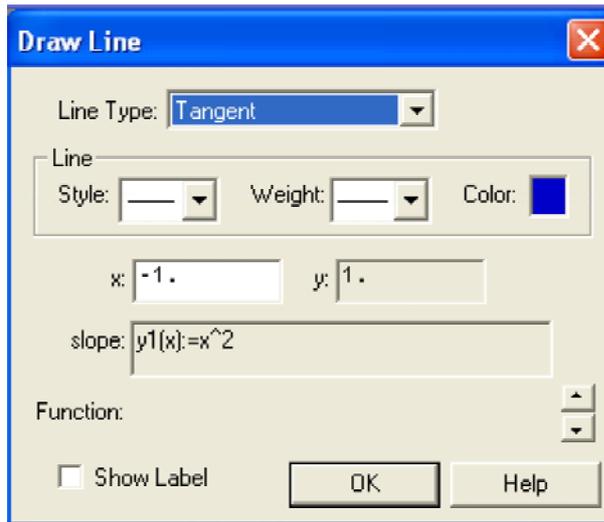
Impariamo ora a utilizzare un'altra funzione di Zoom, in certi casi assai più utile di Zoom Box. Si tratta di Zoom In, che consente di ingrandire la funzione centrando l'ingrandimento intorno al punto centrale della finestra grafica.

Se tracci il grafico della funzione $f(x) = x^2$ nella finestra $[-3; 1] \times [-3; 5]$, il punto centrale è proprio $(-1;1)$

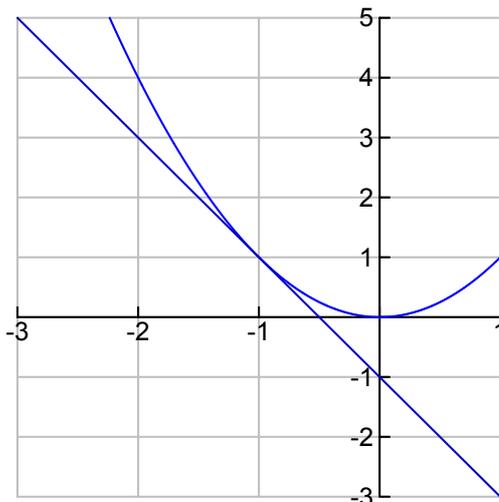


Se ora clicchi due volte sulla finestra grafica e fai successivi Zoom In e Zoom Out, potrai ottenere quanti ingrandimenti vuoi (ovviamente con le limitazioni dovuta alle specifiche del software) e tornare indietro con Zoom out alla configurazione da cui sei partito (vrifica quanto è stato detto).

Ritorna al grafico di $f(x)=x^2$ nella finestra $[-3; 1] \times [-3; 5]$ e seleziona la voce del menu "tangent", verificando che la finestra "draw line" riporti le specifiche indicate nella seguente figura:



La seguente finestra grafica dovrebbe già essere impostata secondo tali specifiche, ma se così non fosse, provvedi a modificarle in modo che siano esattamente come compaiono nella figura sopra riportata.



Come vedi, è stata tracciata la retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^2$ nel punto $(-1; 1)$.

Effettua ora vari Zoom In: che cosa accade al grafico della funzione? È vero che assomiglia sempre più alla retta tangente? Pensi di poter giustificare tale fatto? Come?

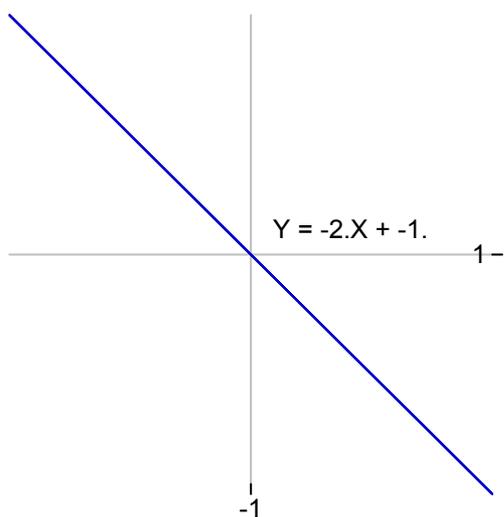
La mia giustificazione

Confronta la tua risposta con quella di altri compagni e riporta eventuali differenze significative

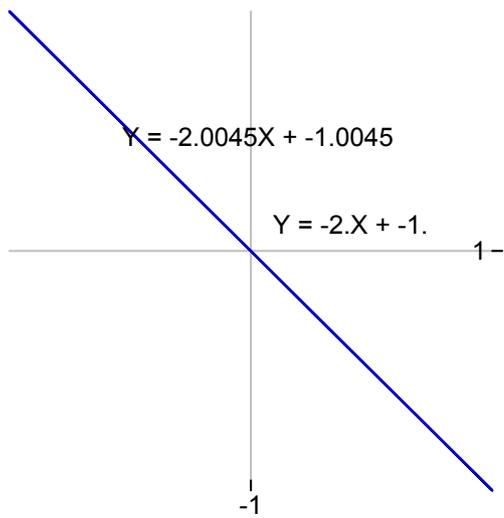
Le differenze significative con quanto detto dai miei compagni

Nella seguente finestra viene riportata la configurazione retta tangente in (-1; 1) (ossia il grafico della funzione lineare che meglio approssima il grafico della funzione in un intorno piccolo quanto si vuole del punto (-1;1)) con grafico della funzione $f(x)=x^2$ dopo molti Zoom In.

La formula della funzione lineare che ha per grafico la retta tangente è stata ottenuta spuntando "show label" nella finestra di "draw line".



Cliccate nuovamente su "tangent" e su show label e spostate con il mouse il punto che si trova nella posizione (-1; 1). Dovreste notare che la nuova formula ottenuta cambia pendenza e quota con lo spostamento del punto



Perché accade ciò? Giustificate la vostra risposta e poi discutetene con il vostro insegnante.

La nostra risposta

Scheda 1 (Lavoro di gruppo)

Utilizzando un procedimento simile a quello appena seguito, determinate una funzione lineare che approssimi bene la funzione $y = x^2$ vicino al punto di ascissa 1 e una funzione lineare che approssimi bene $y = x^2$ vicino al punto di ascissa 0.

Risposta

Vi attendevate quello che avete osservato?

Risposta

Scheda 2 (Lavoro di gruppo)

Determina tre funzioni lineari che approssimino bene la funzione

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

rispettivamente vicino ai punti di ascissa -1, 0 e 1 e

Risposta

Scheda 3 (Lavoro individuale)

Determina tre funzioni lineari che approssimino bene la funzione
 $y = x^4 - x^3 + 2x$
rispettivamente vicino ai punti di ascissa -1, 0 e 1 e

Risposta

Scheda 4 (lavoro individuale)

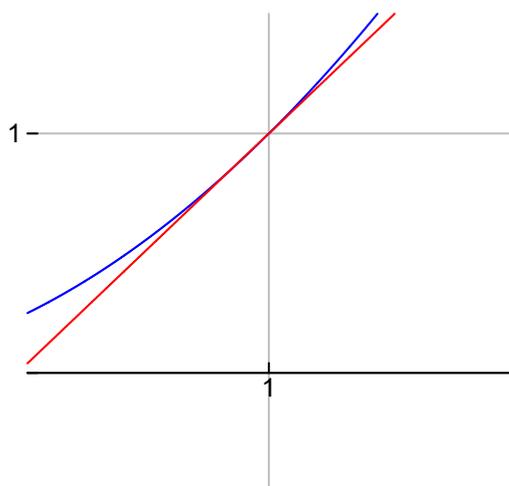
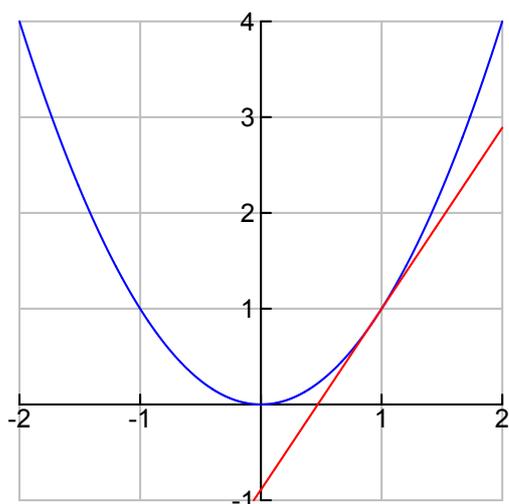
La seguente attività è stata proposta da due colleghe (Cristina Ferraris e Lorella Grillo) nel corso di didattica della matematica II della scuola di specializzazione per l'insegnamento secondario nell'a.s.2003 - 2004. Apri il file word [esercitazione](#) e, utilizzando TI-InterActive! esegui l'attività proposta.

Che cosa ho imparato dopo queste attività (lavoro individuale: hai a disposizione al più una ventina di righe per elencare le conoscenze più importanti che pensi di aver appreso dopo le precedenti attività)

Scheda 5

(lavoro individuale o di gruppo da svolgersi a casa, anche mediante collaborazione a distanza)

Che cosa vi suggeriscono le due seguenti animazioni (cliccate sui cursori ed esplorate)? (Tenete presente che il grafico in blu è, in entrambe le rappresentazioni, quello di $y = x^2$ e che cambia solo la finestra grafica)



Risposta

Domanda da ... due milioni di dollari (da affrontare in gruppo)

Abbiamo definito la retta tangente come il grafico della funzione lineare che meglio approssima una funzione in un punto. Ma se cerchiamo una funzione lineare che approssima una funzione in un intervallo, la retta tangente è, in generale, ancora la migliore approssimazione?

Per provare a dare una risposta fate qualche esempio aiutandovi con TI-InterActive! e poi confrontate la vostra risposta con quella di altri compagni.

La nostra risposta

Il confronto con quelle di alcuni compagni

Dopo un eventuale intervento dell'insegnante

Scheda 6 (lavoro di gruppo)

Quando avete lavorato alle attività proposte nella prima e nella seconda lezione, in particolare quelle relative ai modelli matematici, avete lavorato con due tipi di successioni definite per ricorrenza:

1. quelle del tipo

$$a(n) = a(n-1) + k \text{ e } a(0) = b \text{ (con } k \text{ e } b \text{ costanti)}$$

caratterizzate dal fatto che la differenza tra due termini consecutivi è costante (la legge generale potrebbe esprimersi dicendo che $a(n) - a(n-1) = k$)

2. quelle del tipo

$$a(n) = k \cdot a(n-1) \text{ e } a(0) = b \text{ (con } k \text{ e } b \text{ costanti)}$$

caratterizzate dal fatto che il rapporto tra due termini consecutivi è costante (la legge generale potrebbe esprimersi dicendo che $a(n) / a(n-1) = k$)

Sia le successioni di tipo 1., sia quelle di tipo 2. sono caratterizzate da una legge lineare che lega il termine n -esimo al termine precedente. Le successioni di tipo 1., però, danno luogo a funzioni lineari, ossia i loro termini appartengono a funzioni lineari (infatti tali funzioni sono proprio caratterizzate dalla costanza delle differenze prime). Le successioni di tipo 2, invece non danno luogo a funzioni lineari (infatti le differenze prime dei valori delle funzioni definite da leggi del tipo 2. non sono costanti!), ma a funzioni che o crescono sempre più o decrescono sempre meno e che vengono dette *funzioni esponenziali*.

Nota che le funzioni lineari possono quindi essere caratterizzate da un "modello additivo": partendo da un qualunque valore di una funzione lineare e addizionando sempre una costante opportuna si ottengono sempre valori della stessa funzione.

Le funzioni esponenziali, invece, possono essere caratterizzate da un "modello moltiplicativo": partendo da un qualunque valore di una funzione esponenziale e moltiplicando sempre per una costante opportuna si ottengono sempre valori della stessa funzione.

Fate qualche esempio di successioni di tipo 1. e qualche esempio di successioni di tipo 2 determinando, in entrambi i casi, una formula per le funzioni che definiscono (la formula deve esprimere la dipendenza dei valori delle successioni da n e non dal termine precedente). In caso non riusciate a soddisfare la richiesta, precisate le ragioni e la natura delle difficoltà incontrate.

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da
 $s(n) = s(n-1) + 2$ e $s(0) = 1$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

(Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da
 $s(n) = s(n-1) + 3.7$ e $s(0) = -1.2$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

(Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da

$$s(n) = 3 * s(n-1) \quad s(0) = 5$$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da

$$s(n) = 0.3 * s(n-1) \quad s(0) = -2$$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da
 $s(n) = -s(n-1)$ $s(0) = 2$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Considerate la successione definita per ricorrenza da

$$s(n) = -3 * s(n-1) \quad s(0) = 5$$

Quali sono i numeri che vengono generati da questa legge? Come potreste scrivere la formula che dà tali numeri al variare di n ?

Risposta

Da svolgere a casa, individualmente o in gruppo, anche collaborando a distanza)
Come potreste far calcolare a TI-InterActive! i valori della successione utilizzando il comando "seq"?

Risposta

Segue ora un'attività di sistemazione, formalizzazione e consolidamento delle conoscenze e tecniche apprese che, comunque, devi compiere per la maggior parte del tempo individualmente, consultandoti con tuoi compagni o tue compagne solo dopo aver riflettuto bene sui chiarimenti di cui pensi di aver bisogno. Lo stesso vale per le richieste di precisazione e spiegazione che vuoi porre all'insegnante: cerca di chiarire bene che cosa e perché vuoi chiedere. Naturalmente devi chiedere aiuto se qualche passo del riassunto e della sistemazione non ti fosse chiaro o non riuscissi a svolgere qualche esercizio di consolidamento.

Ti consigliamo di rispondere prima al test di autovalutazione per vedere se hai acquisito le conoscenze e le tecniche fondamentali, quelle necessarie per proseguire nelle lezioni. In seguito passerai alla sistemazione e agli esercizi di consolidamento. Ricorda inoltre che le schede e le attività che hai svolto sono sempre un punto di riferimento importante per il tuo studio, per l'attività di sistemazione, per quella di ripasso e consolidamento e anche per quella di recupero (nel caso tu sia piuttosto disorientata o disorientato, ti consigliamo di riprendere con attenzione tutte le attività già svolte).

Non proponiamo alcun esempio di verifica, perché ci sembra che gli argomenti affrontati in questa lezione abbiano bisogno di essere metabolizzati con calma, senza il peso che, in genere, viene esercitato da attività di verifica sommativa: la riflessione sul lavoro svolto e l'esito del test di autovalutazione, oltre agli esercizi di consolidamento dovrebbero essere sufficienti a fornire a te e al tuo insegnante elementi di significativa valutazione formativa.

[Test di autovalutazione](#) (questo test può essere svolto con l'aiuto delle calcoatrici grafico simboliche o con TI - Intercative o con un altro software di manipolazione grafico - simbolica)

[Esercizi di consolidamento](#)

[Riassumendo e sistematizzando](#)