Funzioni derivate e approssimazione locale di una funzione con una funzione quadratica

(si prevedono circa 30 ore di lavoro in classe se si decide di eseguire tutte le attività)

Premessa

Nel primo anno di corso hai visto che le funzioni che hai incontrato possono essere approssimate localmente da una funzione lineare. Hai intuito ed esplorato questa possibilità utilizzando i comandi di Zoom di TI-InterActive! che ti hanno mostrato (nel vero e proprio senso del termine) come dopo un opportuno numero di Zoom successivi il grafico delle funzioni che hai fino a ora incontrato assomigli sempre più a una retta: la retta tangente alla funzione nel punto attorno al quale hai effettuato lo "Zoom In".
Hai anche intuito che la funzione lineare che approssima localmente una funzione dà informazioni sulla crescenza o decrescenza della funzione, ma non su come cresce o decresce, ossia sulla concavità del suo grafico: una retta, infatti non ha concavità; una funzione lineare non cresce o decresce sempre più o sempre meno, ma in modo costante!

Queste osservazioni suggeriscono che, se non si vogliono perdere informazioni su come cresce una funzione, sia necessario utilizzare una funzione almeno quadratica: tale funzione, infatti, cresce o decresce sempre più o sempre meno; il suo grafico ha una concavità!
Le attività che seguono si propongono di
a) aiutarti a comprendere meglio il significato di approssimazione locale di una funzione con funzioni più semplici (lineari o quadratiche);
b) fornire alcune tecniche per la determinazione delle formule di una funzione lineare e di una funzione quadratica che approssimino localmente alcune funzioni (in particolare funzioni polinomiali di terzo e quarto grado; più in generale funzioni polinomiali).

Crediamo che questo lavoro possa offrirti delle vere e proprie radici cognitive per comprendere questioni più raffinate e delicate dal punto di vista formale che affronterai negli ultimi anni di scuola secondaria, soprattutto se seguirai un corso a indirizzo matematico - scientifico.

Tecniche e concetti a cui queste attività costituiscono un primo approccio, fanno parte di una delle costruzioni più stupefacenti del pensiero umano: il calcolo infinitesimale, legato, nelle sue origini, ai nomi di Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz .

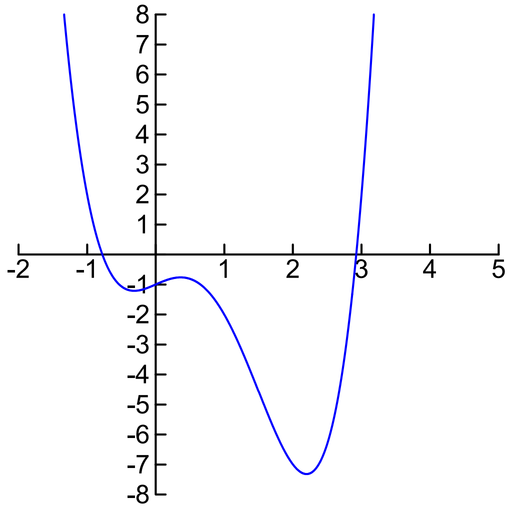
Scheda 0 La "funzione delle pendenze". Considerazioni di carattere intuitivo, numerico e grafico

(Attività individuali e di gruppo. Tempo in classe: 4 ore)

<u>Attività 1</u> (da svolgersi in piccoli gruppi, preferibilmente senza l'aiuto di strumenti di calcolo).

Ricordate? Nel primo anno di corso abbiamo definito la pendenza di una retta come il rapporto fra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse di due qualunque punti della retta. Abbiamo anche visto che, pur non potendo definire "una pendenza" di una curva, le funzioni che in genere abbiamo incontrato possono essere approssimate localmente (ossia vicino a ogni loro punto) con funzioni lineari … è allora possibile considerare, in ogni punto del grafico di queste funzioni, la pendenza della funzione lineare che meglio approssima, localmente, la funzione data.

È dato il seguente grafico di una funzione $y = f(x)$:



Tracciate uno schizzo:

a) **del grafico della funzione "pendenza", ossia della funzione $y = p(x)$ che associa, a ogni x, il valore della pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione f vicino a x (localmente);**

b) **del grafico di una funzione *y* = *h*(*x*) che ha come funzione pendenza *y* = *f*(*x*)**

Giustificate le risposte fornite; in particolare, dopo aver concordato una risposta, riportate sul vostro foglio di lavoro le strategie seguite per effettuare il compito che vi è stato proposto

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema a)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=p(x)

Giustificazione della risposta

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema b)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=h(x)

Giustificazione della risposta

Attività 2 (da svolgersi in piccoli gruppi, preferibilmente senza l'aiuto di strumenti di calcolo grafico o simbolico; è invece consentito, se lo si ritiene utile, l'uso della calcolatrice numerica o del foglio di calcolo di TI-InterAtive!).
È data la seguente tabella che rappresenta una funzione $y = f(x)$:

	D
x	y
- 0,8	2,24
- 0,6	1,56
- 0,4	0,96
- 0,2	0,44
0	0,00
0,2	- 0,36
0,4	- 0,64
0,6	- 0,84
0,8	- 0,96
1	- 1,00
1,2	- 0,96
1,4	- 0,84
1,6	- 0,64
1,8	- 0,36
2	0,00
2,2	0,44
2,4	0,96

Tracciate uno schizzo del:

a) **grafico della funzione "pendenza", ossia della funzione $y = p(x)$ che associa, a ogni x, il valore della pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x**
b) **grafico di una funzione $y = h(x)$ che ha come funzione pendenza $y = f(x)$**

Giustificate le risposte fornite e, dopo aver concordato una risposta, riportate sul vostro foglio di lavoro le strategie seguite per effettuare il compito che vi è stato proposto.

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema a)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=p(x)

Giustificazione della risposta

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema b)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=h(x)

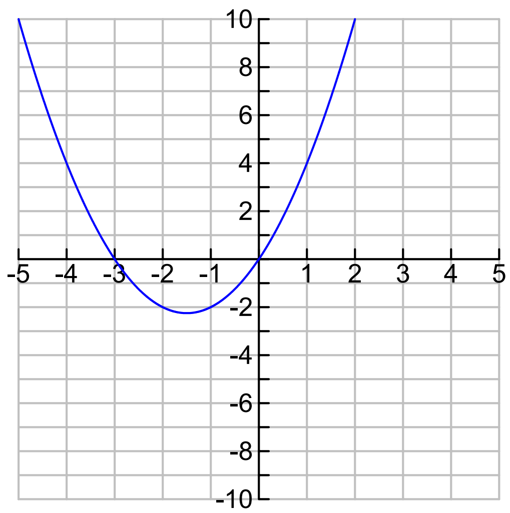
Giustificazione della risposta

Attività 3 (da svolgersi in piccoli gruppi, preferibilmente senza senza l'aiuto di strumenti di calcolo grafico o simbolico; è invece consentito, se lo si ritiene utile, l'uso della calcolatrice numerica o del foglio di calcolo di TI-InterAtive!).

Sono date due rappresentazioni della funzione *y* = *f*(*x*), una in forma tabulare

	E
x	y
- 2,5	- 1,25
- 2,3	- 1,61
- 2,1	- 1,89
- 1,9	- 2,09
- 1,7	- 2,21
- 1,5	- 2,25
- 1,3	- 2,21
- 1,1	- 2,09
- 0,9	- 1,89
- 0,7	- 1,61
- 0,5	- 1,25
- 0,3	- 0,81
- 0,1	- 0,29
0,1	0,31
0,3	0,99

e una grafica:



Tracciate uno schizzo:

a) **del grafico della funzione "pendenza", ossia della funzione $y = p(x)$ che associa, a ogni x, il valore della pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x**

b) **del grafico di una funzione $y = h(x)$ che ha come funzione pendenza $y = f(x)$**

Giustificate le risposte fornite e, dopo aver concordato una risposta, riportate sul vostro foglio di lavoro le strategie seguite per effettuare il compito che vi è stato proposto.

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema a)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=p(x)

Giustificazione della risposta

Le strategie che abbiamo concordato per rispondere al problema b)

Le caratteristiche del grafico della funzione y=h(x)

Giustificazione della risposta

Scheda 1. Sulla funzione delle pendenze con Graphic Calculus.

Attività (da svolgersi in piccoli gruppi in laboratorio di informatica)

Aprite Graphic Caluclus e selezionate il menu "Graphic Calculus Plus" e, quindi, "Gradient".
Scegliete come sistema di riferimento quello che riporta *x* in ascisse e *y* in ordinate. Digitate in "formula" 0.5*x^3 – 5*x^2 + 3 e scegliete come finestra grafica (agendo sulla terza icona del menu a icone) la finestra
[⁻5; 15] X [⁻100; 100].

Nella parte destra dello schermo dovreste vedere due menu: gradient e gradient function. Selezionate "Gradient function" e lanciate l'animazione premendo sull'icona verde che ha la forma di un bottone del tasto "play" di un

videoregistratore (le icone blu vi consentono di variare la velocità dell'animazione: la prima funziona come il tasto "pausa"; la seconda vi consente di riprodurre a velocità normale e la terza a velocità maggiore). L'icona rossa, accessibile quando l'animazione è partita, vi consente di azzerare l'animazione.

Descrivete che cosa osservate, in particolare precisate:
a) che cosa rappresenta Δx e che cosa cambia quando si modifica il suo valore?
b) Che cosa rappresenta la curva in rosso che viene tracciata?
c) C'è qualche relazione tra questo grafico (la curva rossa) e quello della funzione di partenza? In caso affermativo, quale relazione lega i due grafici e quindi le due funzioni? Giustificate le vostre risposte.

Le nostre risposte (con giustificazione) alle domande poste

a)

b)

c)

Potete dire qualcosa sull'equazione della funzione di cui è stato tracciato il grafico in rosso? Perché?

La nostra risposta

Tracciate il grafico di una funzione che ha come funzione pendenza quella il cui grafico è uguale alla curva rossa; tracciate poi il grafico di una funzione che ha come funzione pendenza la funzione 0.5*x^3 – 5*x^2 + 3 .

Le nostre risposte:

a) le caratteristiche del grafico di una funzione che ha come funzione pendenza quella il cui grafico è uguale alla curva rossa

b) le caratteristiche del grafico di una funzione che ha come funzione pendenza la funzione 0.5*x^3 – 5*x^2 + 3 .

Potete dire qualcosa sulla formula della funzione che ha come funzione pendenza la funzione 0.5*x^3 – 5*x^2 + 3 ? Giustificate le risposte.

La nostra risposta

Scheda 2. I grafici delle funzioni "pendenza" delle funzioni esponenziali

(Attinvità da svolgere in laboratorio di informatica, in piccoli gruppi o a coppie, per circa 6 ore)

1. Se disponete di Cabri II o di Cabri II plus, aprite, cliccando sull'hotword, il file 2.7allax . Se non disponete di Cabri potete effettuare la stessa esploraizne cliccando sull'hotword 2.7allaxjava .
In entrambi i casi vedrete, sull'asse delle *x* il punto X e sull'asse delle *y* il punto $(2.7)^{X}$. Muovete il punto X sull'asse delle *x* e osservate che cosa accade al punto $(2.7)^{X}$ sull'asse *y* (ossia osservate come $(2.7)^{X}$ varia al variare di *x*). Cambiate anche l'unità di misura sull'asse delle *y* per nelle vostre esplorazioni.
Se siete in Cabri potete anche effettuare un'esplorazione più ricca. Per esempio, dopo qualche prova effettuata manualmente, passate alle animazioni. Spostate il punto X verso la sinistra del vostro foglio di lavoro, fino ad arrivare quasi all'estremo del campo di variazione delle *x* negative, e poi animate con una molla (comando "animazioni" del penultimo bottone del menu a icone) il punto X in modo che si muova da sinistra verso destra.

Scambiatevi tutte le osservazioni che ritenete interessanti sul movimento coordinato dei due punti e tenete traccia (sintetica, ma comprensibile) della vostra discussione sul protocollo che vi è stato consegnato.

Le nostre osservazioni

2. Quale pensate che sia l'andamento del grafico della funzione $y = (2.7)^{X}$? Prima di tracciarlo con la matita su un foglio, dando un'indicazione su come sia possibile giustificare il grafico che avete tracciato, cercate di mettervi d'accordo su quelle che ritenete siano le principali caratteristiche del grafico di $y = (2.7)^{x}$

Le nostre considerazioni

3. Se disponete di Cabri II o di Cabri II plus aprite, cliccando sull'hotword, il file aallax. Se, invece, non disponete di Cabri potete effettuare un'esplorazione simile cliccando sull'hotword aallaxjava .
In entrambi i casi, vedrete un punto X sull'asse delle *x*, un punto a^x sull'asse delle *y*, un punto P di coordinate (x, a^x) che, quindi, descrive, al variare di *x*, il grafico della funzione $y = a^x$ e, infine, una semiretta sulla quale è situato un punto A la cui ascissa rappresenta la base dell'esponenziale a^x . Questo vuol dire che, variando la posizione di *a*, si possono ottenere esponenziali di base diversa (tutte maggiori di zero: per questa scelta c'è un motivo ben preciso del quale potreste discutere in classe con il vostro o la vostra insegnante).
Quindi, muovendo il punto A variate la base dell'esponenziale. Muovendo, invece, il punto P percorrete il grafico di una funzione esponenziale di base fissata.
Fate qualche esplorazione, scambiatevi eventuali impressioni (c'è qualcosa che non è chiaro, che non vi aspettavate o che, invece, vi è chiaro e vi aspettavate?)
Riportate qui di seguito traccia sintetica della vostra esplorazione.

Le nostre considerazioni

4. Se disponete di Cabri II plus, aprite, cliccando sull'hotword, il file di Cabri II plus expplus .
Se non disponete di Cabri II plus, ma di Cabri II, aprite, cliccando sull'hotword, il file di Cabri II expcabrilI .
Se non diponete di Cabri, cliccate sull'hotword expcabrijava .

In tutti casi, osservate attentamente la figura: notate che ci sono solo alcuni punti che potete muovere (*P*, Δx che, nei file in cabri II e cabrijava è indicato con *h*, e *a*);

notate anche che i segmenti PH e Δx (h, per i file in cabrill e cbrijava) hanno la stessa lunghezza (sono stati costruiti in modo tale da avere la stessa lunghezza).

Descrivete brevemente la figura, muovendo prima P, poi Δx (o *h*), poi *a*; dovreste cercare di fare qualche congettura su che cosa vi consente di osservare il movimento dei punti che sono trascinabili, prima discutendone fra di voi e poi trascrivendo una sintetica traccia qui di seguito.

Le nostre conclusioni

5. Soffermatevi in particolare su che cosa accade quando Δx (*h*, per i file in Cabrill e Cabrijava) tende a zero … questa richiesta vi suggerisce altre osservazioni oltre a quelle di cui avete già discusso e che avete riportato sul foglio protocollo? Perché?

Eventuali ulteriori considerazioni

6. Prendete in considerazione il seguente foglio elettronico nel quale sono riportate, a partire dalla prima colonna a sinistra:
a) il valore *x* in cui si vuole calcolare la pendenza della retta tangente al grafico della funzione *f*(*x*) = *a*^*x* (nel foglio abbiamo scelto x= 0, ma voi potete cambiare valore per trovare la pendenza della retta tangente in altri punti (*x*, *y*) con *y* = *f*(*x*);
b) il valore *x*+*h*
c) l'incremento *h*
d) la base *a* dell'esponenziale (ricorda che deve essere positiva!)
e) il rapporto incrementale (f(x+h)−f(x))/h, ossia (a^(x+h)-a^x)/h

x	x+h	h	a	(f(x+h)-f(x))/h		
0	1,000000000	1,000000000	2	1,000000000		
	,500000000	,500000000		,828427125		
	,250000000	,250000000		,756828460		
	,125000000	,125000000		,724061861		
	,062500000	,062500000		,708380519		
	,031250000	,031250000		,700708757		
	,015625000	,015625000		,696914307		
	,007812500	,007812500		,695027342		
	,003906250	,003906250		,694086413		
	,001953125	,001953125		,693616585		
	,000976563	,000976563		,693381830		
	,000488281	,000488281		,693264492		
	,000244141	,000244141		,693205833		
	,000122070	,000122070		,693176506		
	,000061035	,000061035		,693161843		
	,000030518	,000030518		,693154512		
	,000015259	,000015259		,693150846		
	,000007629	,000007629		,693149013		
	,000003815	,000003815		,693148097		
	,000001907	,000001907		,693147639		
	,000000954	,000000954		,693147410		
	,000000477	,000000477		,693147295		
	,000000238	,000000238		,693147237		
	,000000119	,000000119		,693147209		
	,000000060	,000000060		,693147194		
	,000000030	,000000030		,693147190		
	,000000015	,000000015		,693147182		
	,000000007	,000000007		,693147182		
	,000000004	,000000004		,693147182		
	,000000002	,000000002		,693147182		
	,000000001	,000000001		,693147182		

Che cosa notate osservando il foglio?

La nostra risposta

Eventuali cambiamenti nella nostra risposta dopo il confronto con le risposte dei nostri compagni

Soffermatevi sulla notazione f(x+h): si tratta di un punto molto importante e delicato. La scrittura f(x+h) indica che la legge che caratterizza la funzione considerata deve applicarsi all'argomento (x+h). In altre parole la legge *f* opera sull'input (x+h) restituendo f(x+h).
Per esempio, se f(x) = x^2, allora f(x+h) = (x+h)^2;
se f(x)= a^x, allora f(x+h)= a^(x+h)

7. Assegnata f(x) = 2^x, calcolate
f(2+h)
f(2-h)
f(x+h)
f(f(x))
f(f(x+2))
f(f(3+h))
f(f(x+h))

Le nostre risposte:

Eventuali problemi nel comprendere il significato della scrittura f(x+h):

8. Riprendete ora in esame il foglio elettronico di prima ed effettuate alcune esplorazioni cambiando la base, per esempio scegliendo come base 3 invece di 2.

Che cosa notate osservando il foglio?

La nostra risposta

Eventuali cambiamenti nella nostra risposta dopo il confronto con le risposte dei nostri compagni

9. Se la pendenza al grafico d 2^x in x = 0 è minore di 1 e la pendenza di 3^x in x= 0 è maggiore di 1, ci sarà una funzione esponenziale che ha pendenza 1 in x= 0? Provate a determinarla per tentativi e poi verificate, con le potenzialità che vi offre il foglio elettronico, che tale funzione ha una caratteristica particolare: se prendete un punto *x*, la pendenza in *x* è proprio uguale a *f*(*x*).

La nostra risposta e il foglio elettronico che consente di verificare quanto affermato:

10. Cercate ora di studiare come varia, al variare di *x*, la pendenza della funzione lineare che meglio approssima, vicino a *x*, la funzione $y = a^x$. Come abbiamo già qualche volta detto, ciò equivale a chiedersi come varia, al variare di *x*, la pendenza della retta tangente al grafico della funzione $y = a^x$ nel punto di ascissa *x*.
Vi chiediamo di discutere brevemente di quelle che ritenete siano le caratteristiche del grafico della funzione $p = p(x)$ dove *p* è la pendenza della retta tangente al grafico di $y = a^x$ nel punto di ascissa *x*. Vi stiamo chiedendo di dire come varia, al variare di *x*, la pendenza della retta tangente al grafico di $y = a^x$ nel punto di ascissa *x*. Poteet aiutarvi, per rispondere, con gli strumenti di calcolo che preferite, oltre che con i file di Cabri o Cabrijava già esplorati.
Dopo aver discusso, argomentando le vostre opinioni, passate alla trascrizione sintetica delle caratteristiche del grafico di $p = p(x)$, tracciandone anche uno schizzo su un foglio.

Le nostre conclusioni (motivate) sulle caratteristiche del grafico di $p=p(x)$

11. Confrontate le vostre precedenti conclusioni utilizzando il file pendenza esponenziale . Potete esplorare la situazione variando *h* e *a*. La curva in blu rappresenta l'esponenziale *a^x*, mentre la curva in rosso rappresenta un'approssimazione del grafico della pendenza dell'esponenziale *a^x*, tanto migliore quanto più *h* è piccolo.
Sulla parte bassa del foglio si trovano una retta sulla quale è stato messo un punto la cui ascissa rappresenta l'incremento *h* e una semiretta che consente di variare la base *a* dell'esponenziale. La curva in blu è stata ottenuta con le seguenti operazioni:
a) si è calcolato, con la calcolatrice di Cabri, il valore *a*^x
b) si è riportato sull'asse delle *y* il valore di *a^x*
c) si è fatto tracciare a Cabri il luogo del punto di coordinate (*x*; *a^x*) al variare di *x*.
La curva La curva in rosso è stata ottenuta con le seguenti operazioni:
a) si è calcolato, con la calcolatrice di Cabri, il valore (a^(x+h)-a^x)/h;
b) si è riportato sull'asse delle *y* il valore di (a^(x+h)-a^x)/h

c) si è fatto tracciare a Cabri il luogo del punto di coordinate (*x*; (a^(x+h)-a^x)/h) al variare di *x.*

Nota che in alto a destra del file compare la scritta: f '(x) = (f(x+h)-f(x))/h che cosa rappresenta il rapporto (f(x+h)-f(x))/h ? È vero che quanto più h è piccolo, tanto meglio questo rapporto approssima la pendenza della tangente al grafico di f(x) = a^x nel punto di ascissa x? Perché? Perché quando *h* è 0 la curva rossa scompare e Cabri dice che il rapporto (f(x+h)-f(x))/h è inesistente?

Le nostre risposte

Il confronto con quelle di altri gruppi

12. Verificate aiutandovi ora, aiutandovi con file in Cabrijava precedente, che è possibile individuare una base *a* dell'esponenziale *a^x* la cui funzione pendenza è uguale alla stessa funzione *a^x* . Confrontate le vostre risposte con quelle di altri gruppi di lavoro.

Le nostre risposte

Il confronto con quelle di altri gruppi

Considerazioni conclusive su questa scheda dopo l'eventuale sistemazione dell'insegnante

Scheda 3. Come è possibile determinare la formula della funzione lineare che approssima localmente una funzione data?

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 4 ore)

1. (In gruppo). Come è possibile avere un'idea della pendenza della funzione lineare che approssima una funzione vicino a un punto? Provate a pensare di dover scrivere una procedura che consenta, data una funzione e un punto (vicino al quale tale funzione è approssimabile con una funzione lineare), di determinare la pendenza di tale funzione lineare e, in seguito, di calcolarne la formula.

La nostra risposta

Se avete difficoltà nel formulare la risposta, o avete forti dubbi raletivamente a quanto avete scritto, potete aiutarvi leggendo il seguito di questa scheda.
Consideriamo, per esempio, la funzione f(x) = x^3 e cerchiamo:
a) la pendenza della funzione lineare che approssima f(x) in x=1
b) la formula di tale funzioni lineare, ossia di quellafunzione che ha come grafico la retta tangente nel punto (1; 1) al grafico della funzione f(x)=x^3.
Per risolvere il problema a) effettuiamo le seguenti operazioni:
a1) spostiamoci da x=1 di un incremento h, raggiungendo il punto 1+h e calcoliamo la pendenza della secante al grafico della funzione f(x)=x^3 passante per i punti (1; 1) e (1+h; f(1+h)), semplificando il più possibile tale espressione;
a2) facciamo tendere h a 0, in modo da ottenere la pendenza della tangente.
Per effetuare le operazioni descritte in a1) iniziamo a definire in TI-InterActive! la funzione f(x)=x^3. Ciò può essere effettuato mediante il comando "define" (il comando "define" ha la seguente sintassi: define (nome_funzione =

espressione)).

Define $f(x) = x^3$

"Done"

Facciamo calcolare a TI-InterActive! il rapporto incrementale che dà la pendenza della secante al grafico della funzione
f(x)=x^3
passante per i punti (1; 1) e (1+h; f(1+h)):

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$h^2 + 3 \cdot h + 3$

Notate che TI-InterActive! restituisce la pendenza della secante già semplificata. Calcolandola £a mano" avrese dovuto effettuare i seguenti passaggi:
f(1+h)= (1+h)^3 = 1 + 3h^2 + 3h + h^3
f(1) = 1
f(1+h) – f(1) = h^3+3h^2+3h
(f(1+h) – f(1)) / h = h^2 + 3 h + 3
che è l'espressione fornita da TI- InterActive!

Se la pendenza della secante è h^2+3h+3, quanto sarà quella della tangente? L'idea è far tendere h a zero, poiché sappiamo che qanto più è piccolo h, tanto meglio la retta secante tenderà ad approssimare la tangente.
Provate a vedere a quanto tende l'espressione h^2+3h+3 quando h tende a 0, utilizzandoi il seguente foglio elettronico:

h	h^2+3h+3			
1,00000000000	7,00000000000			
,10000000000	3,31000000000			
,01000000000	3,03010000000			
,00100000000	3,00300100000			
,00010000000	3,00030001000			
,00001000000	3,00003000010			
,00000100000	3,00000300000			
,00000010000	3,00000030000			
,00000001000	3,00000003000			
,00000000100	3,00000000300			
,00000000010	3,00000000030			
,00000000001	3,00000000003			
,00000000000	3,00000000000			

Come è prevedibile, se h tende a 0, l'espressione h^2+3h+3 tende a 3.
Quindi possiamo assumere uguale a 3 la pendenza della funzione lineare che meglio approssima f(x) = x^3 in x = 1, ossia la funzione lineare che ha come

grafico la retta tangente in x = 1 al grafico della funzione f(x) = x^3.

Avreste potuto ragionare anche in un altro modo: avreste potuto determinare la pendenza della funzione lineare che meglio approssima f(x)=x^3 in un generico valore x e poi avreste potuto sostituire a x il valore 1, ottenendo la pendenza cercata.
Allo scopo possiamo definire in TI-InterActive! la funzione che rappresenta la pendenza della secante al grafico della funzione
y=f(x)
nei punti (x, f(x)) e (x+h, f(x+h)).

$$\text{Define } g(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

"Done"

Notate che abbiamo chiamato la funzione g(x,h), perché essa dipende sia dal punto x, sia dall'incremento h.
Chiediamo ora al manipolatore simbolico di TI - InterActive! di semplificare la scrittura della pendenza della secante.

$$g(x, h)$$

$$3 \cdot x^2 + 3 \cdot h \cdot x + h^2$$

Come potete vedere, la pendenza della secante dipende sia da x che da h. Questo è normale o vi sorprende? Perché?

La nostra risposta

Notate che una volta definita la funzione "pendenza della secanate" , ossia g(x,h), basta cambiare la definizione della funzione f per determinare, chiedendo di semplificare g(x), le pendenze delle secanti ai grafici delle funzioni f(x) nei punti (x,f(x)) e (x+h, f(x+h)), come suggerisce il seguente esempio:

Define $f(x)=x^4$

"Done"

$g(x,h)$

$4\cdot x^3+6\cdot h\cdot x^2+4\cdot h^2\cdot x+h^3$

Come vedete, anche in questo caso, la pendenza della secante dipende da x e da h. Si tratta di un fatto generale? Perché?

La nostra risposta

Secondo voi, la pendenza della tangente al grafico della funzione y=f(x) nel punto di ascissa x, o, se volete, la pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione f(x) vicino a x, dipende da h? Perché? Giustificate la risposta.

La nostra risposta

Dovreste avere risposto che la pendenza della tangente non deve dipendere da h. Infatti essa si ottiene facendo tendere h a 0 o anche definendo la seguente funzione che dà la pendenza sia delle secanti (passanti per i punti (x; f(x)) e (x+h; f(x+h)), sia della tangente (nel punto x; f(x)) al grafico della funzione f(x) = x^3.

$$\text{Define } p(x,h) = \begin{cases} 3\cdot x^2 & h=0 \\ 3\cdot x^2 + 3\cdot h\cdot x + h^2 & \text{else} \end{cases}$$

"Done"

Dovreste ora essere in grado di completare la risposta alla domanda che vi avevamo posto, scrivendo una procedura che consenta, data una funzione e un punto vicino al quale tale funzione è approssimabile con una funzione lineare, di determinare la pendenza di tale funzione lineare e, in seguito, di calcolarne la formula.

La nostra risposta

2. (Individuale, a casa). Inventa una decina di esercizi di calcolo della pendenza della retta tangente in un punto a una funzione ed eseguili aiutandoti con TI-InterActive! quando i calcoli diventano troppo complessi. Considera sempre funzioni polinomiali

La mia risposta

3. (Nel piccolo gruppo di lavoro, a scuola) Confrontate gli esercizi che avete inventato. Siete in grado di risolvere quelli proposti dai vostri compagni? In caso di risposta negativa, perché? In che cosa differiscono da quelli che avete inventato voi?

La risposta del gruppo

Scheda 4. La dialettica "locale - globale" nello studio delle grandezze che variano: la derivata e la funzione derivata

(Attività di sistemazione dell'insegnante mediante disussione matematica alla presenza di tutta la classe. La scheda seguente è un riassunto della sistemazione e contiene alcune domande alle quali bisogna rispondere individualmente. Tempo da dedicare in classe: 6 ore)

Nelle precedenti attività avete lavorato sul problema della "pendenza" del grafico di una funzione non lineare da due punti di vista:
a) la determinazione della pendenza in un punto, ossia della pendenza della retta tangente al grafico della funzione in quel punto (o, se preferite, la determinazione della pendenza della funzione lineare che meglio approssima localmente la funziona data);
b) la determinazione della formula della funzione che associa, a ogni x, la pendenza della retta tangente al grafico della funzione y=f(x) nel punto (x, f(x)).

Nel primo caso avete assunto una prospettiva locale del problema della "pendenza": vi siete concentrati su che cosa accade nel punto (x,f(x)); nel secondo caso avete assunto una prospettiva globale: vi siete interessati a come la pendenza varia al variare di x.

Parleremo di "derivata in x" ("gradient" in Graphic Calculus) nel primo caso e di " funzione derivata di f " ("gradient function" in Graphic Calculus) nel secondo caso.

La derivata in un punto di ascissa x_0 è quindi la pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione y = f(x) vicino a x_0; quindi si tratta di un numero!
Geometricamente, si interpreta come la pendenza della retta tangente al grafico della funzione y = f(x) nel punto (x_0, f(x_0)).
In simboli, per indicare la derivata in x_0, scriveremo f'(x0).
f'(x0) dà informazioni locali (vicino a x_0) sulla crescenza o decrescenza di f.

La funzione derivata di y = f(x) è invece la funzione che regola, al variare di x, la variazione delle pendenze delle funzioni lineari che meglio approssimano la funzione y = f(x) vicino a x. Si tratta quindi di una vera e propria funzione!
In simboli, per indicare la funzione derivata, scriveremo f'(x).

L'apice che compare sia in f'(x0) che in f'(x) indica che si tratta di "derivata prima". Infatti, come puoi immaginare, l'operazione può continuare, calcolando la

derivata della derivata, ossia la derivata seconda (in simboli f''(x)).
Ritorneremo più avanti sulla derivata seconda di una funzione y = f(x) e sulle infomazioni che offre relativamentealla funzione f.

Nelle precedenti schede hai anche appreso una tecnica di calcolo per f'(x). Cerchiamo di precisare su quali idee si basa questa tecnica.
Possiamo fondare tutto sul fatto che ci chiediamo la pendenza della retta tangente al grafico della funzione y=f(x) nel generico punto (x; f(x)). Poiché abbiamo visto che, per determinare una pendenza sono necessari due punti di diversa ascissa, ci spostiamo, sull'asse delle x, a partire da x, di h, raggiungendo l'ascissa x+h. Sul grafico quindi individuiamo un nuovo punto (x+h; f(x+h)); la secante al grafico di y = f(x) passante per i due punti (x; f(x)) e (x+h, f(x+h)), se ha diviene via via più piccolo, tende ad assomigliare sempre più alla retta tangente alla grafico della funzione y=f(x) nel punto (x; f(x)), come suggerito dalla seguente figura in cabrijava che si può esplorare cliccando sull'hotword derivata (nel file è rappresentata una funzione di terzo grado che può essere modificata agendo sui coefficienti a,b,c,d; l'esplorazione più significativa, però, consiste nel vedere che cosa accade quando h tende a 0 ed, eventualmente, ripetere la stessa esplorazione per differenti ascisse x).

1. Perché, nel file, se h è esattamente 0, scompare la retta secante?

La mia risposta

Quanto ora osservato anche attraverso l'ultima esplorazione proposta, suggerisce che il problema della determinazione della derivata di y= f(x), ossia di f'(x) può risolversi nei due seguenti passi:

a) scrivere la pendenza della secante al grafico di y=f(x) nei punti (x; f(x)) e (x+h;f(x+h)), ossia scrivere l'espressione $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$;
b) semplificare l'epressione scritta in a) in modo tale da poter dividere per h scompaia sia il numeratore, sia il denominatore e quindi calcolare la pendenza della secante, che dipende sia da x che da h;
c) porre h= 0 in modo da calcolare la pendenza della tangente al grafico di y=f(x) (che non dipende da h).

Naturalmente non è detto che il calcolo in b) sia alla tua portata; lo è, però, almeno per funzioni polinomiali di grado non elevato.

2. (Individuale) Calcola la pendenza delle tangenti (in x = 3; in x = - 2; in x = - 0.5) al grafico della funzione f(x) = x^ 3 - 2x

La mia risposta

La strategia di calcolo per f'(x), ossia per la funzione derivata, consente quindi di determinare la derivata per un qualunque specifico valore x_0. Ciò, di conseguenza, consente di esprimere la formula della funzione lineare che meglio approssima f(x) vicino a x_0. Infatti:

a) Trattandosi di una funzione lineare, sarà espressa da una formula del tipo:
y = p * x + n;
b) dovrà essere tale che f(x0) = p x_0 + n, ossia n = f(x_0) - p * x_0 (infatti il punto (x_0; f(x_0)) dovrà appartenere alla funzione lineare, se si vuole che questa approssimi f(x) vicino a x_0);
c) infine la pendenza della funzione lineare sarà uguale a f'(x_0) (infatti il grafico delle funzione lineare è quello della retta tangente al grafico di y=f(x) nel punto (x_0; f(x_0))

quanto detto sopra implica che la formula della funzione lineare che meglio approssima $y = f(x)$ vicino a x_0 (localmente) è:

$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$

3. Ricava, a partire dalle considerazioni a), b) e c) precedenti la formula:
$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$

La mia risposta

Cerchiamo ora di precisare meglio la relazione tra la crescenza o decrescenza della funzione $y = f(x)$ e il segno della sua funzione derivata $y = f'(x)$.
Infatti, se, come abbiamo detto, $f'(x)$ è la pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, f(x))$, dire che $f'(x)$ è positivo, equivale a dire che la funzione sta crescendo vicino a x; dire che $f'(x)$ è positivo in un intervallo, equivale a dire che la funzione sta crescendo in quell'intervallo. Viceversa, dire che $f'(x)$ è negativa in un intervallo equivale a dire che la funzione $y= f(x)$ sta decrescendo in quell'intervallo. Ovvaimente, se $f'(x) = 0$, allora in x c'è un punto a tangente orizzontale o, come si dice anche, un punto stazionario.

Ecco quindi che la conoscenza del segno della derivata di una funzione dà informazioni sulla crescenza o decrescenza della funzione (ci dice se cresce o decresce, anche se non come cresce o come decresce).

Abbiamo fino a ora parlato di approssimazione locale di una funzione y = f(x) con una funzione lineare, affermando che il grafico di tale funzione è quello della retta tangente alla funzione y = f(x) nel punto considerato. Ciò vuol dire che qualunque altra funzione lineare che passa per il punto considerato, ma il cui grafico differisce dalla retta tangente nel punto, è un'approssimazione meno buona ... tutto ciò va bene, ma attenzione a non confondere questo discorso che è in una prospettiva locale ("vicino al punto considerato"; "la retta tangente nel punto") con un discorso che potrebbe riguardare l'approssimazione di una funzione in un intervallo (prospettiva globale).
Non possiamo andare, per ora, al di là di questa osservazione, ma il concetto vi dovrebbe essere abbastanza chiaro, soprattutto se farete qualche esplorazione con il file di cabrillplus al quale potete accedere cliccando sull'hotword
approssimazione

(Se non avete Cabri II plus non effettuate l'esercitazione e non rispondete alle due domande che seguono).

La nostra risposta (motivata) alle domande poste nell'esercitazione

La nostra risposta dopo il confronto con altri gruppi di lavoro

Un altro modo per convincersi che, dato un intervallo I del tipo [x_0-r; x_0+r], la funzione lineare che approssima meglio la funzione f(x) in I non è, in generale la funzione espressa con l'equazione y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) è il seguente:

a) si prendono un considerevole numero di coppie di valori (x;y) della funzione y = f(x) con x appartenente all'intervallo I
b) si considerano i valori assunti da una funzione lineare px+q per ogni x individuato in a)
c) si determinano p e q, ossia pendenza e intercetta della funzione lineare affinché sia minima la somma dei valori assoluti delle differenze tra i valori assunti dalla funzione f(x) e quelli assunti dalla funzione lineare px+q
d) si confrontano i valori di p e q trovati con quelli della funzione lineare che meglio approssima y=f(x) in x_0.

Il seguente foglio di Excel, al quale si può accedere cliccando sull'hotword "approssimazioneglobale", è stato così costruito:
a) nella prima colonna sono riportati i valori di x appartenenti all'intervallo [1; 2] incrementati con passo costante = 0.01
b) nella seconda colonna sono stati riportati i corrispondenti valori della funzione f(x) = x^3-3x^2
c) nella terza colonna sono stati riportati i valori di una funzione lineare px+q con p e q, aventi due valori inizialmente arbitrari
d) nella quarta colonna sono stati riportati i valori assoluti delle differenze tra i valori della funzione f(x) e quelli della funzione lineare px+q
e) nelle celle H2 e I2 sono stati riportati i vaòlori di p e q, inizialmente arbitrariamente fissati.
Si è quindi calcolata la somma dei valori della colonna D (somma che appare nella cella D102). Quindi si è chiesto al risolutore di Excel (chiedi al tuo insegnante o a qualche compagno più esperto indicazioni su come funziona il risolutore di Excel) di determinare i valori delle celle H2 e I2 in modo da rendere minima la somma dei valori contenuti nella colonna D. Excel ha fornito la soluzione che potete vedere nelle colonne H2 e I2 del foglio.
Provate a utilizzare il foglio e il risolutore anche con altre funzioni, diverse da x^3-3x^2.

Approssimazioneglobale

Un'applicazione

Problema (da svolgere in piccoli gruppi)

Sapendo che $\sqrt{100} = 10$, come è possibile approssimare $\sqrt{99}$ senza utilizzare l'operazione di radice quadrata?
Prima di proseguire nella lettura, cercate di individuare strategie adeguate ad affrontare e risolvere il problema.

Le nostre strategie risolutive

Confrontate ora le vostre strategie risolutive con quelle proposte da altri gruppi di lavoro.

Il confronto con altri gruppi di lavoro

È possibile che alcune delle strategie proposte siano simili alla seguente.

Si sa che $\sqrt{81} = 9$ e che $\sqrt{100} = 10$. Quindi 9 < $\sqrt{99}$ < 10. Si cercano ora il più grande numero *x* con una cifra dopo la virgola tale che *x*^2 < 99 e il più piccolo numero *y* con una cifra dopo la virgola tale che *y*^2 > 99.

Si ha che 9.9 < $\sqrt{99}$ < 10.0

Ciò consente di approssimare $\sqrt{99}$ a meno di 10^(-1). Per migliorare l'approssimazione, è sufficiente cercare il più grande numero *x* con due cifre dopo la viurgola, tale che *x*^2 < 99 e il più piccolo numero *y* con una cifra dopo la virgola tale che *y*^2 > 99.

Si ha che 9.94 < $\sqrt{99}$ < 9.95, ottenendo un'approssimazione a meno di 10^(-2). Ovviamente in questo modo si può raggiungere l'approssimazione voluta.

Il precedente metodo e altri simili, hanno un solo difetto: funzionano nel caso particolare del problema considerato (determinare un'approssimazione per la radice quadrata di un numero) e devono essere modificati, anche profondamente, se si considerano operazioni diverse dalla radice quadrata.
Vi chiediamo ora utilizzare le conoscenze raggiunte sull'approssimazione locale di una funzione con una funzione lineare per affrontare con modalità più generali e, pertanto, più potenti, il problema appena posto.

Avete visto come sia possibile determinare una formula per la funzione lineare che meglio approssima una funzione vicino a un suo punto.

Come potete determinare la funzione lineare che meglio approssima $y = \sqrt{x}$ in *x* = 100?

Tale funzione è individuata dalla formula
f(x) = 10 + f'(100) (x - 100)

Il problema è il calcolo di f'(100), ossia della derivata prima della funzione $y = \sqrt{x}$ in x = 100.

Ricorderai, però, la modalità di calcolo della derivata prima di una funzione in un valore x_0:

a) si calcola la pendenza della secante nei punti (x_0 +h; f(x_0+h)) e (x_0; f(x_0))

$$\frac{f\left(x_0+h\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

b) si semplifica per h e poi si fa tendere a 0 h, in modo tale da determinare la penmdenza della tangente in (x_0; f(x_0)) che non può dipendere da h.

In questo caso *f*(x) = $\sqrt{x}$ e x_0 = 100. Quindi si ha:

$$\frac{\sqrt{100+h} - \sqrt{100}}{h}$$

Sembra che si sia ricaduti nel problema originario: calcolare una radice quadrata e, per giunta, più difficile di $\sqrt{99}$. In realtà le cose non stanno in questi termini, infatti se moltiplicate sia il numeratore della frazione, sia il denominatore per

l'espressione $\sqrt{100+h}+\sqrt{100}$, otterrete:

$$\frac{\left(\sqrt{100+h}-\sqrt{100}\right)\cdot\left(\sqrt{100+h}+\sqrt{100}\right)}{h\left(\sqrt{100+h}+\sqrt{100}\right)}$$

Ricordate che (A – B) (A + B) = A^2 – B^2 e verificate che

$$\frac{\left(\sqrt{100+h}-\sqrt{100}\right)\cdot\left(\sqrt{100+h}+\sqrt{100}\right)}{h\left(\sqrt{100+h}+\sqrt{100}\right)}=\frac{1}{\sqrt{100+h}+10}$$

Fate ora tendere *h* a 0 e otterrete che

$$f'(100)=\frac{1}{20}$$

Allora una formula della funzione lineare che meglio approssima $y=\sqrt{x}$ nel punto (100; 10) è
f(x) = 10 + 0.05 (x - 100)

A questo punto avete la possibilità di calcolare facilmente un'approssimazione di $\sqrt{99}$:

f(99) = 10 + 0.05 (99 - 100) $\approx$ 9.95.

Notate che quello che abbiamo fatto per x_0=100, lo possiamo ripetere per un qualunque altro valore e, in generale, per un x generico. In tal modo potremo calcolre la funzione derivata di $\sqrt{x}$; vediamo come:

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Quindi, per h che tende a 0, abbiamo $\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

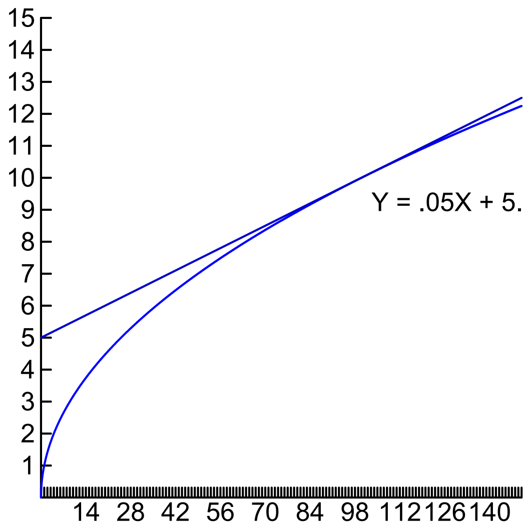
Calcolate ora, in analogo modo, valori approssimati di
$\sqrt{98}$; $\sqrt{95}$; $\sqrt{93}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{86}$; $\sqrt{83}$; $\sqrt{82}$

Confrontate in risultati che avete ottenuto con quelli ottenuti da altri gruppi di lavoro e con quelli che fornisce TI-InterActive! utilizzando il calcolo diretto con la funzione "radice quadrata".
È normale che l'approssimazione peggiori sempre più man mano che ci si allontana da 100 per il calcolo di $\sqrt{98}$; $\sqrt{95}$; $\sqrt{93}$ e man mano che ci si allnotana da 81 per il calcolo di $\sqrt{90}$; $\sqrt{86}$; $\sqrt{83}$; $\sqrt{82}$?

Le nostre risposte e osservazioni

Se utilizzate il modulo grafico di TI-InterActive!, potete avere una suggestiva interpretazione grafica di quanto è stato fatto.

Qui sotto viene riportato il grafico di $y = \sqrt{x}$ nella finestra [0; 150] x [0; 15] con la funzione lineare (e una sua formula) che approssima bene la radice quadrata nel punto (100; 10).



Come potete vedere, se ci si discosta poco da 100, la funzione lineare approssima bene la funzione radice, mentre l'errore aumenta se ci si discosta dal punto (100; 10). Notate anche che l'errore dipende anche da come è fatta la funzione "radice quadrata" vicino al punto rispetto al quale si calcola

l'approssimazione.

Fate qualche considerazione più puntuale su che cosa influenza l'errore che si commette approssimando una funzione vicino a un suo punto con una funzione lineare.

Le nostre considerazioni

Risolvi ora, individualmente, il seguente problema:

sapendo che $\sqrt{25} = 5$, approssimare localmente e linearmente $\sqrt{22}\ ; \sqrt{26}\ ; \sqrt{29}$.

La mia risposta

Attività (a coppie o in piccoli gruppi, a casa)

Cliccate sull'hotword un "problema importante" e leggete attentamente quanto scritto in esso. Se usate le calcolatrici grafiche, potete seguire l'attività utilizzandole; altrimenti cercate di utilizzare TI-InterActive! per effettuare le stesse operazioni indicate nel file. Infine risolvete i problemi proposti e poi confrontate le vostre risoluzioni con altri gruppi di lavoro

un problema importante

La nostra risposta ai èroblemi ed eventuali richieste di spiegazione

Scheda 5. Dalla funzione alla sua derivata e viceversa. Considerazioni di carattere grafico con Cabri

(Attività in piccoli gruppi in laboratorio di informatica e di sistemazione in classe. Tempo da dedicare: 3 ore)

Vogliamo ora innanzitutto far vedere come si può rappresentare in Cabri, sullo stesso foglio di lavoro, una funzione y = f(x) di terzo grado e la sua derivata y=f'(x) e come si possa, agendo sui coefficienti di f(x), vedere come queste modicazioni si ripercuotono non solo sul grafico di y=f(x), ma anche su quello della sua derivata.
Se l'esplorazione è fatta con attenzione, osservando contemporaneamente i cambiamenti di y=f(x) e quelli di y=f'(x), potrete imparare moltissimo.
Le idee su cui si basa questa costruzione sono simili a quelle che abbiamo utilizzato nella scheda 1 dellla lezione sulle "Funzioni quadratiche". Le riprendiamo, per vostra comodità (per le indicazioni precise sull'uso dei menu riprendete eventualmente in considerazione la scheda 1 della "Lezione sulle funzioni quadraiche").
Se per qualunque motivo, condiviso dalla vostra insegnante o dal vostro insegnante, non voleste costruire voi stessi la figura, potete scaricarla, possedendo Cabri II plus, cliccando sull'hotword funzione e derivata . Se, invece, non avete Cabri II plus, potete scaricare il fila in Cabrijava cliccando sull'hotword funzderjava . L'unica differenza rispetto al file in Cabri II plus è che su quello avete anche un controllo sugli aspetti formali e non solo su quelli grafici e numerici, perché con Cabri II plus è possibile ottenere le formule della funzione e della sua derivata.

Eventuali problemi nello scaricare o nell'eseguire i file in cabri II plus.
Cliccando su funzione e derivata possono verificarsi alcuni inconvenienti, anche se hai installato cabri II plus. Il primo è che il file non si apra. In questo caso conviene salvarlo sul PC e aprirlo direttamnte da CabriII plus. Se si apre, potrebbe accadere che la parabola non si veda: in questo caso potrebbe essere accaduto che il punto x sia finito sulla griglia e quindi vengono visualizzate solo le coordinate intere del grafico. Per ovviare a questo inconveniente, vai sul quinto bottone del menu a icone e scegli "Ridefinizione di un oggetto", quindi clicca sul punto x, scegliendo "punto su un ogetto" dal menu a tendina che compare, poi spostati in un qualunque punto dell'asse x e quando compare "su questo asse" clicca con il mouse. Il grafico, un po' miracolosamente, ricomparirà.

L'idea della costruzione è la seguente: una funzione di terzo grado ha bisogno di quattro parametri (a, b, c,d) per essere definita, essendo del tipo
f(x)= a*x^3 + b*x^2 + c*x + d.
In Cabri è possibile definire i quattro parametri costruendo quattro rette r, s, t, v, mettendo su ciascuna di queste rette un punto e chiedendo a Cabri di dare un numero che indichi la coordinata di tale punto sulla retta. Le quattro coordinate che si ottengono (che sono quattro numeri reali, rappresentano i coefficienti a, b, c, d della funzione quadratica).
Sull'asse delle ascisse del sistema di riferimento cartesiano si prende un punto x di cui si chiede a Cabri l'ascissa e, con lo strumento calcolatrice, si calcola
f(x)= a*x^3 + b*x^2 + c*x + d, ossia f(x). Quindi si porta sull'asse delle y il numero f(x) e si individua il punto (x, f(x)). Infine si chiede il luogo di questo punto al variare di x e compare la cubica, ossia il grafico di f(x)=a*x^3 + b*x^2 + c*x + d.
Per far disegnare il grafico della derivata è possibile:
a) inserire un quinto parametro, con una quinta retta, che consenta di rappresentare l'incremento h (nel file che abbiamo costruito, la coordinata del punto sulla retta che consente di far variare h, vale 10*h: ciò consente di considerare variazioni di h minori e, quindi, di avere una migliore approssimazione del grafico della funzione derivata).
b) Far calcolare alla calcolatrice la pendenza della secante per i punti (x; f(x)) e (x+h; f(x+h)), ossia il rapporto (f(x+h)-f(x))/h;
c) riportare questa misura sull'asse y ;
d) individuare il punto di coordinate (x; f(x+h)-f(x))/h) che, per h piccoli approssima il valore in x della funzione derivata, ossia f'(x). Se la coordinata del punto sulla retta che consente di far variare h, vale 10*h, bisogna utilizzare l'accorgimento di far dividere per 10 la coordinata quando la si inserisce nella calcolatrice: è quello che abiamo fatto noi nel file);
e) chiedere a Cabri di far disegnare il lugo del punto individuato in d) al variare di x. Il grafico risultante è quello della funzione y = f'(x).
f) Chiedere a Cabri le formule (le equazioni) delle funzioni y = f(x) e y = f'(x) (con Cabri II non è possibile, ma con Cabri II plus sì).

Trascinando i punti sulle rette r,s,t,v è possibile vedere come si modifica non solo il grafico della funzione di terzo grado al variare dei coefficienti, ma anche quello della sua derivata; trascinando il punto x è possibile percorrere con il mouse il grafico della funzione e, al tempo stesso, quello della sua derivata.

In ogni caso, sia costruendo voi stessi, sia utilizzando il file di Cabri II plus o quello in cabijava, effettuate le seguenti esplorazioni e rispondete alle seguenti domande (fatte allo scopo di aiutarvi nell'effettuare un'esplorazione ricca di significato, ossia tesa a scoprire importanti relazioni tra una funzione e la sua derivata).

Che cosa succede se cambiate segno ad *a*?
Che cosa accade se *h* tende a diventare sempre più piccolo? Perché quando *h* è esattamente 0 il grafico in rosso, quello della derivata, scompare?
Che cosa accade al grafico blu della funzione se modificate il coefficiente *d*? E al grafico della funzione derivata (grafico rosso)?. Questo fatto suggerisce qualcosa riguardo alle relazioni tra funzione e sua derivata? Pensate, in particolare, al problema, data una funzione y=f(x) di trovare una funzione y=g(x) tale che la derivata di g(x) sia uguale a f(x) ... che cosa vi suggeriscono le esplorazioni effettuate relativamente a tale problema?
Quando h tende a 0 la curva derivata si sposta sempre in un verso oppure ciò dipende dai coefficienti della funzione e da x?
Se lavorate con Cabri II plus, forse noterete che il primo coefficiente della parabola non cambia al variare di h, mentre gli altri coefficienti sì: come può spiegarsi tale fatto? (Nel file in Cabrijava questo fatto si intuisce notando che la parabola non cambia apertura, quindi il suo primo coefficiente non cambia al variare di h). Giustificate ogni risposta e prendere nota di altre eventuali osservazioni, confrontandole con quelle di altri gruppi.

Le nostre risposte

Le nostre risposte dopo il confronto con altri gruppi

Scheda 6. Dalla funzione alla sua derivata e viceversa
Considerazioni di carattere formale

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 3 ore)

1. Dimostrate, in ambiente carta e matita, perché la variazione del coefficiente *d* in f(x)=a*x^3+b*x^2+c*x+d non incide sulla formula della funzione derivata (suggerimento: calcolate la derivata di f(x) e poi osservate il risultato).

La nostra risposta

2. Utilizzate il precedente risultato per giustificare le seguente affermazione e formularla in un linguaggio a voi più comprensibile:

il problema, data y = f(x), di determinare una funzione y= g(x), tale che la derivata di g sia uguale a f è determinato a meno di una costante

La nostra (motivata) risposta

3. Dimostrate che la derivata di una funzione f(x)= a*x^3+b*x^2+c*x+d è f'(x) = 3*a*x^2 + 2*b*x

La nostra risposta

4. Utilizzate il calcolo precedente per dimostrare quanto osservato nella

precedente scheda e cioè che che il primo coefficiente della parabola (che rappresenta la variazione della pendenza della secante al grafico di f(x)= a*x^3+b*x^2+c*x+d nei punti (x; f(x)) e (x+h; f(x+h)) non cambia al variare di h, mentre gli altri coefficienti sì.

La nostra risposta

5. Determinate la formula delle infinite funzioni la cui derivata è
f(x) = x^2 + 2*x +1.
Suggerimento: si tratterà sicuramente di una funzione di terzo grado, ossia di una funzione del tipo g(x) = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d ... provando a derivare tale funzione, ottenete g'(x) = ...
Ma se volete che questo polinomio sia uguale a x^2 + 2*x + 1, il primo coefficiente deve essere uguale a 2 e cioè *a* deve essere ....
....

La nostra risposta (se avete seguito una strada differente per rispondere specificate le vostre scelte e i motivi)

6. (Attività individuale a casa)
Determinate, anche aiutandovi con TI - InterActive! la formula delle infinite funzioni la cui derivata è:
a) f(x) = 3*x^3 + 2
b) f(x) = 2*x^3 - 3x^2
c) f(x) = 4*x^3 - x - 8
d) f(x) = 5*x^4 - 3*x^3 + 0.5 * x^ 2 - x + 8

La mia risposta

7 (attività da svolgersi in piccoli gruppi a scuola)
Provate a dare una giustificazione del fatto che se
f(x) = h(x) + k(x)
allora
f'(x) = h'(x) + k'(x)

La nostra risposta

Provate a dare una giustificazione della seguente procedura di calcolo:

"per determinare una funzione la cui derivata è f(x) = x^3 + 3*x^2 + x - 1, mi determino una funzione la cui derivata è x^3; una funzione la cui derivata è 3*x^2; una funzione la sui derivata è x e una funzione la cui derivata è -1. Quindi addiziono tutte la funzioni ottenute e ho una possibile risposta"

La nostra risposta

Scheda 7 L'approssimazione locale di una funzione con una funzione quadratica

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 4 ore)

1. (da svolgere in piccoli gruppi) Abbiamo più volte detto che la conoscenza della funzione lineare che approssima localmente una funzione y=f(x) consente di dire se una funzione cresce o descresce, ma non come cresce o decresce (sempre più o sempre meno).
Ciò è naturale, se si pensa che il cresscere o il decrescere sempre più o sempre meno di una funzione comporta una concavità nel grafico di tale funzione e le funzioni lineari non hanno concavità.

Poiché il "come cresce o decresce" è informazione di fondamentale importanza per descrivere il comportamento di una funzione, dobbiamo concludere che approssimare una funzione con una funzione lineare non fornisce infomazioni importanti.

Se notiamo, però, che una funzione quadratica ha una concavità ben definita, possiamo supporre che se riuscissimo ad approssimare localmente una funzione con una funzione quadratica, non perderemmo l'informazione sulla concavità (ossia sul come cresce o decresce).

La domanda che vi poniamo è la seguente:

in modo analogo a quanto visto per le relazioni tra la crescenza di una funzione e il segno della sua derivata prima, è possibile determinare un metodo che consenta di avere informazioni (locali e globali) sulla concavità di una funzione?

Suggerimento (le differenze prime danno informazioni sulla crescenza di una funzione: se esse sono positive allora la funzione cresce. Se le differenze prime aumentano sempre più, allora la funzione cresce sempre più, ossia il suo grafico volge la concavità verso l'alto ... in tal caso le differenze seconde hanno segno .... quindi...)

La nostra risposta

La nostra risposta dopo un confronto con altri compagne e compagni

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

2. (da svolgere in piccoli gruppi) Considerate la funzione f(x) = x^ 3 + 2x e determinate la funzione lineare che l'approssima localmente in x = 1. Per presentare bene la risposta, anche dal punto di vista grafico, potete aiutarvi con TI - InterActive!

La nostra risposta

Fornendo la risposta avrete notato che $f'(1) = 5$ e sapete che 5 è la pendenza della funzione lineare che approssima $f(x)$ vicino a 1. Anzi, tale funzione la determinate proprio imponendo
a) il passaggio di $y = p^* x + q$ per il punto (1; 3)
b) imponendo che $y'(1) = 5$, ossia $p = 5$.

E se volete approssimare $f(x)$ con una funzione di secondo grado $g(x) = a^*x^2 + b^*x + c$? Quale altra condizione dovreste imporre (pensate che localmente devono avere la stessa concavità!)

La nostra risposta

La nostra risposta dopo un confronto con altri compagne e compagni

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

Svolgendo le attività 1 e 2, dovrete avere intuito che la concavità di una funzione è determinata dal segno delle sue differenze seconde, ossia dalle differenze delle differenze prime. Abbiamo visto che le differenze prime danno, rispetto alla crescenza di una funzione, le stesse informazioni che dà la derivata prima. Le diferenze seconde danno le stesse informazioni, rispetto ala concavità (ossia a come cresce o decresce una funzione) della derivata della derivata di una funzione. Sembra quasi uno scioglilingua, ma è più facile di quanto non appaia in un primo momento: il segno della derivata di una funzione ci dice se tale funzione cresce o decresce. Supponiamo che cresca; allora ci interesserà sapere se:
a) cresce sempre più; in tal caso le pendenze devono aumentare, ossia la funzione derivata deve essere crescente;
b) cresce sempre meno; in tal caso le pendenze devono diminuire, ossia la funzione derivata deve essere decrescente.
Ma come facciamo a sapere se la funzione derivata cresce o descresce? Semplice, essendo essa stessa una funzione, ne possiamo calcolare la sua derivata e poi ne possiamo studiare il segno. Possiamo quindi calcolare la derivata di una derivata, ossia quella che viene detta "derivata seconda" (in analogia con le "differenze seconde").
La derivata prima di una funzione y=f(x) si indica con y=f'(x), mentre la sua derivata seconda (ossia la drivata prima di y=f'(x)) si indica con y = f''(x).

3 (da svolgere a casa individualmente. È permesso aiutarsi, per rispondere, con TI - InterActive!)

Approssimate le seguenti funzioni, vicino al punto indicato, con una funzione quadratica:
a) f(x) = 3 * x^4 - 3 * x^2
b) f(x) = - 2 * x^3 - 3 * x^ 2 + 2 * x - 4
c) f(x) = 3 * x^ 5 - 4 * x ^ 3
d) f(x) = 2 * x^ 4 - 3 * x^ 3 + 4
e) sapendo che f(0) = 3; f'(0) = 2 e f''(0) = - 1, qual è miglior la funzione di secondo grado che approssima localmente f(x) in 0? Puoi tracciarne uno schizzo locale del grafico?
f) sapendo che f(0) = 0; f'(0) = - 2 e f''(0) = 3, qual è la funzione di secondo grado che approssima localmente f(x) in 1? Puoi tracciarne uno schizzo locale del grafico?

Le mie risposte

Un'applicazione

Vediamo quanto migliora l'approssimazione di $\sqrt{95}$ se approssimiamo la funzione $\sqrt{x}$ in x= 100 con una funzione quadratica e non con una funzione lineare.
In precedenza abbiamo visto che una formula della funzione lineare che meglio approssima $y=\sqrt{x}$ nel punto (100; 10) è
f(x) = 10 + 0.05 (x - 100)

Quindi $\sqrt{95}$ è approssimato (linearmente) da 10 + 0.05 (95 - 100) = 9.75
Risolvendo i precedenti esercizi, dovreste avere visto che la migliore funzione quadratica che approssima una funzione y=f(x) in un suo punto x_0 è data da:
$g(x) = f(x_0) + f'(x_0) *(x-x_0) + f''(x_0)/2 * (x-x_0)$^2

Quindi, nel caso di f(x) = $\sqrt{x}$ e x_0 = 100, abbiamo:
f(100)= 10
f'(100) = 1/20 = 0.05

dobbiamo calcolare f''(x), ossia la derivata prma di f'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

f''(x) = (f'(x+h)-f'(x))/h con h che tende a 0. Applichiamo quindi la procedura per il calcolo della derivata alla funzione $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **:**

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+h}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{h}$$

$$\frac{1}{2\cdot h\sqrt{x+h}} - \frac{1}{2\cdot h\sqrt{x}}$$

Chiediamo ora a TI-InterActive! di ridurre a un'unica frazione (il comando comDenom(Ans) vuol dire: riduci allo stesso denominatore l'ultimo output)

$\mathrm{comDenom}(ans)$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{2\cdot h\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}}$$

Chiediamo ora a TI-InterActive! di moltiplicare numeratore e denominatore per $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$

Otteniamo:

$$\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{\left(2\cdot h\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+h}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

$$\frac{-h}{2\cdot h\cdot x\cdot\sqrt{x+h}+2\cdot h\cdot x^{3/2}+2\cdot h^2\cdot\sqrt{x}}$$

Semplificando per *h* numeratore e denominatore otteniamo:

$$\frac{-1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x+h}+2\cdot x^{3/2}+2\cdot h\cdot\sqrt{x}}$$

Facciamo ora tendere *h* a 0 e otteniamo:

f''(x) = $\frac{-1}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}$ **essendo x^(3/2) =** $x\cdot\sqrt{x}$

Quindi f''(100) = - 1/4000

Infine un'approssimazione (quadratica) di $\sqrt{95}$ **è data da:**

$$10+0.05\cdot(-5)-\frac{1}{8000}\cdot 25$$

10 + 0.05 (95 - 100) - 1/8000 * (95-100)^2 = 9.74687

Invece di 9.75 (ottenuto con l'approssimazion lineare).

Ecco il risultato che TI-InterActive! fornisce quando gli si chiede di calcolare $\sqrt{95}$ **:**

9.74679 **.... non male, no?**

Segue ora un'attività di sistemazione, formalizzazione e consolidamento delle conoscenze e tecniche apprese che, comunque, devi compiere per la maggior parte del tempo individualmente, consultandoti con tuoi compagni o tue compagne solo dopo aver riflettuto bene sui chiarimenti di cui pensi di aver bisogno. Lo stesso vale per le richieste di precisazione e spiegazione che vuoi porre all'insegnante: cerca di chiarire bene che cosa e perché vuoi chiedere. Naturalmente devi chiedere aiuto se qualche passo del riassunto e della sistemazione non ti fosse chiaro o non riuscissi a svolgere qualche esercizio di consolidamento.
Ti consigliamo di rispondere prima al test di autovalutazione per vedere se hai acquisito le conoscenze e le tecniche fondamentali, quelle necessarie per proseguire nelle lezioni. In seguito passerai alla sistemazione e agli esercizi di consolidamento. Ricorda inoltre che le schede e le attività che hai svolto sono sempre un punto di riferimento importante per il tuo studio, per l'attività di sistemazione, per quella di ripasso e consolidamento e anche per quella di recupero (nel caso tu sia piuttosto disorientata o disorientato, ti consigliamo di riprendere con attenzione tutte le attività già svolte).
Non proponiamo alcun esempio di verifica, perché ci sembra che gli argomenti affrontati in questa lezione abbiano bisogno di essere metabolizzati con calma, senza il peso che, in genere, viene esercitato da attività di verifica sommativa: la riflessione sul lavoro svolto e l'esito del test di autovalutazione, oltre agli esercizi di consolidamento dovrebbero essere sufficienti a fornire a te e al tuo insegnante elementi di significativa valutazione formativa.

Test di autovalutazione

Riassumendo e sistematizzando

Esercizi di consolidamento