Introduzione al calcolo letterale

Premessa: a che cosa serve il calcolo letterale

Le lettere per assegnare un nome: quando si parla di un punto, un segmento, un generico numero naturale, più in generale quando si parla di un oggetto matematico, può essere utile assegnare un nome a questo oggetto. Spesso in matematica si usano le lettere dell'alfabeto per assegnare nomi agli oggetti del discorso. Così, per esempio, per parlare di un generico numero naturale si può usare la lettera *n*, oppure *x*, o un'altra lettera dell'alfabeto.
Le lettere per esprimere schemi di calcolo: la scrittura 2*x+3 può essere letta come uno schema di calcolo, ossia l'indicazione delle operazioni che si chiedono di effettuare su un qualsiasi numero *x*. In questo caso lo schema indica di fare il doppio di *x* e di aggiungere 3 al risultato così ottenuto. È ovvio che il numero che si ottiene dopo tali operazioni dipende dal numero *x* o, come si dice anche in matematica, è *funzione* di *x*.
Le lettere per esprimere formule o relazioni tra schemi di calcolo: nella scuola media avrai sicuramente incontrato scritture del tipo *A=b*h* che, se *b* e *h* rappresentano, rispettivamente, la base e l'altezza di un rettangolo, si legge: "l'area di un rettangolo si ottiene moltiplicando la misura della sua base per quella della sua altezza". Questa scrittura è una formula che indica come determinare l'area di un rettangolo, note le misure della sua base e della sua altezza o, analogamente, che precisa la relazione che esiste tra l'area di un rettangolo e le misure della sua base e della sua altezza.
Nella scuola media avrai anche incontrato scritture del tipo *a*(b+c)=a*b+a*c.* Questa scrittura esprime quella che è nota come proprietà distributiva dellla moltiplicazione rispetto all'addizione (per moltiplicare una somma per un fattore è possibile moltiplicare ciascun addendo della somma per quel fattore e poi addizionare i risultati ottenuti).Questa scrittura può anche essere pensata come una relazione di uguaglianza tra due schemi di calcolo:
1) lo schema *a*(b+c)*
2) lo schema *a*b+a*c.*
Esprimere un'uguaglianza tra questi due schemi equivale quindi ad affermare che, qualunque siano i numeri *a* e *b* che si considerino, il numero che si ottiene con lo schema 1) è lo stesso numero che si ottiene con lo schema 2).
Le lettere per risolvere problemi e per dimostrare: se ti chiedessero che cosa puoi dire della somma di due numeri dispari consecutivi rispetto alla divisibilità, potresti fare qualche prova e accorgerti che la somma di due numeri dispari consecutivi sembra essere divisibile per 4 (1 + 3; 3 + 5; 5 + 7 .... sono tutti divisibili per 4). Naturalmente, per quante prove tu possa fare, non ti sarà mai possibile verificare la tua affermazione (la somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4) per tutte le possibili coppie di numeri dispari consecutivi, dato che esse sono infinite. Il calcolo letterale consente di risolvere il problema e, al tempo stesso, di *spiegare perché,* comunque si prendano due numeri dispari onsecutivi, la loro somma è un multiplo di 4. Vedrai fra breve che un numero pari si può scrivere come 2*n. Ciò vuol dire che un numero dispari si può scrivere come 2*n+1. Allora due numeri dispari consecutivi possono scriversi come 2*n–1 e 2*n+1. Ebbene, la loro somma è 2*n–1 + 2*n+1. Il calcolo letterale consente di dire che questa somma può scriversi come 4*n, ossia è un multiplo di 4.

Tutte le situazioni prese in esame e tutti gli esempi considerati suggeriscono che il calcolo letterale sia, in ogni caso, un potente strumento per **generalizzare**: esprimere proprietà generali (con formule e uguaglianze tra schemi di calcolo) o spiegare perché un'ipotesi che abbiamo fatto funziona in generale e non solo nei casi particolari considerati.

Operazioni con i polinomi

(si prevedono circa 10 ore di lavoro in classe)

Prerequisiti: le proprietà delle quattro operazioni e delle potenze; semplici calcoli con numeri razionali, rappresentati sotto forma di frazioni o di numeri decimali.

Il calcolo letterale, come dice la parola stessa, fornisce regole per effettuare operazioni con le lettere: queste regole, anche se non lo sai, ti sono già note, in quanto sono le stesse che tu hai utilizzato per effettuare operazioni fra numeri, in particolare per effettuare le operazioni con i numeri razionali. Le richiameremo all'inizio, utilizzando alcune attività che consentono di andare alla loro riscoperta e di vedere esempi di calcolo letterale. In queste attività ti verrà chiesto di fare uso del manipolatore simbolico di TI - InterActive! (ossia il sistema di calcolo di TI - InterActive!), che funziona proprio seguendo quelle regole di cui abbiamo parlato. Puoi quindi vedere queste attività come una ricerca delle regole con cui il manipolatore simbolico di TI - InterActive! esegue le operazioni con le lettere.

Nome e cognome dei componenti del gruppo che svolge le attività di gruppo di questa lezione

Nome e cognome dei componenti della coppia che svolge le attività di coppia di questa lezione

Nome e cognome della studentessa o dello studente che svolge le attività individuali di questa lezione

Scheda 1 (Le proprietà delle operazioni con le lettere)

Aprite il manipolatore simbolico di TI - InterActive!, clicando sulla prima icona del menu a icone, digitate l'espressione a*(b+c) e, infine, premete invio. Dovreste ottenere la scrittura:

$a \cdot (b + c)$

$$a \cdot (b + c)$$

Come potete vedere, il manipolatore simbolico non ha eseguito alcuna operazione. Ciò non è strano, perché, nel calcolo letterale, non sempre è conveniente eseguire operazioni; spesso è più conveniente lasciare le operazioni indicate e quindi, se vogliamo essere sicuri che il sistema di calcolo di TI - Interactive trasformi il prodotto *a(*b*+*c)* in una somma, dobbiamo ordinarglielo con un comando opportuno. Tale comando è "Expand" e si trova nel menu Math - Algebra (o può anche essere digitato da tastiera). La sua sintassi è:**
expand (espressione da calcolare).

$\text{expand}(a \cdot (b + c))$

$$a \cdot b + a \cdot c$$

Come potete vedere, questa volta TI - InterActive! ha trasformato il prodotto *a(*b*+*c*) nella somma *a*b* + *a*c* .**
Possiamo anche dire che i due schemi di calcolo, *a(*b*+*c*) e *a*b* + *a*c* sono equivalenti, ossia forniscono lo stesso risultato quando ad *a* e a *b* si sostituiscano numeri (non è certo strano: si tratta, infatti, della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).**

Nelle usuali scritture spesso si omette il segno di moltiplicazione tra due variabili e si scrive *ab* + *ac*; TI - InterActive! mette sempre il segno di moltiplicazione, perché la scrittura *ab* verrebbe interpretata non come un'operazione di moltiplicazione tra le lettere *a* e *b*, ma come una variabile letterale unica *ab* (e non composta da *a* moltiplicato *b*).
Per capire bene la differenza, provate a far calcolare da TI - InterActive! (p*i*p*p*o)^2 e (pippo)^2

$\text{expand}\left((p \cdot i \cdot p \cdot p \cdot o)^2\right)$

$$i^2 \cdot o^2 \cdot p^6$$

$\text{expand}\left(pippo^2\right)$

$$pippo^2$$

Perché TI - InterActive! dà due risultati differenti? E, soprattutto, da dove salta fuori il primo dei due risultati?

Risposta

Notate che in TI-InterActive!, volendo far calcolare una potenza di esponente *n* e base *a* è necessario dare il comando a^n (leggi "a elevato alla n"). L'output (ossia la risposta) che TI - InterActive! dà a tale input è la scrittura a^n, ossia la scrittura che siamo abituati a vedere sui libri di testo. Nei nostri fogli di lavoro troverete a volte la scrittura a^n che TI-InterActive! richiede per l'input, altre volte la scrittura a^n , che TI- Inter Active! sceglie per rappresentare il risultato.

Provate a far eseguire a TI - InterActive! i due seguenti calcoli (ricordate di utilizzare il comando Expand):
b*(*a* + *c*)**
2*(*a* + *b*)

Prima di andare avanti nella lettura, cercate di precisare le regole che TI - InterActive! ha utilizzato nell'effettuare i calcoli che vi sono stati proposti in questa scheda.

Risposta

Regole di calcolo usate da TI - InterActive!

Le regole di calcolo che sono state utilizzate nelle precedenti operazioni sono le seguenti:

1. Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Tale proprietà afferma che per moltiplicare una somma per un fattore è possibile moltiplicare ciascun termine della somma per quel fattore e poi addizionare i risultati ottenuti.
In simboli: A*(B+C) = A*B + A*C

Esempio con le lettere m*(n+c) = m*n + m*c
Esempio numerico: 2*(4+3) = 2*4 + 2*3

Notate che nell'enunciare in simboli la proprietà distributiva abbiamo utilizzato le lettere maiuscole A, B e C. Poiché negli esempi di calcolo letterale non utilizzeremo mai lettere maiuscole, A, B e C possono indicare, senza pericolo di ambiguità, una qualunque espressione letterale e la scrittura A*(B+C) assume il significato di uno "schema di calcolo" valido qualunque siano le espressioni letterali che si sostituiscano ad A, B e C. Per esempio, se vogliamo calcolare (a+b)*(c+d)
possiamo farci aiutare da TI - InterActive!:

$$\text{expand}((a+b)\cdot(c+d))$$

$$a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

ottenendo il risultato sopra riportato... ma come ha fatto TI - InterActive! a ottenere questo risultato? Quali regole di calcolo ha utilizzato?

La risposta è: ha utilizzato la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, ossia A*(B+C) = A*B + A*C
Vediamo come: innanzitutto interpretiamo A con (a+b), B con c e C con d. Otteniamo:
(a+b)*(c+d) = (a+b)*c + (a+b)*d
Applichiamo nuovamente la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione sia per (a+b)*c sia per (a+b)*d ottenendo:
a*c + b*c + a*d + b*d
ossia qualcosa di molto simile, anche se non proprio uguale alla risposta di TI - InterActive!. Perché possiamo dire che la risposta di TI - InterActive! e la nostra sono equivalenti, nonostante la differenza di scrittura? Lo possiamo dire per un'altra proprietà di cui si è fatto uso in questi calcoli:

2. Proprietà commutativa (dell'addizione e della moltiplicazione)

La proprietà commutativa dell'addizione afferma che:
in un'addizione, cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia
In simboli:
A+B = B+A

La proprietà commutativa della moltiplicazione afferma che:
in una moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.
In simboli:
A*B = B*A

Esempi con le lettere: 2a + b = b + 2a $m * n^2 = n^2 * m$
Esempi con i numeri: 5 + 3 = 3 + 5 **3 * 5 = 5 * 3**

Ecco perché le risposte date al calcolo (a+b)*(c+d) da TI - InterActive! e da noi sono equivalenti (ossia portano allo stesso risultato): per la proprietà commutativa dell'addizione.
a*c + b*c + a*d + b*d = a*c + a*d + b*c + b*d
TI - InterActive! ha scelto di ordinare alfabeticamente il risultato; noi, consapevoli della possibilità di utilizzare la proprietà commutativa, non ci preoccupiamo di determinare una modalità di ordinamento degli addendi.

A proposito, prima di enunciare altre regole di calcolo, notate che, moltiplicando fra loro (a+b) e (c+d) si ottiene una somma di 4 addendi, ciascuno dei quali è un prodotto di due fattori. Sapreste dire in quanti modi equivalenti si può scrivere questa somma? In altri termini, quanti sono gli schemi di calcolo, contenenti 4 addendi ciascuno composto da due fattori (scelti tra a,b,c,d,), equivalenti a quello fornito da TI- InteActive!? Per rispondere fate qualche prova, poi cercate di individuare una vera e propria strategia di conteggio. Confrontate la vostra strategia con quelle di altre compagne e compagni e seguite anche i suggerimenti del vostro insegnante.

Risposta

3. Proprietà associativa (della addizione e della moltiplicazione)

La proprietà associativa dell'addizione afferma che:
eseguire prima l'addizione tra due addendi A e B e poi addizionare la somma ottenuta con un addendo C porta allo stesso risultato che si ottiene addizionando A con la somma di B e C

In simboli: $A+(B+C) = (A+B)+C$

La proprietà associativa della moltiplicazione afferma che:
eseguire prima la moltiplicazione tra due fattori A e B e poi moltiplicare il prodotto ottenuto con un fattore C porta allo stesso risultato che si ottiene moltiplicando A con il prodotto fra B e C

In simboli: $A*(B*C) = (A*B)*C$

Notate come la scrittura in simboli sia molto più diretta e chiara di quella scritta nella lingua italiana: allenarsi a comprendere la scrittura simbolica della matematica vuol dire dotarsi di strumenti essenziali per comprendere ed esprimere il pensiaro matematico.

Le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione sono state utilizzate quando abbiamo fatto calcolare

$(p*i*p*p*o)^2$
$(p*i*p*p*o)^2 = (p*i*p*p*o)*(p*i*p*p*o) = (i*p*p*p*o)*(i*p*p*p*o)$
lindicando $p * p * p$ con p^3 possiamo scrivere:
$i*p^3*o*i*p^3*o = i*i*o*o*p^3*p^3$
Indicando $i*i$ con i^2, $o*o$ con o^2 e p^3*p^3 con p^6, possiamo scrivere:
$i^2*o^2*p^6$
che è il risultato fornito da TI - InterActive!.

In questo esempio abbiamo visto l'uso di alcune regole di semplificazione che riguardano le regole di calcolo delle potenze e che qui richiamiamo per vostra comodità:

Regole di semplificazione per i calcoli con le potenze

Il prodotto di potenze di ugual base è una potenza che ha quella base e come esponente la somma degli esponenti
In simboli: $A^n * A^m = A^{n+m}$
Esempio con le lettere: $a^3 * a^5 = a^8$
Esempi con i numeri $2^3 * 2^4 = 2^7$

Producete altri due esempi con le lettere.
Risposta:

Il quoziente di potenze di ugual base è una potenza che ha quella base e come esponente la differenza degli esponenti
In simboli: $A^n : A^m = A^{n-m}$
Esempio con le lettere: $a^5 : a^3 = a^2$
Esempi con i numeri $2^6 * 2^4 = 2^2$

Producete altri due esempi con le lettere.
Risposta:

La potenza di una potenza è una potenza che ha quella base e come esponente il prodotto degli esponenti
In simboli: $(A^n)^m = A^{n*m}$
Esempio con le lettere: $(a^5)^3 = a^{15}$
Esempi con i numeri $(2^6)^4 = 2^{24}$

Producete altri due esempi con le lettere.
Risposta:

Valgono inoltre le seguenti uguaglianze.
$A^{-n} = (1/A)^n$
$(A*B)^n = A^n*B^n$
$(A:B)^n = A^n : B^n$

Producete tre esempi, uno per ciascuna uguaglianza, con le lettere.
Risposta:

Le proprietà che completano quelle regole secondo cui opera il sistema di manipolazione simbolica di TI - InterActive! nel calcolo letterale sono le seguenti:

4. Esistenza dell'elemento neutro (per l'addizione e la moltiplicazione)

Esiste un elemento, lo "zero" che, addizionato a un qualunque termine del calcolo letterale, non modifica l'elemento stesso
In simboli $A + 0 = A$

Esiste un elemento, l'"uno" che, moltiplicato per un qualunque termine del calcolo letterale, non modifica l'elemento stesso
In simboli $A * 1 = A$

5. Esistenza dell'inverso (per l'addizione e la moltiplicazione)

Esiste un elemento, detto "opposto" o "inverso additivo" che, addizionato a un qualunque termine del calcolo letterale, dà l'elemento neutro dell'addizione, ossia lo "zero". L'opposto di A si indica con ^{-}A.
Sulla calcolatrice e sul manipolatore simbolico di TI - IntarActive! corrisponde al tasto che si trova prima del tasto ENTER: non devi confonderlo con il segno di sottrazione, che si trova due tasti sopra ENTER e che lega fra loro due termini; l'opposto si applica a un unico termine.
In simboli $A + (^{-}A) = 0$

Esiste un elemento, detto "reciproco" o "inverso moltiplicativo" che, moltiplicato per un qualunque termine diverso da "zero" del calcolo letterale, dà l'elemento neutro della moltiplicazione, ossia "uno". Il reciproco di A si indica con 1/A o con A^{-1} .
Sulla calcolatrice e sul manipolatore simbolico di TI - IntarActive! corrisponde al tasto x^{-1} che si trova nella quinta riga, seconda colonna.
In simboli $A * A^{-1} = 1$ se A diverso da 0.

6. L'opposto di una somma

L'opposto di una somma è uguale alla somma degli opposti
In simboli:
$^{-}(A+B) = {}^{-}A + {}^{-}B$

Notate che, per la proprietà distributiva, un'addizione tra due addendi può essere ridotta a un unico termine se e solo se i due addendi hanno la stessa parte letterale. Questa proprietà può essere ricordata con lo slogan che 2 mele + 3 mele fanno 5 mele (o anche 2 metri + 3 metri = 5 metri).

Alcuni esempi:

$a + 5a = 1a + 5a = (1 + 5)*a = 6a$
$3ab - 2ab = (3 - 2)*ab = 1ab = ab$
$3m^2n + 6m^2n = (3 + 6)m^2n = 9m^2n$
$2a - 5a = (2 - 5)a = -3a$

Ricordate, inoltre, le regole dei segni per la moltiplicazione!

Attenzione: nella scrittura delle espressioni sopra riportate abbiamo utilizzato la notazione propria dei libri di testo. In TI-InterActive! si deve prestare molta più attenzione. Per esempio, al posto di $3m^2n + 6m^2n$, per ottenere come risultato $9m^2n$, avremmo dovuto scrivere:
3*m^2*n+6*m^2*n
Sapete dire perché?

Risposta:

Scheda 2 (operazioni con le lettere e dimostrazione del risultato ottenuto con TI-InterActive!)

Svolgi i seguenti esercizi basandoti sul primo, che è completamente svolto.

Fai eseguire i seguenti calcoli letterali a TI - InterActive! e poi dimostra che il risultato, che TI - InterActive! dà, è corretto.

1. (a – 2b)*(a + 3b)

$\text{expand}((a - 2 \cdot b) \cdot (a + 3 \cdot b))$

$$a^2 + a \cdot b - 6 \cdot b^2$$

Dimostrare che (a–2b)(a+3b) = a^2+ab–6b^2 vuol dire precisare quali proprietà e regole di semplificazione sono state utilizzate per trasformare l'epressione (a–2b)*(a+3b) nell'espressione a^2+ab–6b^2.

(a – 2b)*(a + 3b) =	
(a – 2b)*a + (a – 2b)*(3b)	**per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**
a*a – 2b*a + a*(3b) – 2b*(3b)	**per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**
a^2 – 2ba + 3ab – 6b^2	**per le proprietà delle potenze**
a^2 + ab – 6b^2	**per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**

come volevasi dimostrare.

Nota che questa dimostrazione non ci ha convinto che il risultato era corretto: questo già lo sapevamo! Ci ha spiegato *perché* il risultato corretto è quello; in altri termini ha esplicitato quali delle proprietà che abbiamo posto a fondamento del calcolo letterale sono state utilizzate per ottenere il risultato. In qualche modo la dimostrazione rende più trasparente il lavoro fatto dal manipolatore simbolico di TI - InterActive!.

In modo analogo a quanto visto con il precedente esercizio, fai eseguire i seguenti calcoli letterali a TI - InterActive! e poi dimostra che il risultato che TI - InterActive! dà è corretto.

2. (m^2*n + m*n) (n^2*m – m*n)
3. (a – b)*(a + b)

4. $(a + b)^2$
5. $(a - 2*b)*(2*a + 4*b)$
6. $(a - 3*b)^2$
7. $(a - 2*b)*(a^2 + 2*a*b + 4*b^2)$
8. $(a - b)^3$
9. $(a - 2*b)*(a + 3*b)*(a + b)$
10. $(x - 3*x*y^2) * (2*x - y^2)^2$

Intermezzo: una riflessione sul segno "="

In matematica si fa spesso uso del segno uguale (=) con significati molto diversi. Ci occupiamo qui di farti riflettere sulle quattro seguenti situazioni:
1) 5 + 2 = 7
2) a + b = b + a
3) A = b*h
4) y = 2

Nelle prime tre si usa uno stesso segno (=) con due significati diversi, ma non si ha ambiguità, perché quello che si vuole esprimere è abbastanza chiaro:
nel primo caso si è eseguita un'addizione calcolando la somma di 5 e 2. Il significato del segno "uguale" è quello di indicare il risultato di un'operazione. Il segno "=", in questo caso, invita a eseguire un'operazione.
Nel secondo caso, invece, il segno "=" esprime un'equivalenza fra due schemi di calcolo (la proprietà commutativa dell'addizione). Qui non si esegue alcuna operazione: si afferma che se si eseguisse, dopo aver sotituito al posto di a e b opportuni valori, l'operazione a+b si otterrebbe lo stesso risultato che si avrebbe eseguendo b+a.
Nel terzo caso, supponendo che b e h si indichino la base e l'altezza di un rettangolo e A la sua area, si dice che l'area di un rettangolo si può calcolare moltiplicando la misura della sua base per quella della sua altezza. Il segno "=" qui serve a definire l'oggetto "area" (A) a partire dalla base (b) e dall'altezza (h).
Nel quarto caso l'interpretazione è più delicata: si sta assegnando il valore 2 alla variabile y, oppure ci si sta chiedendo se il contenuto della variabile y è uguale a 2? Nel primo caso il segno "=" ha un significato "normativo": esso indica quanto deve essere il valore della variabile y. Nel secondo caso il segno "=" suggerisce una domanda che può avere due risposte: vero, se il contenuto della variabile y è 2; falso, se il contenuto della variabile y è diverso da 2.
Nei linguaggi di programmazione queste situazioni devono essere ben distinte: non ci possono essere ambiguità, visto che tali linguaggi sono fatti per parlare con il calcolatore. Purtroppo l'interfaccia di TI-InterActive! è piuttosto flessibile e, in alcuni casi, accetta l'uso di uno stesso segno con significati diversi: a un utilizzatore poco attento e riflessivo questa flessibilità, apparentemente apprezzabile, può costare cara (in termini di comprensione e consapevolezza di

quello che si sta facendo). Ritorneremo in altre lezioni, in particolare in quelle che hanno a che fare con le definizioni di funzioni, su questo delicato argomento.

Scheda 3 (i polinomi)

Ad eccezione dell'espressione $1/(A^n)$, tutte le espressioni fino a ora considerate sono espressioni polinomiali o, più semplicemente, polinomi. In questa scheda, nella quale ti chiediamo di fare un esercizio di attenta lettura, si cercherà di precisare che cosa si intende per polinomio. I polinomi sono particolarmente importanti, perché sono i mattoni del calcolo letterale.
Un polinomio è una scrittura in cui compaiono solo addizioni e moltiplicazioni tra numeri e lettere. Preciseremo che cosa si intende con tale affermazione definendo formalmente che cosa si intende con polinomio.Tale definizione può essere espressa con il seguente insieme di regole.

Regola 1 di base. I numeri razionali sono polinomi.
Regola 2 di base. Le lettere sono polinomi.
Regola 3. se P è un polinomio, allora $-P$ è un polinomio.
Regola 4. se P e Q sono polinomi allora $P + Q$ è un polinomio.
Regola 5. se P e Q sono polinomi allora $P \cdot Q$ è un polinomio.
Regola 6. di chiusura. Nient'altro è un polinomio.

Le regole date definiscono i polinomi per ricorsione: ciò vuol dire che si definiscono i polinomi precisando tutte e sole le regole che consentono di costruire un polinomio a partire da alcuni oggetti base (in questo caso numeri e lettere).
Si tratta di una modalità di definizione molto utilizzata in logica, nella quale, come già detto, si precisano tutte e sole le operazioni consentite su alcuni oggetti che danno come risultato ancora oggetti dello stesso tipo.

Fai alcuni esempi di espressioni letterali che sono polinomi e altri esempi di espressioni letterali che non sono polinomi, giustificando le risposte.

Risposta

Scheda 4 (dalle espansioni alla fattorizzazioni e viceversa)

Nelle precedenti attività avete visto quali proprietà regolino le trasformazioni delle espressioni letterali, in particolare le trasformazioni determinate dal comando Expand. Riflettete attentamente, però: le trasformazioni che avete visto e di cui avete dimostrato la correttezza sono uguaglianze fra polinomi. Considerate, per esempio, la seguente:
$(a - 2b)*(a + 3b) = a^2 + ab - 6b^2$
L'uguaglianza non suggerisce, in generale, che si sia passati dal polinomio che sta a sinistra dell'uguale a quello che sta a destra; l'uguaglianza può essere letta da sinistra verso destra, ma anche da destra verso sinistra.
Viene quindi spontaneo chiedersi che cosa accadrebbe se si desse in pasto a TI - InterActive! l'espressione $a^2 + ab - 6b^2$ e si chiedesse di trasformarla in $(a - 2b)(a + 3b)$. Ma quale comando consente tale trasformazione?
Il comando è "Factor" e sta per "fattorizzare", scomporre in fattori, ossia trasformare addizioni in moltiplicazioni.

$\text{factor}\left(a^2 + a\cdot b - 6\cdot b^2\right)$

$$\left(a - 2\cdot b\right)\cdot\left(a + 3\cdot b\right)$$

Come vedete, le cose funzionano, anche se bisogna dire che l'operazione di fattorizzazione è molto più difficile di quella di espansione, come spesso accade con i problemi inversi. Vi sono, però, alcune indicazioni che possono aiutare a scomporre in fattori i polinomi fattorizzabili. In questa scheda vi verranno proposte alcune di queste indicazioni.

Rispondete alle seguenti domande:

1. **È vero che la differenza di due quadrati è uguale al prodotto fra la somma e la differenza delle loro basi? Giustificate la risposta.**

Risposta

2. **È vero che il quadrato della somma di due termini *x* e *y* è uguale a una somma di tre termini, due dei quali sono i quadrati di *x* e *y* e l'altro è il loro doppio prodotto? Giustificate la risposta.**

Risposta

3. **Come potete espandere il cubo di una somma?**

Risposta

4. **Come potete espandere il prodotto della differenza di due termini *x* e *y* per un trinomio che ha come termini i quadrati di *x* e di *y* e il prodotto di *x* con *y*? Giustficate la risposta**

Risposta

5. **Come potete espandere il prodotto della somma di due termini *x* e *y* per un trinomio che ha come termini i quadrati di *x* e di *y* e l'opposto del prodotto di *x* con *y*? Giustificate la risposta**

Risposta

6. **(Individuale) Prova a espandere le seguenti espressioni (e poi verifica la correttezza con il manipolatore simbolico di TI - InterActive!):**
   a) $(A + B)^2$
   b) $(A - B)^2$
   c) $(^- B - A)^2$
   d) $(A - B)(A + B)$
   e) $(^- A + B)(^- A - B)$
   f) $(^- A+B)(A+B)$
   g) $(A + B)^3$
   h) $(A - B)^3$
   i) $(B - A)^3$

j) $(^{-}B - A)^3$
k) $(A - B)(A^2 + AB + B^2)$
l) $(B - A)(A^2 + AB + B^2)$
m) $(A + B)(A^2 - AB + B^2)$

è, a tuo avviso, necessario ricalcolarsi le espressioni b), c), d), e) f), h), i), j), l) dopo aver calcolato a), g), k)? Giustifica la risposta.

Quanto vale $(^{-}A - B)(A^2 - AB + B^2)$? (Attento, non dovrebbe essere necessario effettuare tutto il calcolo….!)

Risposte

7. **Preparate un documento che spieghi a uno studente di terza media, che sa moltiplicare fra loro due polinomi, e che conosce i significati di moltiplicazione, addizione, sottrazione e divisione, che cosa vuol dire scomporre in fattori.**

Risposta

8. Provate a scomporre in fattori i seguenti polinomi. Verificate la correttezza delle vostre risposte prima eseguendo l'espansione della scomposizione così effettuata. Se incontrate grosse difficoltà, fate eseguire le scomposizioni a TI - InterActive!, ma poi cercate di capire, dalla risposta, come avreste potuto effettuare la scomposizione senza l'aiuto di Ti - InterActive!

$x^3 + x^2 - x$
$a^2 - 4a + 4$
$a^3 - 8$
$x^6 + 8$
$16x^4 - 4$
$(x - 1)^2 - y^2$
$x^3 - 2x^2 + x$
$a^3 - 8 + 12a - 6a^2$
$x^3 + 5x^2 + 6x$
$144 - x^2$
$16 - x^4$

$8x - x^4$

Risposte

Quali difficoltà ho incontrato?

9.

Considerate le espressioni

$x^2 + 5x + 6$; $x^2 + 2x + 1$; $x^2 + x - 2$; $x^2 + 7x + 12$; $2x^2 - 5x - 3$

$4x^2 - 4x - 8$; $x^3 + 2x^2 - x - 2$; $2x^3 + 5x^2 - 23x + 10$

Senza utilizzare il comando Factor, ma aiutandovi con il menu grafico, dividete successivamente i polinomi dati per binomi di primo grado fino a ottenere una funzione costante. Provate, per ogni polinomio, a moltiplicare questa costante per ciascuno dei binomi per cui avete successivamente diviso il polinomio. Che cosa ottenete? Vi stupisce o è naturale che sia così? Giustificate la risposta.

Risposta

10. **Dall'attività precedente potete congetturare qualche proprietà generale? In caso affermativo, verificate questa congettura aiutandovi con il manipolatore simbolico di TI - InterActive! e poi discutetela con l'insegnante.**

Risposta

Segue ora un'attività di sistemazione, formalizzazione e consolidamento delle conoscenze e tecniche apprese che, comunque, devi compiere per la maggior parte del tempo individualmente, consultandoti con tuoi compagni o tue compagne solo dopo aver riflettuto bene sui chiarimenti di cui pensi di aver bisogno. Lo stesso vale per le richieste di precisazione e spiegazione che vuoi porre all'insegnante: cerca di chiarire bene che cosa e perché vuoi chiedere. Naturalmente devi chiedere aiuto se qualche passo del riassunto e della sistemazione non ti fosse chiaro o non riuscissi a svolgere qualche esercizio di consolidamento.
Ti consigliamo di rispondere prima al test di autovalutazione per vedere se hai acquisito le conoscenze e le tecniche fondamentali, quelle necessarie per proseguire nelle lezioni. In seguito passerai alla sistemazione e agli esercizi di consolidamento. Ricorda inoltre che le schede e le attività che hai svolto sono sempre un punto di riferimento importante per il tuo studio, per l'attività di sistemazione, per quella di ripasso e consolidamento e anche per quella di recupero (nel caso tu sia piuttosto disorientata o disorientato, ti consigliamo di riprendere con attenzione tutte le attività già svolte)

Test di autovalutazione

Riassumendo e sistematizzando

Esercizi di consolidamento

Esempi di verifiche