Coefficienti binomiali

1. Sottoinsiemi di un insieme

Problema. In quanti modi si possono scegliere 3 oggetti in un insieme di 5 oggetti differenti? In altri termini, quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 5 elementi?

La nostra risposta

Nel problema proposto non ha impostanza l'ordine degli elementi scelti: due sottoinsiemi differiscono solo per gli elementi che contengono. Supponiamo che l'insieme in questione sia M={a,b,c,d,e}. I sottoinsiemi da 3 elementi sono 10:

```
{a,b,c} {a,b,d} {a,b,e} {a,c,d} {a,c,e} {a,d,e}
{b,c,d} {b,c,e} {b,d,e}
{c,d,e}
```

Questo elenco fornisce, implicitamente, una strategia generale per il conteggio:
*** prima tutti i sottoinsiemi che contengono a;**
*** poi quelli che non contengono a e contengono b;**
*** poi quelli che non contengono né a né b e contengono c;**
*** e così via.**

Il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi (dove k può assumere i valori 0, 1, 2, ..., n) si chiama "coefficiente binomiale n su k" e solitamente si indica con il simbolo

$$\binom{n}{k}$$

Il risultato del problema precedente si scrive dunque nel seguente modo:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Per semplificare utilizzeremo la scrittura in linea

cb(n,k)

("cb" sta per coefficiente binomiale) e dunque scriveremo

cb(5,3) = 10.

Il coefficiente binomiale fornisce dunque la risposta a problemi in cui non ha importanza l'ordine delle configurazioni, ma solo gli elementi da cui sono composte. Per esempio: in quanti modi diversi si possono eleggere 5 rappresentanti in una classe di 30 studenti? La risposta è: tanti quanti sono i sottoinsiemi di 5 elementi in un insieme di 30 elementi:

cb(30,5).

Oppure: quante strette di mano occorrono tra 20 persone? La risposte è: tante quanti sono i modi di estrarre 2 persone, quindi tante quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 20 elementi:

cb(20,2).

Già: ma come si calcola cb(30,5)? Come si calcola cb(20,2)? La soluzione di questo problema avverrà per gradi, e mostreremo diversi modi di interpretare il coefficiente binomiale cb(n,k) e diversi problemi che con esso si possono risolvere.

2. Prime proprietà dei coefficienti binomiali

Le prime proprietà dei coefficienti binomiali si possono scoprire semplicemente facendo ricorso alla definizione: cb(n,k), con 0 <= k <= n, è il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi. Provate a rispondere alle seguenti domande.

a) Quanto vale, qualunque sia n, cb(n,0)?
b) Quanto vale, qualunque sia n, cb(n,n)?
c) Quanto vale, qualunque sia n, cb(n,1)?
d) Quanto vale, qualunque sia n, cb(n,n-1)? (Suggerimento: un sottoinsieme di n-1 elementi è determinato dall'unico elemento che non gli appartiene)

La nostra risposta

a)

b)

c)

d)

Confrontate ora le vostre risposte con le seguenti:
a) cb(n,0) = 1: l'unico sottoinsieme che ha 0 elementi è l'insieme vuoto.
b) cb(n,n) = 1: l'unico sottoinsieme che ha n elementi è l'insieme stesso.

c) cb(n,1) = n: se A è un insieme di n elementi, l'unico sottoinsieme di A che ha n elementi è A stesso.
d) cb(n,n-1) = n: ogni volta che si fissa un sottoinsieme di 1 elemento automaticamente si determina il sottoinsieme complementare, quello formato dagli altri n-1 elementi, e viceversa. C'è un'evidente corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di 1 elemento e i sottoinsiemi di n-1 elementi.
Per esempio

cb(5,1) = cb(5,4) = 5.

Anzi, la proprietà è più vasta: esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di k elementi e i sottoinsiemi di n-k elementi. Per esempio, se nell'insieme A={a,b,c,d,e} fissiamo un sottoinsieme di 3 elementi, per esempio {b,d,e}, abbiamo automaticamente fissato l'insieme complementare {a,c}. Quindi, per ogni n e per ogni k tra 0 e n (compresi) risulta

cb(n,k) = cb(n-k).

Per esempio

cb(5,3) = cb(5,2) = 10.

Problema. Quanto vale la somma dei coefficienti binomiali

cb(5,0)+cb(5,1)+cb(5,2)+cb(5,3)+cb(5,4)+cb(5,5)?

Possiamo scrivere la somma di questi 6 addendi con una notazione più compatta, facendo uso del simbolo di "sommatoria" Σ:

$$\sum_{k=0}^{5} \left(\mathrm{cb}(5, k)\right)$$

$$\mathrm{cb}(5, 5) + \mathrm{cb}(5, 4) + \mathrm{cb}(5, 3) + \mathrm{cb}(5, 2) + \mathrm{cb}(5, 1) + \mathrm{cb}(5, 0)$$

La nostra risposta

Si tratta di un problema che abbiamo già risolto (vedi il file combinatoria). Infatti non occorre conoscere il valore dei singoli addendi: è sufficiente osservare che quella somma è il numero di tutti i sottoinsiemi. Abbiamo già visto che in un insieme di n elementi ci sono 2^n sottoinsiemi (compresi l'insieme vuoto e l'insieme stesso). Quindi

cb(5,0)+cb(5,1)+cb(5,2)+cb(5,3)+cb(5,4)+cb(5,5) = 2^5 = 32.

Possiamo comunque verificare il risultato calcolando ogni addendo: un insieme di 5 elementi possiede:
- 1 sottoinsieme di 0 elemento: $\varnothing$ **(l'insieme vuoto);**
- 5 sottoinsiemi di 1 elemento: {a}, {b}, {c}, {d}, {e}
- 10 sottoinsiemi di 2 elementi: {a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {b,c}, {b,d}, {b,e}, {c,d}, {c,e}, {d,e};
- 10 sottoinsiemi di 3 elementi (sono i complementari dei sottoinsiemi da 2 elementi): {c,d,e}, {b,d,e}, {b,c,e}, {b,c,d}, {a,d,e}, {a,c,e}, {a,c,d}, {a,b,e}, {a,b,d}, {a,b,c};
- 5 sottoinsiemi di 4 elementi (sono i complementari dei sottoinsiemi da 1 elemento): {b,c,d,e}, {a,c,d,e}, {a,b,d,e}, {a,b,c,d};
- 1 sottoinsieme di 5 elementi: {a,b,c,d,e}.

Come si può enunciare in generale la proprietà che abbiamo appena visto per n=5?

La nostra risposta

La proprietà generale è la seguente:
e) Qualunque sia n, risulta

cb(n,0)+cb(n,1)+cb(n,2)+ ... +cb(n,n) = 2^n

Usando il simbolo di sommatoria:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{cb}(n, k)\right) = 2^n$$

2. Disposizioni

Iniziamo da un problema che sappiamo già risolvere.

Problema. In quanti modi differenti si possono ordinare 3 elementi scelti tra 5 elementi differenti?

La nostra risposta

Sappiamo che:

- il primo elemento si può scegliere in 5 modi differenti;
- il secondo elemento si può scegliere in 4 modi differenti;
- il terzo elemento si può scegliere in 3 modi differenti.

Dalla legge del prodotto sappiamo che ci sono dunque 5*4*3=60 allineamenti.

Ora cerchiamo di generalizzare questo primo risultato:
- il primo elemento si può scegliere in n modi differenti;
- il secondo elemento si può scegliere in n-1 modi differenti;
- il terzo elemento si può scegliere in n-2 modi differenti;
- ...
- il k-esimo elemento si può scegliere in quanti modi differenti?

La nostra risposta

Il k-esimo elemento si può scegliere in n-k+1 modi. Dunque k elementi scelti tra n si possono ordinare in

n*(n-1)*(n-2)* ... *(n-k+1)

modi diversi.
In linguaggio tecnico si dice che le "disposizioni di n elementi di classe k" sono n*(n-1)*(n-2)* ... *(n-k+1).
La parola "disposizione" ricorda che ci interessa l'ordinamento delle configurazioni.
Ovviamente le disposizioni di n elementi di classe n sono le permutazioni di n oggetti e il loro numero è n!.

Problema. In un concorso a cattedre concorrono 50 insegnanti per sole 5 cattedre. In quanti modi diversi può essere composta la graduatoria dei primi 5 insegnanti?

La nostra risposta

La risposta è: il numero di disposizioni di 50 elementi di classe 5: 50*49*48*47*46.

$50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46$

254251200

Accidenti! Più di 254 milioni di possibili graduatorie! Osservate che nel problema così formulato ha importanza l'ordine dei 5 elementi; infatti il primo sceglie per primo (e sceglierà la cattedra più prestigiosa), poi sceglie il secondo, e così via. L'ultimo non può che "scegliere" l'ultima cattedra rimasta.

Se si possiede uno strumento che calcola il fattoriale, allora si può osservare che 50*49*48*47*46 è il rapporto tra il numero:
50! = 50*49* ... *2*1
e il numero
45! = 45*44* ... *2*1

50*49*48*47*46 = 50!/45!

$\frac{50!}{45!}$

254251200

La calcolatrice di Ti-Interactive! possiede una funzione per il calcolo del numero di disposizioni di n elementi di classe k, npr(n,k):

$\mathrm{npr}(50, 5)$

254251200

Ancora un'osservazione sul numero 0!, che avevamo definito uguale a 1. In generale il numero di disposizioni di n elementi di classe k è

n!/(n-k)!

E' ovvio che il numero di disposizioni di n elementi di classe n coincide con il numero di permutazioni di n elementi, e vale perciò n!. Dunque, se poniamo k=n otteniamo

n!/0! = n!

e di conseguenza 0! = 1, come già sapevamo.

3. Combinazioni

Abbiamo calcolato il numero di allineamenti di 3 elementi scelti tra 5 elementi differenti, cioè il numero di disposizioni di 5 elementi di classe 3: tale numero è 60. Utilizziamo la funzione npr.

$\mathrm{npr}(5, 3)$

$$60$$

Torniamo ora al problema posto nel paragrafo 1, quello di capire quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi in un insieme di 5 elementi: in questo caso non interessa l'ordine degli elementi; per esempio gli insiemi {a,b,c} e {b,c,a} sono lo stesso insieme.
Supponiamo che l'insieme di 5 elementi sia come al solito M={a,b,c,d,e} e consideriamo il sottoinsieme S={a,b,c}. Tra i 60 allineamenti questo sottoinsieme compare più volte:
a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a
Compare 6 volte: tante quante sono le permutazioni di 3 elementi, cioè 3!=6. Dunque nei 60 allineamenti ogni sottoinsieme è contato 6 volte. Se dividiamo 60 per 6 otteniamo il numero di sottoinsiemi di 3 elementi in un insieme di 5 elementi, cioè cb(5,3). Infatti 60/10 = 6.

Problema. Calcolare cb(9,4).

La nostra risposta

Per calcolare cb(9,4) occorre calcolare il numero di disposizioni di 9 elementi di classe 4 e poi dividere per 4!; questo corrisponde, in base al percorso finora seguito, a calcolare dapprima il numero di ordinamenti di 4 elementi scelti tra 9: 9*8*7*6 = 9!/5!

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ $\qquad$ $\frac{9!}{5!}$

3024 $\qquad$ 3024

e poi dividere per il numero di permutazioni di 4 elementi:

cb(9,4) = $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}$ **=** $\frac{9!}{5! \cdot 4!}$ $= 126$

Ciò che si ottiene si chiama numero di "combinazioni di n elementi di classe k". Il termine "combinazione" vuole ricordare che non ci interessa l'ordine degli elementi e si contrappone al termine "disposizione", in cui invece si tiene conto dell'ordine degli elementi.
Ti-Interactive possiede una funzione che calcola direttamente il numero di combinazioni di elementi di classe k, cioè il coefficiente binomiale cb(n,k): la funzione è ncr(n,k).

$\mathrm{ncr}(9, 4)$

126

D'ora in avanti utilizzeremo indifferentemente la notazione cb(n,k) oppure ncr(n,k).

Torniamo al problema del concorso a cattedre e supponiamo di essere interessati soltanto all'insieme dei 5 vincitori, indipendentemente dal loro ordine. Ci interessa quindi sapere chi vincerà il concorso e non in quale ordine. Si tratta di calcolare il numero di sottoinsiemi di 5 elementi scelti in un insieme di 50 elementi, quindi cb(50,5).

$\frac{50!}{5! \cdot 45!}$

2118760

Problema. Esprimere, in funzione dei fattoriali, il numero cb(n,k).

La nostra risposta

Sulla base di quanto detto finora risulta

$$\text{cb(n,k)} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \; .$$

Riassumendo:

1) Il numero di <u>disposizioni</u> (cioè di allineamenti, conta l'ordine) di n elementi di classe k è

$$\mathrm{npr}(n, k)$$

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Il numero di <u>combinazioni</u> (cioè di sottoinsiemi, non conta l'ordine) di n elementi di classe k è

$$\mathrm{ncr}(n, k)$$

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Problema. Quante sono le strette di mano tra 20 persone?

La nostra risposta

La risposta è: tante quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi scelti in un insieme di 20 elementi, cioè cb(20,2), oppure, come usa la calcolatrice, ncr(20,2).

$\mathrm{ncr}(20, 2)$

190 **.**

4. La sequenza dei coefficienti binomiali

Per ogni numero naturale n possiamo calcolare n+1 coefficienti binomiali, per k da 0 a n: per esempio, con n=5:

n	cb
0.	1.
1.	5.
2.	10.
3.	10.
4.	5.
5.	1.

Per costruire la tabella precedente abbiamo usato l'ambiente "List" di Ti-Interactive. Nella prima colonna abbiamo scritto la formula

$\text{seq}(t, t, 0, 5)$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

e nella seconda colonna la formula

$\text{seq}(\text{ncr}(5, n), n, 0, 5)$

$\{1, 5, 10, 10, 5, 1\}$

Con n=8:

n	L2
0.	1.
1.	8.
2.	28.
3.	56.
4.	70.
5.	56.
6.	28.
7.	8.
8.	1.

Se elenchiamo, a partire da n=0, gli n+1 coefficienti binomiali relativi ad n otteniamo un curioso triangolo, chiamato <u>Triangolo di Tartaglia-Pascal</u>, che la figura seguente mostra fino a n=10.

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Si osserverà che ogni riga inizia con 1=ncr(n,0) e termina con 1=ncr(n,n); inoltre

la sequenza dei coefficienti binomiali è simmetrica rispetto ai valori centrali: si tratta della proprietà che ben conosciamo

$$\mathrm{ncr}(n, k) = \mathrm{ncr}(n, n - k)$$

Si osserva anche una proprietà curiosa: ogni coefficiente binomiale diverso da 1 è uguale alla somma dei due coefficienti binomiali che gli stanno immediatamente sopra e a sinistra. Precisamente

$$\mathrm{ncr}(n, k) = \mathrm{ncr}(n - 1, k - 1) + \mathrm{ncr}(n - 1, k)$$

Cerchiamo di capire il perché, utilizzando un esempio:

$\mathrm{ncr}(5, 2) = \mathrm{ncr}(4, 1) + \mathrm{ncr}(4, 2)$

true

Infatti sia M={a,b,c,d,e}. ncr(5,2)=10 è numero di sottoinsiemi di 2 elementi in M. Questi sottoinsiemi li possiamo dividere in due gruppi: quelli che non contengono "a" e quelli che contengono "a".
Quelli che non contengono "a" sono i sottoinsiemi di 2 elementi nell'insieme di 4 elementi N={b,c,d,e}, quindi il loro numero è ncr(4,2)=6.
{b,c} {b,d} {b,e} {c,d} {c,e} {d,e}
Quelli che contengono "a" sono i sottoinsiemi di 1 elemento nell'insieme di 4 elementi N={b,c,d,e}, cioè {b}, {c}, {d}, {e} (quindi il loro numero è ncr(4,1)=4) a ciascuno dei quali si aggiunge "a":
{a,b} {a,c} {a,d} {a,e}.

Questa proprietà ci consente di dare una definizione ricorsiva del coefficiente binomiale cb(n,k): se k=0 oppure k=n allora cb(n,k)=1, altrimenti cb(n,k)=cb(n-1,k-1)+cb(n-1,k).
Con Ti-Interactive! possiamo definire tale funzione utilizzando il comando "when".

$$\begin{cases} 1 & k = 0 \text{ or } k = n \\ \mathrm{cb}(n - 1, k - 1) + \mathrm{cb}(n - 1, k) & \text{else} \end{cases} \rightarrow \mathrm{cb}(n, k)$$

"Done"

$\mathrm{cb}(10, 5)$

252

Dal punto di vista matematico la ricorsione è sempre magica. Essa consente di calcolare il coefficiente binomiale dandone una definizione soltanto "locale": conosciamo un valore di base e come sappiamo passare da n-1 a n, null'altro. Ma da una conoscenza locale, "in piccolo" possiamo risalire alla conoscenza

globale, per qualsiasi n e per qualsiasi k.
Dal punto di vista informatico, invece, la definizione ricorsiva è enormemente dispendiosa; già il calcolo di cb(30,15) esige, su un calcolatore potente, parecchi minuti e un'enorme occupazione di memoria.

5. Coefficienti binomiali e polinomi

Perché i coefficienti binomiali si chiamano così?
Consideriamo il binomio (a+b) e una sua potenza qualsiasi, per esempio (a+b)^5.

$\text{expand}\left((a+b)^5\right)$

$$a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

Se espandiamo la potenza quinta (n=5) del binomio e ordiniamo i 6 addendi (n+1=6) ci accorgiamo che la sequenza dei coefficienti è uguale alla sequenza dei coefficienti binomiali di n=5.

$\text{seq}(\text{ncr}(5,k),k,0,5)$

$$\{1, 5, 10, 10, 5, 1\}$$

Problema. Scrivere l'espansione di (a+b)^6, utilizzando la sequenza dei coefficienti binomiali di n=6.

La nostra risposta

Problema. Qual è, nell'espansione di (a+b)^10, il coefficiente di a^4b^6?

La nostra risposta

Certo, per rispondere al problema precedente si può espandere (a+b)^10.

$\text{expand}\left((a+b)^{10}\right)$

$$a^{10} + 10 \cdot a^9 \cdot b + 45 \cdot a^8 \cdot b^2 + 120 \cdot a^7 \cdot b^3 + 210 \cdot a^6 \cdot b^4 + 252 \cdot a^5 \cdot b^5 + 210 \cdot a^4 \cdot b^6 + 120 \cdot a^3 \cdot b^7 + 45 \cdot a^2 \cdot b^8 + 10 \cdot a \cdot b^9 + b^{10}$$

Si cerca l'addendo con parte letterale a^4b^6 e si vede che il coefficiente è 210. Ma, più semplicemente, basta calcolare cb(10,4).

$\text{ncr}(10, 4)$

$$210$$

Il coefficiente di a^4b^6 nello sviluppo di (a+b)^10 è ncr(10,4).
La proprietà si può generalizzare? Perché?
Lavoriamo su un esempio: cb(5,2)=10 è, nello sviluppo di (a+b)^5, il coefficiente di a^2b^3. Quando sviluppiamo (a+b)^5 dobbiamo svolgere il prodotto (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)
Il prodotto dei primi due fattori porta a 4 addendi (conserviamo per ora l'ordinamento e non addizioniamo gli addendi simili):
aa, ab, ba, bb.
Il prodotto dei primi 3 fattori porta a 8 addendi:
(aa+ab+ba+bb)(a+b) = aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb
e così via: ogni volta il numero di addendi si raddoppia. Con 5 fattori avremo 32=2^5 addendi.
aaaaa+aaaab+ ... +bbbbb
Di questi 32 addendi, ciascuno è il prodotto di 5 fattori, e in ciascuno di essi compaiono un certo numero di "a", diciamo k, e un numero di "b" uguale a 5-k. Per conoscere il coefficiente di a^2b^3 occorre sapere quanti di questi 32 addendi sono composti da 2 "a" e da 3 "b": per esempio ababb, bbaba, e così via. Il numero di questi addendi è il coefficiente di a^2b^3. Questo è un problema che abbiamo già risolto, perché si tratta di contare tutti gli anagrammi della parola aabbb (vedi combinatoria): il loro numero è

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!}$$

$$10$$

cioè proprio il coefficiente binomiale cb(5,2).
Un altro modo di rendersi conto di questa proprietà consiste nel riconoscere che gli anagrammi della parola aabbb sono tanti quanti i sottoinsiemi di 2 elementi nell'insieme di 5 elementi {1,2,3,4,5}. Infatti un anagramma di aabbb è univocamente determinato dalla posizione che occupano le 2 "a": per esempio il sottoinsieme {1,2} identifica aabbb, {2,5} identifica babba, {3,4} identifica bbaab, e così via. Il numero di anagrammi della parola aabbb è dunque uguale al numero di sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 5 elementi, e dunque è uguale a cb(5,2).
Ora generalizziamo.

Problema. Enunciare la proprietà che abbiamo esposto in forma generale.

La nostra risposta

Dovreste aver riconosciuto che la proprietà generale è la seguente.

Il coefficiente di $a^k \cdot b^{(n-k)}$ **, oppure di** $a^{(n-k)} \cdot b^k$ **, nello sviluppo di** $(a+b)^n$ **è cb(n,k).**

Ecco spiegato il nome "coefficiente binomiale".
Lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio può dunque essere espressa, in forma sintetica, utilizzando il simbolo di sommatoria e i coefficienti binomiali:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\text{ncr}(n,k) \cdot a^{(n-k)} \cdot b^k\right)$$

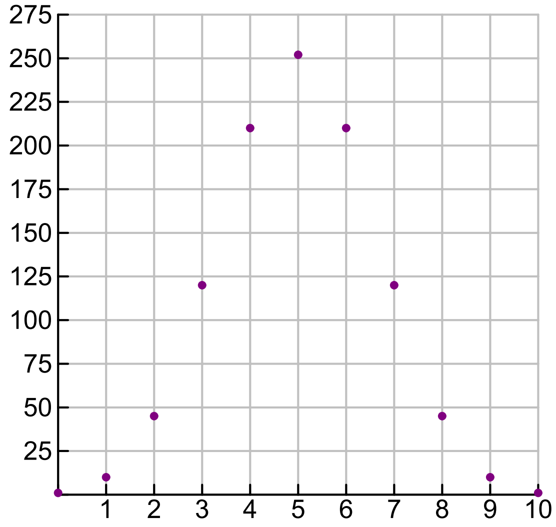
Per esempio:

$$\sum_{k=0}^{5} \left(\text{ncr}(5,k) \cdot a^{(5-k)} \cdot b^k\right)$$

$$a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

Con Ti-Interactive!, nell'ambiente List, è possibile tracciare il grafico per punti della sequenza dei coefficienti binomiali di un dato numero naturale n.
Ecco le sequenze e i relativi grafici per n=10 e n=20.

L1	L2
0.	1.
1.	10.
2.	45.
3.	120.
4.	210.
5.	252.
6.	210.
7.	120.
8.	45.
9.	10.
10.	1.



L1	L2
0.	1.
1.	20.
2.	190.
3.	1140.
4.	4845.
5.	15504.
6.	38760.
7.	77520.
8.	125970.
9.	167960.
10.	184756.
11.	167960.
12.	125970.
13.	77520.
14.	38760.
15.	15504.
16.	4845.
17.	1140.
18.	190.
19.	20.
20.	1.