Avvio al pensiero combinatorio

1. Presentazione

Quanti sono gli anagrammi della parola "calcolatrice"? In quanti modi si possono allineare 10 persone? Quante strette di mano occorrono fra 20 persone? Quanti sottoinsiemi da 3 elementi si possono estrarre da un insieme di 5 elementi? In quanti modi diversi si possono mettere 2 oggetti in 3 scatole? In quanti modi diversi si può ottenere 9 lanciando tre dadi?

Sono tutti problemi di "conteggio": si tratta di contare un certo numero di configurazioni. La formulazione di questi problemi è semplice e, in linea di principio, anche la loro soluzione è semplice: sarebbe sufficiente scrivere tutte le configurazioni e poi contarle. Ma elencare tutte le configurazioni esige una strategia non sempre evidente; inoltre l'enumerazione di tutti i casi può esigere tempi enormi; per esempio 10 persone si possono allineare in 3.628.800 modi differenti: se impiegassimo 1 secondo (uno soltanto!) a scrivere un allineamento, per elencarli tutti impiegheremmo, senza fermarci un istante, 42 giorni.

Dobbiamo perciò trovare una "strada maestra" per affrontare questi problemi. Non abbiamo certo la pretesa di risolvere qualunque problema di conteggio: ve ne sono di davvero difficili; ne vedremo alcuni classici.

La parte della matematica che si occupa di problemi di conteggio si chiama "combinatoria". Molti dei risultati che si ottengono in questo campo sono utili in altri campi della matematica, in particolare nell'approccio al calcolo delle probabilità.

2. Anagrammi e permutazioni

Problema. Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, della parola COSA? Provate a scriverli tutti.

La nostra risposta

Il termine "anagramma" sottintende il significato del termine matematico "ordinamento": chiedere quanti sono gli anagrammi di una parola di *n* lettere differenti significa in definitiva chiedere in quanti modi differenti si possono ordinare *n* oggetti differenti.

Dovreste aver elencato 24 anagrammi.

COSA	**COAS**	**CAOS**	**CASO**	**CSOA**	**CSAO**
OCSA	**OCAS**	**OSCA**	**OSAC**	**OACS**	**OASC**
SCOA	**SCAO**	**SOCA**	**SOAC**	**SACO**	**SAOC**
ACOS	**ACSO**	**AOCS**	**AOSC**	**ASCO**	**ASOC**

Vi sarete resi conto del fatto che per riuscire a tener conto di tutti gli allineamenti occorre una strategia di conteggio; per esempio, scrivere tutti gli anagrammi che iniziano con C (sono 6) e concludere che saranno 6 anche quelli che iniziano con O, oppure S, oppure A, in tutto 6*4=24. Si intravede qualche possibile generalizzazione? Supponiamo di non aver trovato il risultato (24) e riprendiamo il problema da capo.
Dobbiamo collocare 4 oggetti (le lettere C, O, S, A) in 4 posti, per esempio

S	A	O	C	

La prima lettera si può scegliere in 4 modi differenti.

1	C				
2	O				
3	S				
4	A				

<u>Per ciascuna scelta della prima lettera</u> possiamo scegliere la seconda in 3 modi diversi, quindi le prime due lettere si possono fissare in 4*3=12 modi differenti.

1	C	O			
2	C	S			
3	C	A			
4	O	C			
5	O	S			
6	O	A			
7	S	C			
8	S	O			
9	S	A			
10	A	C			
11	A	O			
12	A	S			

Attenzione: questo è il passaggio chiave in un gran numero di problemi di conteggio; se abbiamo *a* configurazioni e per ciascuna di esse altre *b* configurazioni, allora abbiamo in totale un numero di configurazioni pari al PRODOTTO di *a* per *b*. Questa proprietà va sotto il nome di legge del prodotto.

Ora dobbiamo scegliere la terza lettera; poiché ne sono rimaste due, possiamo sceglierla in 2 modi differenti. La scelta delle prime tre lettere si può fare dunque in 4*3*2=24 modi differenti. Eccoli elencati.

1	C	O	S	
2	C	O	A	
3	C	S	O	
4	C	S	A	
5	C	A	S	
6	C	A	O	
7	O	C	S	
8	O	C	A	
9	O	S	C	
10	O	S	A	
11	O	A	C	
12	O	A	S	
13	S	C	A	
14	S	C	O	
15	S	O	C	
16	S	O	A	
17	S	A	C	
18	S	A	O	
19	A	C	S	
20	A	C	O	
21	A	O	C	
22	A	O	S	
23	A	S	C	
24	A	S	O	

Infine per l'ultima lettera si ha una sola scelta possibile e il quadro è completato: 4 lettere differenti si possono allineare in 4*3*2*1=24 modi. Il termine tecnico per "allineamenti" è "permutazioni": 4 oggetti differenti posseggono 24 permutazioni.

La figura a cui rimanda il link seguente
grafo1
rappresenta la soluzione del problema mediante un "grafo ad albero", che illustra in modo sintetico la legge del prodotto: abbiamo 4 scelte iniziali, per ciascuna di esse tre scelte, per ciascuna di queste due scelte, e una sola scelta per l'ultima lettera. La figura dovrebbe essere una "illustrazione" del prodotto 4*3*2*1.

Problema. Quanti sono gli anagrammi della parola COSTA? In altri termini, quante sono le permutazioni di 5 oggetti differenti?

La nostra risposta

Sappiamo che la parola COSA possiede 24 permutazioni. Quando aggiungiamo la quinta lettera, T, in quanti posti diversi possiamo collocarla? Per ciascun anagramma di COSA, per esempio CAOS, abbiamo 5 anagrammi di COSTA, a seconda che T sia messo in prima, in seconda, ..., in quinta posizione:
TCAOS
CTAOS
CATOS
CAOTS
CAOST

Usiamo ancora la legge del PRODOTTO: per ciascun anagramma di una parola di 4 lettere (sono 24=4*3*2*1), abbiamo 5 anagrammi di una parola di 5 lettere. Quindi in totale gli anagrammi di 5 lettere differenti sono
5*4*3*2*1 = 120.

Dunque: 5 oggetti differenti posseggono 120 permutazioni.

Si comincia ad intravedere una generalizzazione? Secondo voi quante sono le permutazioni di 6 oggetti?

La nostra risposta

6 oggetti differenti posseggono 1*2*3*4*5*6 = 720 permutazioni.
L'analisi sin qui svolta sembra suggerire che *n* oggetti differenti posseggano

1*2*3* ... *n

permutazioni. Se questa congettura fosse vera, quante dovrebbero essere le permutazioni di 2 oggetti differenti? E di 3 oggetti differenti? I conti tornano?

La nostra risposta

In effetti possiamo costruire il seguente procedimento ricorsivo: se indichiamo con *perm*(*n*) il numero di permutazioni di *n* oggetti, allora

***perm*(*n*+1) = *perm*(*n*)*(*n*+1)**

Per esempio
***perm*(6) = *perm*(5)*6**
cioè
720 = 120*6

Questa relazione ci permette di definire il numero di permutazioni di *n*+1 oggetti conoscendo il numero di permutazioni di *n* oggetti. Se si aggiunge l'ovvia considerazione

***perm*(1) = 1**

si può calcolare il numero di permutazioni di *n* oggetti, qualunque sia *n*, in modo "ricorsivo":
***perm*(1) = 1**
***perm*(2) = *perm*(1)*2 = 1*2 = 2**
***perm*(3) = *perm*(2)*3 = 2*3 = 6**
***perm*(4) = *perm*(3)*4 = 6*4 = 24**
...

Completate ora la seguente tabella.

n	numero di permutazioni
1	1
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Un modo semplice per completare la tabella consiste nello scrivere, nella cella corrispondente a *n*=2, cioè nella cella B3, la formula
=A3*B2,
che traduce proprio la relazione ricorsiva *perm*(*n*+1)=*perm*(*n*)*(*n*+1), e poi copiare la formula in basso fino a *n*=10, cioè fino alla cella B11.

n	numero di permutazioni
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

Infatti copiando la formula verso il basso i riferimenti di riga si aggiornano ad ogni riga:
=A3*B2 diventa =A4*B3
=A4*B3 diventa =A5*B4
e così via.
Otteniamo finalmente che il numero di permutazioni di 10 oggetti differenti è

1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 = 3.628.800.

In matematica il numero 1*2*3* ... *n si scrive in modo sintetico con il simbolo

***n*!**

e si legge "*n* fattoriale".
Con la calcolatrice di TI InterActive! si ottiene il fattoriale di un numero semplicemente utilizzando, da tastiera, il punto escalmativo.

10! 20!

3628800 2432902008176640000

30!

265252859812191058636308480000000

Come vedete, il fattoriale di un numero *n* cresce molto rapidamente al crescere di *n*. Il numero 100! è un numero di 158 cifre.

100!

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175999932299156089414639761565182862536979208272237582511852109168640000000000000000000000

Osserviamo che è definito anche il numero 0!:

0! = 1

Infatti *n*! è uguale al prodotto di *n* fattori; in assenza di fattori "resta" l'elemento neutro del prodotto, cioè 1.

Per avere una sequenza di fattoriali possiamo usare l'ambiente LIST: in L1 scriviamo
seq(k,k,0,10)
e il L2 scriviamo
L1!
Ecco il risultato

L1	L2
0.	1.
1.	1.
2.	2.
3.	6.
4.	24.
5.	120.
6.	720.
7.	5040.
8.	40320.
9.	362880.
10.	3628800.

Problema. Alle finali olimpiche dei 100 metri gareggiano 8 atleti. In quanti modi differenti può essere composto il podio?

La nostra risposta

Il problema precedente serve a comprendere se avete capito la legge del prodotto. Il podio è composto da tre atleti: in quanti modi si possono ordinare 3 oggetti scelti tra 8? Il primo si può scegliere in 8 modi differenti; per ciascuna di queste scelte il secondo si può scegliere in 7 modi; i primi due si possono scegliere in 8*7=56 modi. Per ciascuno di questi il terzo si può scegliere in 6 modi. Il numero di permutazioni di 3 oggetti scelti tra 8 è

8*7*6 = 336.

Con la calcolatrice di TI InterActive! si ottiene il numero di permutazioni di *k* oggetti scelti tra *n* con il comando npr(*n*,*k*).

$\mathrm{npr}(8,3)$	$\mathrm{npr}(8,4)$	$\mathrm{npr}(8,5)$	$\mathrm{npr}(8,6)$	$\mathrm{npr}(8,7)$
336	1680	6720	20160	40320

Naturalmente il numero di permutazioni di *n* oggetti scelti tra *n* (cioè *k* = *n*) è *n*!.

$\mathrm{nPr}(5,5)$	$\mathrm{nPr}(8,8)$
120	40320

In generale il numero di permutazioni di *k* oggetti scelti tra *n* è
$n * (n-1) * \ldots * (n-k+1)$.

3. Anagrammi e ripetizioni

Problema. Quanti sono gli anagrammi della parola SASSO? Qual è la novità in questo problema?

La nostra risposta

Nella parola SASSO ci sono tre lettere uguali: non possiamo più dire che abbiamo 5 scelte per la prima lettera, 4 per la seconda, e così via. Per la prima lettera abbiamo solo 3 scelte: S, A, O; il numero di scelte della seconda lettera dipende da quale lettera abbiamo scelta per prima: se la prima è S allora abbiamo ancora 3 scelte, altrimenti ne abbiamo 2. La faccenda si complica, dobbiamo ragionare in altro modo.
Supponiamo per ora che le 3 lettere "S" siano differenti, indichiamole con S_1, S_2, S_3. Se le lettere fossero tutte diverse i possibili anagrammi, come sappiamo, sarebbero 5! = 120. Ma poiché le lettere "S" non sono distinguibili, abbiamo contato più volte uno stesso anagramma. Per esempio l'allineamento SASSO verrebbe contato più volte:

$S_1AS_2S_3O$
$S_1AS_3S_2O$
$S_2AS_1S_3O$
$S_2AS_3S_1O$
$S_3AS_1S_2O$
$S_3AS_2S_1O$

Quante volte? 6 volte, tante quante sono le permutazioni delle lettere S_1, S_2, S_3, quindi 3!=6 volte. Il numero di anagrammi della parola SASSO sono allora 20:

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

Osserviamo che 5!/3! = 5*4, è il numero di permutazioni di 2 elementi scelti tra 5: in effetti tutti gli anagrammi della parola SASSO si ottengono collocando la lettera A (5 scelte), poi la lettera O (4 scelte) e riempiendo i tre spazi rimanenti con 3 S.

Problema. Quanti sono gli anagrammi della parola PAPPA? Come si può adattare la soluzione del problema precedente?

La nostra risposta

Ci sono 3 P e 2 A: se le due A fossero diverse si avrebbero (come per il problema precedente) 5!/3! anagrammi. A causa delle 2 A dobbiamo dividere per il numero di permutazioni di 2 lettere, cioè 2!=2. Riassumendo il numero di anagrammi della parola PAPPA è

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$

Ora possiamo avviare una generalizzazione se scriviamo il numero di anagrammi della parola SASSO, che contiene 3 S, 1 A e 1 O, nel seguente modo (equivalente al precedente):

$$\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}$$

$$20$$

PROBLEMA. Quanti sono gli anagrammi della parola RAMARRO? Ci sono 7 lettere: 3 R, 2 A, 1 M, 1 O, dunque

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}$$

$$420$$

oppure, più semplicemente:

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!}$$

$$420$$

Problema. Quanti sono gli anagrammi della parola CALCOLATRICE?

La nostra risposta

4. Oggetti e cassetti

Problema. In quanti modi diversi si possono mettere 2 oggetti distinti in 3 cassetti?

La nostra risposta

La risposta è 9. Supponiamo di chiamare A e B questi due oggetti, e di indicare i tre cassetti con la notazione | | | |. Allora tutte le configurazioni sono le seguenti

```
| A B |   |   |   : A e B nel primo cassetto, vuoti gli altri due
| A   | B |   |   : A nel primo, B nel secondo, vuoto il terzo
| A   |   | B |   : e così via ...
| B   | A |   |
|   | A B |   |
|   | A   | B |
| B   |   | A |
|   | B   | A |
|   |   | A B |
```

La strategia sfrutta ancora la legge del prodotto: per ogni scelta della posizione di A (3 possibili scelte) abbiamo ancora 3 scelte della lettera B. In tutto $3*3=3^2=9$ scelte.

Problema. Supponiamo di avere *k* oggetti e *n* cassetti. Come si generalizza il problema precedente? Provate a scrivere il testo del problema in forma generale e a fornire la corrispondente risposta.

La nostra risposta

Quanti sono tutti i sottoinsiemi (compresi l'insieme vuoto e M stesso) dell'insieme M = {a,b,c,d}? Non è immediato riconoscerlo, ma si tratta di un'applicazione del problema dei cassetti. Infatti ogni sottoinsieme S di M si ottiene decidendo se ciascun elemento appartiene a S oppure no. Allora supponiamo di avere 2 cassetti: APPARTIENE e NON APPARTIENE. In questi due cassetti dobbiamo mettere 4 oggetti: a, b, c, d. Come sappiamo, si può fare in 2^4 modi. Dunque un insieme di 4 elementi possiede 2^4 sottoinsiemi.

Problema. Supponiamo di avere un insieme di *n* elementi. Generalizzare il problema precedente e fornire la corrispondente risposta.