Le funzioni quadratiche

(si prevedono circa 45 - 50 ore di lavoro in classe)
Prerequisiti: funzioni lineari, successioni lineari; concetto di funzione; differenze finite; polinomi e operazioni con essi.

Premessa

Nel primo anno di corso ti abbiamo presentato il concetto di funzione da due punti di vista: come macchina input - output che restituisce, per ogni input, uno e un solo output e come grandezza che varia rispetto a un'altra (in particolare, ma non solo, grandezze che variano nel tempo). Hai poi affrontato lo studio delle funzioni lineari, caratterizzate dall'avere pendenza costante, imparando a operare con esse, a determinarne gli zeri, il segno. Hai anche visto che la composizione di funzioni lineari è una funzione lineare. Hai studiato i modelli dinamici discreti lineari e, in particolare, le successioni per cui la differenza tra due termini successivi è costante e le successioni per cui il rapporto tra due termini successivi è costante. Hai visto che le prime danno luogo a una dipendenza di a(n) da n di tipo lineare, mentre le seconde di tipo esponenziale. Hai quindi applicato le conoscenze sulle funzioni lineari e sulle successioni lineari per costruire semplici modelli utili a descrivere situazioni e prevedere l'evoluzione dei fenomeni coinvolti in queste situazioni. Infine hai visto un'importante proprietà delle funzioni che hai incontrato: il loro grafico si rettifica localmente, ossia effettuando successivamente vari zoom intorno a un punto del grafico della funzione, questo assomiglia sempre più a una retta. Ciò equivale a dire che esiste una funzione lineare che meglio approssima una funzione nell'intorno di un suo punto ed è quella che ha come grafico la retta tangente alla funzione in quel punto. Approssimare una funzione con una funzione lineare può essere utile, infatti i calcoli con le funzioni lineari sono più semplici: deve essere chiaro, però, che, usando approssimazioni lineari, non si perdono infomazioni sulla crescenza della funzione, ma si perdono informazioni sul come cresce, ossia sulla concavità.
Iniziamo questo secondo anno di attività con lo studio delle funzioni quadratiche, le più semplici, dopo quelle lineari. Alla fine del corso vedremo che la conoscenza della funzione quadratica che meglio approssima il grafico di una funzione vicino a un suo punto consente di mantenere informazioni non solo sulla crescenza di una funzione, ma anche sul come cresce. Poiché si è detto che descrivere se una funzione cresce o descresce e come cresce o decresce consente di definire le proprietà più significative di una funzione, possiamo concludere che le funzioni quadratiche sono un ottimo strumento per descrivere, localmente funzioni.

Nome e cognome dei componenti del gruppo che svolge le attività di gruppo di questa lezione

Nome e cognome dei componenti della coppia che svolge le attività di coppia di questa lezione

Nome e cognome della studentessa o dello studente che svolge le attività individuali di questa lezione

Scheda 0: le funzioni quadratiche con graphic calculus

(Attività in laboratorio di informatica a coppie. Tempo previsto: almeno 4 ore di lavoro in classe e il resto di completamento e sistemazione a casa)

1. Entrate nell'ambiente "Parabola" di Graphic Calculus ("Parabola" è il nome del grafico di una funzione quadratica). Selezionate l'opzione "Graph" nel menu a destra e fate in modo che siano attivati tutti i menu "Formula" e "Zero".
Con il mouse è possibile trascinare, uno alla volta, i due punti rosso e verde per cui passa la parabola. Il punto rosso si chiama vertice della parabola. Notate che il grafico presenta un asse di simmetria (ciò vuol dire che, se piegaste il foglio lungo l'asse di simmetria, le due parti di grafico, che stanno da parti opposte rispetto all'asse, verrebbero a coincidere). Il vertice è il punto di intersezione fra l'asse di simmetria e la parabola.
Lo scopo di questa attività è quello di dare, in modo analogo a quanto avete fatto nell'esploraizone del modulo "Line" per le funzioni lineari, un'interpretazione di ciascuno degli oggetti che state tenendo sott'occhio: grafico, formula, zero.
Vi suggeriamo di fare le seguenti esplorazioni mirate partendo dalla funzione quadratica più semplice, ossia f(x)=x^2, che ha vertice nell'origine degli assi, ossia nel punto (0;0) (... prendete sempre nota delle vostre osservazioni: siate come esploratori in un paese sconosciuto ... buon viaggio!):
a) trascinate il punto verde, lasciando il vertice in (0;0); osservate che cosa cambia nel grafico, nella formula e nello zero;
b) provate poi a trascinare il vertice, ossia a traslare la parabola verso l'alto o il basso ... che cosa cambia nella formula? E negli zeri?
c) Ora provate a spostare il grafico di f(x)=x^2 verso destra o sinistra ... che effetto hanno questi spostamenti sulla formula? E sullo zero?

d) Ora effettuate traslazioni composte da spostamenti in verticale in orizzontale. Che effetto hanno questi spostamenti sulla formula? E sugli zeri?

I risultati delle nostre esplorazioni

a)

b)

c)

d)

I risultati del confronto fra le nostre risposte e quelle di un gruppo di alcuni nostri compagni e compagne.

2. Che cosa sono quelle due formule che a volte compaiono nel menu "Formula"? Perché a volte ce ne è una sola e a volte due? Come sono legate fra loro le due formule, quando presenti? Provate a vedere, intanto, se sono tarsformabili l'una nell'altra... si tratta di un semplice esercizio di calcolo letterale!

La nostra risposta

La nostra risposta dopo un confronto con altri gruppi di lavoro

3. Stesse richieste delle due precedenti attività, ma ora attivate AXES, invece di GRAPH. Che cosa cambia? Perché?

La nostra risposta

4. Si può parlare, come per la retta, di pendenza di una parabola? Giustificate la risposta.

La nostra risposta

La nostra risposta dopo il confronto con altri gruppi di lavoro

5. Sia data la funzione quadratica f(x) = x^2 + 1. Costruite con un foglio elettronico (potete utilizzare anche quello di TI-InterActive! o Excel, come preferite) una tabella con quattro colonne e un centinaio di righe.
Nella prima colonna fate variare la variabile *x* con passo costante, per esempio 0.1, a partire dal valore –4.
Nella seconda colonna mettete i corrispondenti valori di f(x).
La terza sia la colonna delle differenze prime, ossia le differenze fra valori consecutivi di f(x) (f(x_2)– f(x_1) nella prima cella della colonna, f(x_3)– f(x_2) nella seconda cella e così via, fino a f(x_{100})– f(x_{99})).
Nella quarta colonna mettete le "differenze seconde" (ossia le differenze delle differenze prime).
Che cosa osservate nella quarta colonna? Vi aspettavate questo risultato? Pensate che qualcosa di simile si ottenga per qualsiasi parabola? Perché? Come potete giustificare le vostre risposte? Per produrre giustificazioni delle vostre risposte potete aiutarvi anche con un software di manipolazione simbolica, per esempio il manipolatore simbolico o "calcolatrice" di TI-InterActive!.

La nostra risposta

Scheda 1: le funzioni quadratiche con Cabri

(Attività in laboratorio di informatica a coppie. Tempo previsto: 2 ore di lavoro in classe)

Cabri géomètre è un software che consente non solo di fare geometria, ma, più in generale, di fare matematica. In particolare consente di rappresentare grafici di funzioni sul piano cartesiano che mette a disposizione e le loro formule. Se disponete di Cabri géomètre vi consigliamo di svolgere tutta l'attività e di non cliccare sull'hotword parabola per vedere l'animazione costruita da noi. Se, invece, non disponete di Cabri géomètre o il vostro insegnante ritiene troppo dispendiosa in termini di tempo l'attivtà con Cabri géomètre, allora potete saltare direttamente all'animazione in cabrijava che si ottiene cliccando sull'hotword parabola . Se disponete di Cabri II plus potete scaricare il file in Cabri II plus che abbiamo costruito, cliccando sull'hotword parabolaplus .

Eventuali problemi nello scaricare o nell'eseguire il file parabolaplus.
Cliccando su parabolaplus possono verificarsi alcuni inconvenienti, anche se hai installato cabri II plus. Il primo è che il file non si apra. In questo caso conviene salvarlo sul PC e aprirlo direttamente da CabriII plus. Se si apre, potrebbe accadere che la parabola non si veda: in questo caso potrebbe essere accaduto che il punto x sia finito sulla griglia e quindi vengono visualizzate solo le coordinate intere del grafico. Per ovviare a questo inconveniente, vai sul quinto bottone del menu a icone e scegli "Ridefinizione di un oggetto", quindi clicca sul punto x, scegliendo "punto su un ogetto" dal menu a tendina che compare, poi spostati in un qualunque punto dell'asse x e quando compare "su questo asse" clicca con il mouse. Il grafico, un po' miracolosamente, ricomparirà.

Cercate di riprodurre in Cabri la costruzione che ora vi indicheremo. Se volete avere un'idea di come funziona la costruzione leggete la parte in verde che segue.

L'idea di questa costruzione è la seguente: una funzione quadratica ha bisogno di tre parametri (a, b, c) per essere definita, essendo del tipo f(x)= a*x^2 + b*x + c. In Cabri è possibile definire i tre parametri costruendo tre rette r,s, t, mettendo su ciascuna di queste rette un punto e chiedendo a Cabri di dare un numero che indichi la coordinata di tale punto sulla retta. Le tre coordinate che si ottengono (che sono tre numeri reali, rappresentano i coefficienti a, b, c della funzione quadratica).
Sull'asse delle ascisse del sistema di riferimento cartesiano si prende un punto x di cui si chiede a Cabri l'ascissa e, con lo strumento calcolatrice, si calcola

a*x^2+b*x+c, ossia f(x). Quindi si porta sull'asse delle y il numero f(x) e si individua il punto (x, f(x)). Infine si chiede il luogo di questo punto al variare di x e compare la parabola, ossia il grafico di f(x)=a*x^2+b*x+c. Trascinando i punti sulle tre rette r,s,t è possibile vedere come si modifica il grafico della funzione quadratica al variare dei tre coefficienti; trascinando il punto x è possibile percorrere con il mouse il grafico della funzione. Chiedendo a Cabri di indicare la formula della funzione (in Cabri si deve chiedere l'equazione della curva) si può anche osservare le relazioni che legano i cambiamenti dei coefficienti a quelle del grafico.

1) Attivate, con l'ultimo bottone del menu a icone, il comando "Mostra gli assi".
2) Costruite tre rette orizzontali nella parte bassa del foglio e prendete, con il comando "Punto su un oggetto" del secondo bottone del menu a icone, su ciascuna di esse un punto (conviene nascondere, con il comando "Mostra / Nascondi" dell'ultimo bottone del menu a icone, il punto utilizzato per costruire la retta e prendere un altro punto su ciascuna delle tre rette).
3) Chiamate questi punti rispettivamente a,b,c per ricordarvi che le ascisse di questi punti rappresentano i coefficienti della funzione quadratica.
4) Chiedete le coordinate di ciascuno di questi punti (terz'ultimo bottone del menu a icone: "Coordinate ed Equazioni")
5) Poiché vi serve solo l'ascissa di questi punti, cliccate due volte su ciascuna delle coordinate e cancellate le parentesi, il punto e vigola e l'ordinata per ciascuno dei tre punti.
6) Costruite ora un punto sull'asse x (attenzione: fate in modo che non coincida con un punto della griglia), chiamatelo x e richiedete le sue coordinate (cancellando poi parentesi, punto e virgola e ordinata di x)
7) Attivate lo strumento calcolatrice (terz'ultimo bottone del menu a icone) e inserite in essa il calcolo a*x^2+b*x+c. Allo scopo, cliccate una volta sull'ascissa del punto a (vedrete che nella calcolatrice compare a, il che vuol dire che essa ha memorizzato l'ascissa di a), quindi cliccate sul segno di moltiplicazione e poi una volta sull'ascissa di x. Vedrete che la calcolatrice scriverà a*b, il che vuol dire che è pronta a calcolare il prodotto fra il primo numero immesso, ossia l'ascissa di a e il secondo numero immesso, ossia l'ascissa di x. Questo può comportare un po' di confusione: a noi sarebbe piaciuto che la calcolatrice scrivesse a*x ... ma non possiamo pretendere che uno strumento automatico di calcolo sia sempre in grado di dare il significato che noi vogliamo dare ai simboli: è normale che la calcolatrice "non ci capisca", mentre noi dobbiamo sempre essere in grado di capire la calcolatrice ... Ricordiamoci però che noi volevamo a*x^2 e non a*x; quindi digitiamo sulla calcolatrice il segno ^ che è il segno di elevamento a potenza. Quindi scriviamo + e poi clicchiamo una volta sull'ascissa di b (la calcolatrice ovviamente scriverà c, in quanto ordina alafbeticamente i dati via via immessi), quindi digitiamo il segno di moltiplicazione e poi clicchiamo una volta sull'ascissa di x (la calcolatriche scriverà di nuovo b, in quanto si tratta dello stesso valore immesso prima ... forse non capirà tutto quello che ci piacerebbe

potesse capire, ma la logica secondo cui opera è ben impostata!). Infine scriviamo + e clicchiamo una volta sull'ascissa di c (la calcolatrice scriverà, ovviamente, d). Cliccando sul tasto = avremo il risultato di f(x), ossia a*x^2+b*x+c, naturalmente per i valori di a,b,c e x corrispondenti alle posizioni attuali dei punti.
8) Trascinate con il mouse il risultato in altro a destra sul piano cartesiano e, cliccando due volte su di esso, cancella "risultato:" e scrivete al suo posto "f(x)=".
9) Con il comando "Trasporto di misura" (quinto bottone del menu a icone) trasportate sull'asse delle y il numero che indica il valore di f(x) e chiamate f(x) il punto così ottenuto (attenzione: se non vedete il punto, può darsi che il risultato sia troppo grande per la finestra grafica che avete a disposizione. In tal caso potete agire in tre modi: modificando l'unità d misura del vostro grafico; modificando i coefficienti e quindi il valore di f(x); con una combinazione dei due modi precedenti)
10) Tracciate ora la perpendicolare per f(x) all'asse y e la perpendicolare per x all'asse x (il comando perpendicolare si trova sul quinto bottone del menu a icone).
11) Costruite il punto di intersezione delle due perpendicolari. Si tratta del punto di coordinate (x; f(x)), ossia del punto che descrive il grafico della funzione quadratica!
12) Nascondete con il comando "Mostra / Nascondi" le due perpendicolari e chiedi il luogo di f(x) al variare di x (il comando luogo si trova nel quinto bottone del menu a icone)
13) Se avete utilizzato Cabri II plus potete anche chiedere la formula della funzione quadratica (terz'ultimo bottone del menu a icone, "Coordinate o equazioni").

Dovrebbe apparire la parabola. Potete ora effettuare un'esplorazione su che cosa accade modificando il valore dei coefficienti a,b,c. Dovreste ritovare le osservazioni che avete già fatto con Grafic Calculus.
Se avete utilizzato Cabri II o l'animazione in cabrijava, noterete che, se i valori di a diventano piuttosto grandi, Cabri fa un disegno sempre meno indicativo del grafico della funzione quadratica, presentando punti angolosi sempre più marcati. Ciò dipende dal modo in cui Cabri II disegna i luoghi (e i file di cabrijava, attualmente possono essere fatti solo con cabri II).
Con Cabri II plus, invece, non si hanno limitazioni così evidenti.
Esplorando la situazione grazie ai file di Cabri o Cabrijava dovreste avere notato che è immediato notare quali modificazioni producono sul grafico le variazioni del coefficiente *c;* forse siete riusciti a individuare anche l'effetto delle variazioni di *a*, mentre è molto più difficile individuare l'effetto che hanno le variazioni di b sul grafico. Riassumete, comunque, quanto osservato qui di seguito:

I risultati della nostra esplorazione:

Se considerate la formula equivalente
$f(x) = a*(x-x_V)^2+ y_V$
(dove x_V e y_V sono rispetivamente l'ascissa e l'ordinata del vertice)
invece della formula
$f(x) = a*x^2 + b*x + c$
allora dovrebbe essere molto più semplice individuare l'effetto che la variazione dei tre parametri a, x_V e y_V ha sulla parabola.
Provate a scrivere qui di seguito l'effetto della variazione di ciacuno dei parametri a, x_V e y_V sul grafico di $f(x)= a*(x-x_V)^2+ y_V$. In seguito controllate le vostre affermazioni aprendo il file di cabrijava parabolaverticejava o, se avete Cabridueplus, il file parabolaverticeplus.

Le nostre previsioni sull'effetto di a, x_V e y_V sulla parabola:

Controllate la correttezza delle vostre previsioni esplorando il file parabolaverticejava o, se avete Cabri II plus, il file parabolaverticeplus.

Eventuali differenze rispetto alle nostre previsioni:

Scheda 2: le funzioni quadratiche con TI-InterActive!

(Attività individuale da svolgersi a casa come sistemazione delle conoscenze)

1. Ormai dovrebbe esserti chiaro come i cambiamenti di *a* , x_V e y_V incidono sul grafico di f(x) = a*(x- x_V)^2 + y_V.
D'altra parte hai anche visto che la forma f(x) = a*(x- x_V)^2 + y_V è facilmente riconducibile alla forma f(x) = ax^2 + bx + c. Eseguiamo i calcoli di a*(x- x_V)^2 + y_V per trovare come dipendono b e c da a, x_V e y_V.

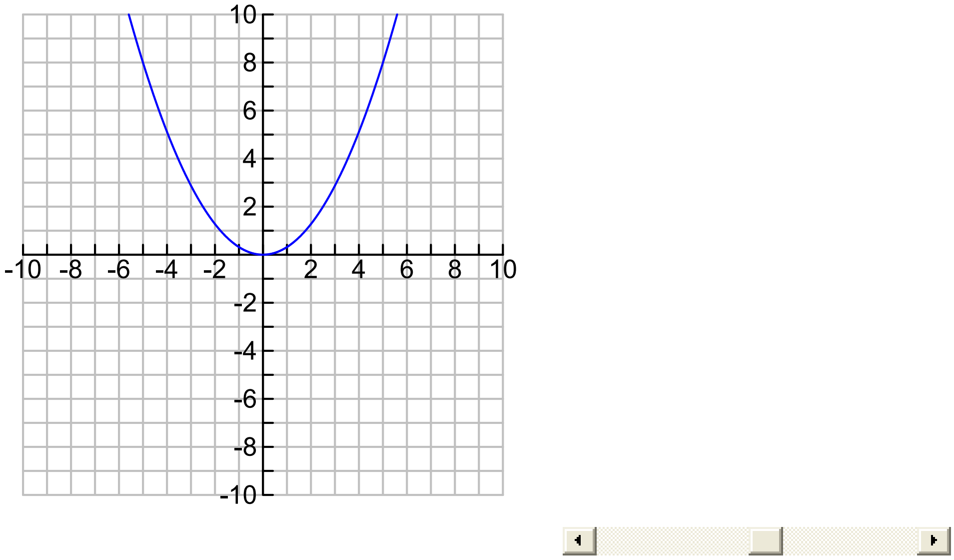
$$\text{expand}\left(a\cdot(x - xv)^2 + yv\right)$$

$$a\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot xv\cdot x + a\cdot xv^2 + yv$$

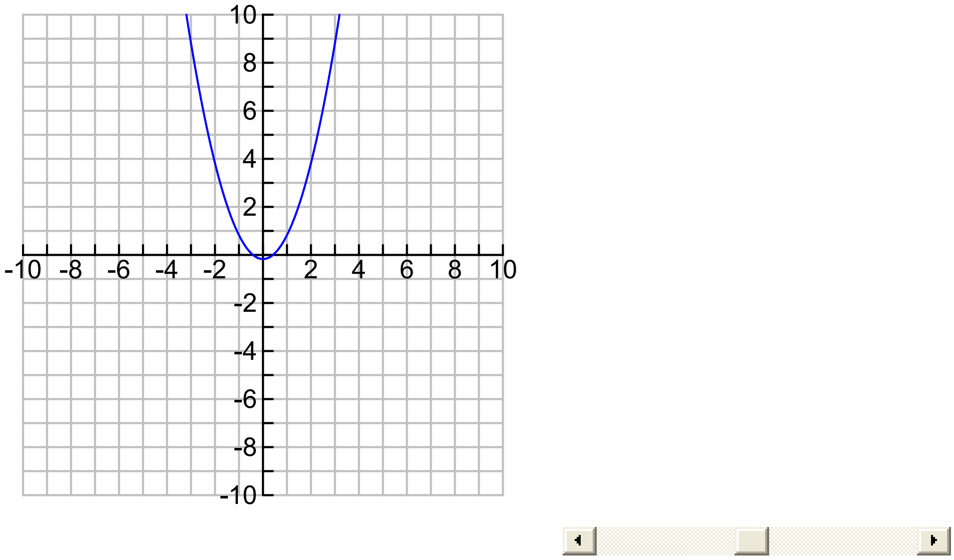
Per il principio di identità dei polinomi (due polinomi sono uguali se hanno stesso grado e coefficienti dei gradi cosrripondenti uguali), si ha che
ax^2 - 2*a*xv*x + a*xv^2 + yv = a*x^2+b*x+ c
se e solo se:
b= -2*a*xv
e
c= a*xv^2 + yv
Si tratta di calcoli che puoi verificare a mano, utilizzando le conoscenze di calcolo letterale.

Ti sarai allora reso conto perché era difficile individuare che effetti hanno le variazioni del coefficiente b sulla parabola. Infatti b è legato a due parametri geometrici importanti: l'apertura della parabola e l'ascissa del vertice. È il rapporto -b/2a che ha un significato geometrico ben preciso: l'ascissa x_V del vertice. In effetti *b* ha una suggestiva interpretazione geometrica, ma piuttosto nascosta e, in questo momento, non catturabile con le tue conoscenze: *b* è la pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione quadratica f(x) = ax^2+bx+c in x= 0.
Invece c, pur essendo legato ad a, x_V e y_V, ha un'interpretazione geometrica più semplice: è l'ordinata del punto di intersezione della parabola con l'asse y, ossia il valore della funzione in *x* = 0.
Anche *a* ha una semplice interpretazione geometrica: influenza l'aperura della parabola.
Riprendi in considerazione quello che ora abbiamo detto utilizzando le seguenti finestre grafiche che contengono un cursore con il quale è possibile modificare i valori dei parametri della formula di una funzione quadratica in un determinato intervallo (il cursore può essere trascinato con il mouse o, meglio ancora, con le freccette del tastierino numerico).

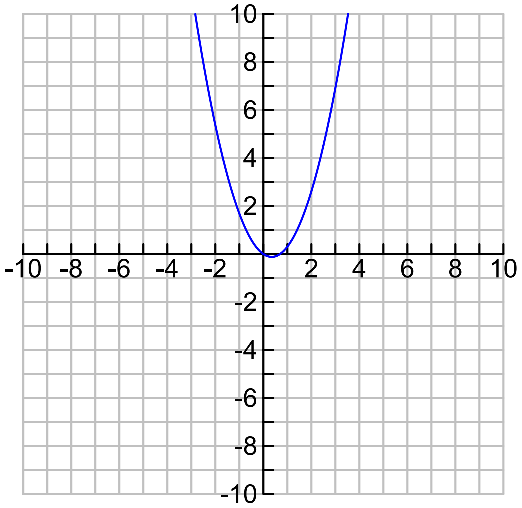
Primo grafico: come cambia il grafico di f(x) = ax^2+bx + c al variare di a.



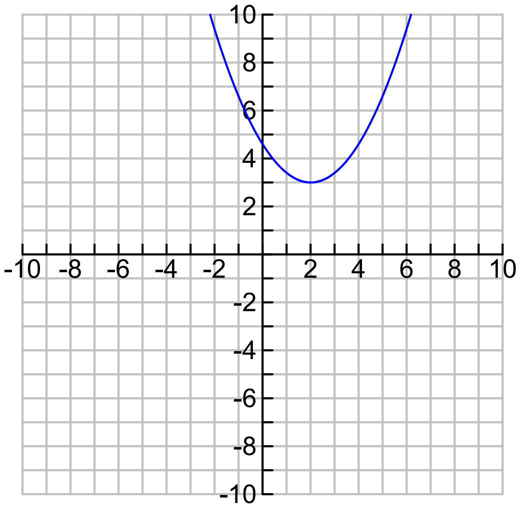
Secondo grafico: come cambia il grafico di f(x) = ax^2+bx + c al variare di c.



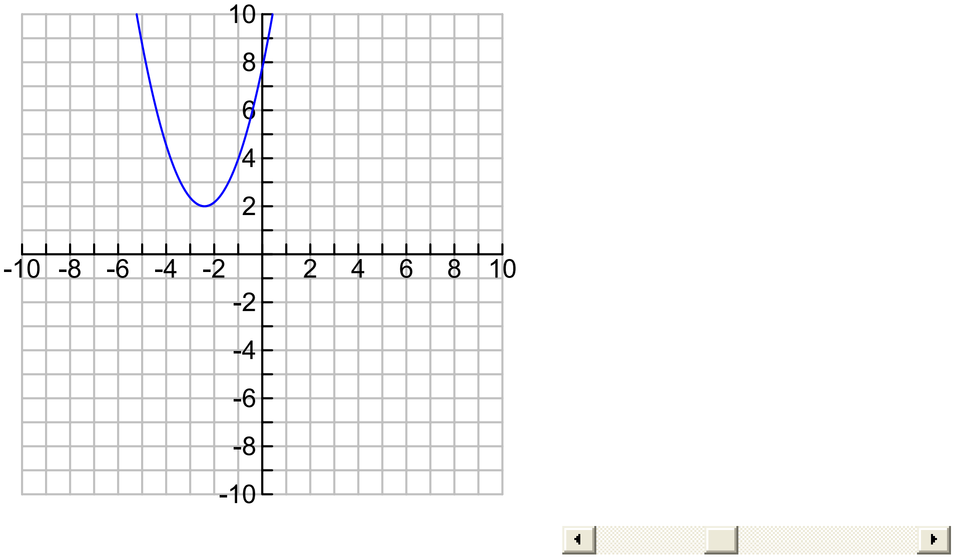
Terzo grafico: come cambia il grafico di f(x) = ax^2+bx + c al variare di b.



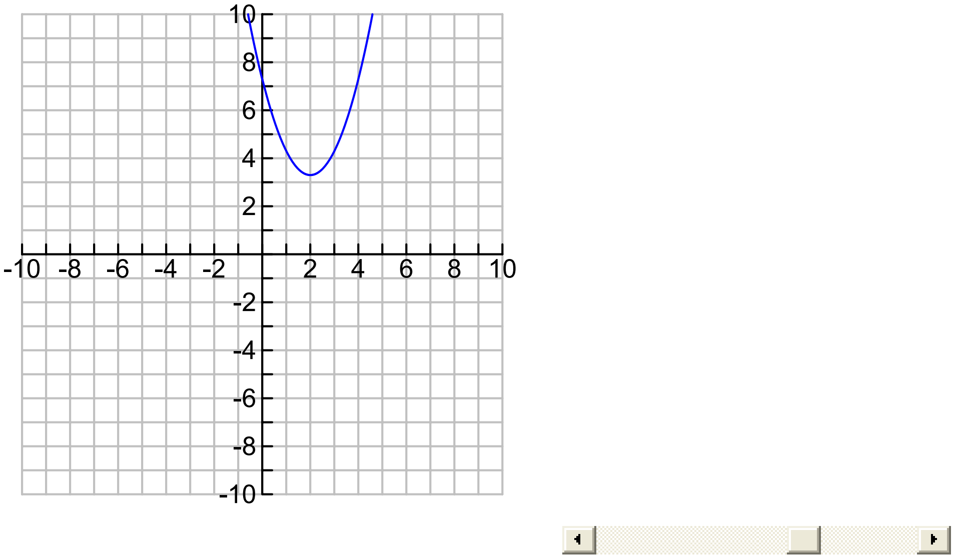
Quarto grafico: come varia il grafico di $f(x)=a*(x-x_V)^2+y_V$ al variare di a.



Quinto grafico: come varia il grafico di $f(x)=a*(x-x_V)^2+y_V$ al variare di x_V.



Sesto grafico: come varia il grafico di $f(x)=a*(x-x_V)^2+y_V$ al variare di y_V.



Il variare parametro *a* influenza l'apertura della parabola. Cerchiamo ora un altro significato di *a* che può avere una certa importanza.

Per una funzione lineare del tipo f(x)=a*x+b, il significato di *a,* ossia della pendenza della funzione, è il rapporto (costante) $\Delta y/\Delta x$ calcolato fra due punti qualunque della funzione. Ciò vuol anche dire che *a* indica di quanto aumenta la variabile dipendente *y* per un incremento unitario della variabile indipendente *x*.
Per una funzione quadratica, $\Delta y/\Delta x$ non è, ovviamente, costante. Considera, però, la formula f(x)=a*(x-x_V)^2+y_V e scrivila come f(x) - y_V =a*(x-x_V)^2.
Se ora interpreti f(x) come l'ordinata y di un punto della parabola di ascissa x, l'equazione y - y_V =a*(x-x_V)^2 dice che spostandoti dal vertice V (x_V; y_V) in un qualunqe punto (x;y) della parabola, l'incremento Δy è uguale ad *a* volte il quadrato dell'incremento Δx. In altri termini, $\Delta y/(\Delta x)^2$ = a.
Naturalmente questa interpretazione vale solo se Δy e Δx rappresentano:
Δx la differenza tra l'ascissa x di un punto P(x; y) della parabola e l'ascissa x_V del vertice V;
Δy la differenza tra l'ordinata y di un punto P(x; y) della parabola e l'ordinata y_V del vertice V.
Nota che, se Δx = 1, allora Δy = *a*.

2. Nella precedente attività hai trovato che, per quel che riguarda le due formule f(x) = a*x^2+b*x+c e f(x)= a*(x-x_V)^2 + y_V, le relazioni tra *a*, *b*, *c* e x_V e y_V sono espresse dalle seguenti equazioni:
b= -2*a*x_V
c= a*xv^2 + y_V
Basandoti su queste equazioni, puoi dire quanto vale il vertice del grafico della funzione quadratica f(x) = 2x^2-3x+1? Cerca di indicare una procedura che, dati i coefficienti a,b, c di una funzione quadratica f(x)=a*x^2+b*x+c ti consenta di determinare il vertice del grafico di tale funzione.

La mia risposta

L'equazione b= -2*a*x_V consente di determinare immediatamente che l'ascissa x_V del vertice è data dal rapporto -b/(2a). Determina, eventualmente aiutandoti con TI-InterActive!, l'ordinata y_V del vertice in funzione di a,b,c (suggerimento: ricorda che c= a*xv^2 + yv e che x_V = -b/(2a))

La mia risposta

Scheda 3: zeri, segno e confronto di funzioni quadratiche

(Attività da svolgersi parte in laboratorio a gruppi e parte a casa, anche come sistemazione. Tempo previsto: 14 ore di lavoro in classe)

1. **(attività individuale) Dedica cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema: "come si possono determinare gli zeri (se ci s sono) di una funzione quadratica che può essere scomposta nel prodotto di due funzioni lineari? Fai almeno tre esempi.**

La mia risposta

2. (attività in piccoli gruppi) Nelle attività delle precedenti schede avete visto che una funzione quadratica può scriversi in due modi equivalenti:
f(x)=a*x^2+b*x+c
e
f(x) = a*(x - x_V)^2 +y_V

La formula f(x) = a*(x - x_V)^2 +y_V è molto utile per determinare se la funzione quadratica ha zeri e, nel caso li abbia, per determinare i suoi zeri. Perché? Giustificate la risposta, producendo anche qualche esempio.

La nostra risposta

Rispondendo alla precedente domanda, dovreste esservi accorti che:
se y_V e *a* sono concordi (ossia hanno stesso segno), allora la funzione quadratica non ha zeri, ossia la parabola è posta o nel semipiano delle *y* negative (se *a* < 0) o in quello delle *y* positive (se *a* > 0);
se $y_V = 0$, allora la funzione quadratica ha come unico zero x_V;
se y_V e *a* sono discordi (ossia hanno stesso opposto), allora la funzione quadratica ha due zeri che possono essere determinati nel seguente modo:
$a*(x - x_V)^2 = - y_V$
$(x - x_V)^2 = - y_V/a$
si estrae quindi la radice quadrata a entrambi i membri, operazione possibie, perché, in questo caso $- y_V/a$ è positivo (perché?).
Si ottiene quindi $|x - x_V|$ = radice quadrata $(-y_V/a)$ e, infine,
$x = x_V$ - radice quadrata$(-y_V/a)$ oppure $x = x_V$ + radice quadrata$(-y_V/a)$
La scrittura che abbiamo utilizzato non è molto elegante e forse è anche difficilmente comprensibile. Facciamo aiutare dal manipolatore simbolico di TI-InterActive! per scrivere un po' meglio e per ritrovre i risultati dei calcoli che abbiamo eseguito. Dobbiamo per usare un accorgimento: attualmente TI-InterActive! ha memorizzato valori numerici per a,b,c, x_V e y_V (ciò dipende dal fatto che in precedenza, nella scheda 2, abbiamo aperto 5 finestre ciascuna delle quali ha un cursore che consente di assegnare a uno dei parametri che stiamo considerando e che sono importanti per la determinazione della funzione quadratica, un insieme di valori). Per verificare quanto stiamo dicendo, proviamo ad aprire la calcolatrice di TI-InterActive!, digitiamo *a* e battiamo ENTER:

a

$.4$

Come potete vedere la calcolatrice restituisce 0.4, ossia il valore attuale di *a*. Se noi vogliamo che nelle formule che scriveremo a,b,c,x_V e y_V non assumano valori numerici particolari, ma rimangano parametri generici, dobbiamo indicare questa nostra intenzione alla calcolatrice.
Ciò può essere fatto con il comand DelVar. DelVar(x) cancella il contenuto di memoria che è stato inserito nella variabile x e, quindi, consente di utilizzare x come parametro generico nelle formule.
Cancelliamo quindi il contenuto associato alle variabili a,b,c,x_V e y_V . Ricordatevi di questa operazione: è fondamentale in alcuni casi!

$\mathrm{DelVar}(a)$

"Done"

$\mathrm{DelVar}(b)$

"Done"

$\text{DelVar}(c)$

"Done"

$\text{DelVar}(xv)$

"Done"

$\text{DelVar}(yv)$

"Done"

Possiamo ora chiedere all calcolatrice di risolvere l'equazione a*(x - x_V)^2 +y_V =0

$$\text{Solve}\left(a\cdot(x - xv)^2 + yv = 0, x\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{a}\cdot xv - \sqrt{-yv}}{\sqrt{a}} \text{ or } x = \frac{\sqrt{a}\cdot xv + \sqrt{-yv}}{\sqrt{a}}$$

La calcolatrice dà una soluzione apparentemente diversa da quella che abbiamo trovato noi prima: abbiamo sbagliato, oppure si tratta solo di una diversa forma di scrittura? Come ricorderai, moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero, si ottiene una frazione equivalente alla data. Se, allora moltiplichiamo numeratore e denominatore delle due frazioni ottenute per la radice di a otteniamo:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot xv - \sqrt{a}\cdot\sqrt{-yv}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}$$

$$\frac{xv - \sqrt{-yv}}{\sqrt{a}}$$

Ossia:

$$xv - \sqrt{\frac{-yv}{a}}$$

Nota che quest'ultima espressione ha senso nei numeri reali se -yv/a è positivo, ossia se yv e a sono discordi, mentre le altre espresisoni scritte dalla calcolatrice hanno senso nei numeri reali se a > 0 e -y_V < 0.

Analogamente possiamo ottenere l'altra soluzione:

$$xv + \sqrt{\frac{-yv}{a}}$$

Eventuali parti che non sono chiare nella precedente procedura che consente di dire se una funzione f(x) = a*(x - x_V)^2 +y_V ha o non ha zeri e, nel caso li abbia, di determinarli.

3. Determinate se le seguenti funzioni quadratiche hanno o no zeri e, se li hanno determinateli:
f(x) = x^2 - 5x + 3
g(x) = x^2 - 2x + 4
h(x) = (x- 4)*(2x-3)
k(x) = 5x *(x+1)
m(x) = x^2 + 4
n(x)= x^2 - 8

La nostra risposta

Notate che, per h(x), k(x), m(x) e n(x) non conviene assolutamente ricondursi alla foma f(x) = a*(x-x_V)^2 + y_V per vedere se ci sono zeri e, in caso affermativo, determinarli. Per affermare che h(x) e k(x) hanno zeri, è sufficiente applicare la legge di annullamento del prodotto, che afferma che un prodotto di due fattori è uguale a 0 se e solo se almeno uno dei due fattori è uguale a 0.
Ciò vuol dire che h(x) = 0 se e solo se x - 4 = 0 oppure 2x - 3 = 0, ossia
x = 4 o x = 3/2. Quindi gli zeri di h(x) sono 4 e 3/2.
Analogamente, gli zeri di k(x) sono 0 e -1.
Nel caso di m(x), si vede immediatamente che non ha zeri, anche senza notare

che è scritta nella forma a*(x-x_V)^2 + y_V con a=1 , x_V= 0 e y_V=2. Infatti x^2 non è negativo e 2 è positivo, quindi la loro somma, qualunque sia *x,* non può essere uguale a 0.

Analogamente n(x)=0 se e solo se x^2 = 8, ossia $x = 2\sqrt{2}$ or $x = -2\sqrt{2}$, essendo $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$.

Facciamo un po' d'ordine fra le nostre conoscenze!

Se rileggi con attenzione quanto abbiamo scritto in precedenza, dovresti accorgerti che il problema di determinare gli zeri di una funzione quadratica è stato ricondotto a quello di risolvere un'equazione di secondo grado. Si tratta di un procedimento già visto con le funzioni lineari: in quel caso, il problema di determinare lo zero della funzione f(x) = a*x + b era stato ricondotto a quello di risolvere l'equazione di primo grado ax + b = 0. Qui il problema di determinare gli zeri della funzione quadratica
f(x) = a*x^2 + b*x + c oppure, equivalentemente, f(x) = a*(x-x_V)^2 + y_V
è stato ricondotto alla risoluzione dell'equazione di secondo grado
a*x^2+b*x+c=0 oppure, equivalentemente, a*(x-x_V)^2 + y_V =0
Il problema diventa quindi quello di determinare una procedura risolutiva per le due equazioni:
1) a*x^2+b*x+c=0
2) a*(x-x_V)^2 + y_V =0
Nel caso della equazione a*(x-x_V)^2 + y_V =0 abbiamo visto che le soluzioni esistono se e solo se
a) y_V = 0 e, in tla caso abbiamo come unica soluzione x = xv
b) y_V e a sono discordi e, in tal caso abbiamo le due soluzioni

$xv - \sqrt{\frac{-yv}{a}}$, $xv + \sqrt{\frac{-yv}{a}}$

Nota che le due soluzioni sono simmetriche rispetto a x_V; questo risultato ti sembra naturale o sorprendente? Puoi darne una giustificazione di carattere geometrico?

La mia risposta

Nel caso dell'equazione a*x^2+b*x+c=0 le cose sono un po' meno immediate, ma possiamo ottenere una volta per tutte le soluzioni se ricordiamo che

x_V = - b/(2a)

e che

c= a*x_V^2 + y_V

Infatti sostituendo nella seconda equazione -b/(2a) al posto di x_V possiamo scrivere:

c =a*b^2/(4a^2) + y_V , ossia c = b^2/(4a) + y_V e , quindi:

y_V= (4*a*c-b^2)/(4*a)

Facciamolo scrivere a TI-InterActive!:

$$\text{Solve}\left(c = \frac{a \cdot b^2}{4 \cdot a^2} + yv, yv\right)$$

$$yv = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}$$

Avendo espresso le coordinate x_V e y_V del vertice della parabola in funzione dei coefficienti a, b, c, possiamo scrivere le soluzioni dell'equazione a*x^2+b*x+c= 0 in funzione di a,b,c semplicemente sostituendo in

$xv - \sqrt{\frac{-yv}{a}}$ **oppure** $xv + \sqrt{\frac{-yv}{a}}$

al posto di x_V, -b/(2a) e, al posto di y_V, (4*a*c-b^2)/(4*a).

Con qualche calcolo, che potersti anche provare a eseguire da solo, confrontandolo con quelli eseguiti da qualche tuo compagno (magari chiedendo all'insegnante di aiutarti a risolvere dubbi eventualmente rimasti), dovresti ottenere le due seguenti soluzioni:

$$\text{solve}\left(a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0, x\right)$$

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c} - b}{2\cdot a} \text{ or } x = \frac{-\left(\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c} + b\right)}{2\cdot a}$$

che possono anche essere scritte così:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$ oppure $$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Come puoi vedere, in questo caso, la condizione di esistenza delle soluzioni è garantita dalla non negatività della quantità b^2 - 4*a*c , ossia del radicando delle due radici quadrate. Nota che dire che b^2 - 4*a* c deve essere non negativo equivale a dire che y_V e a non siano concordi, ossia che y_V * a sia non positivo.
sai spiegare perché? (Sugegrimento: y_V = (4*a*c-b^2)/(4*a))

La mia risposta:

Nota che la stessa formula di una funzione quadratica f(x) = a*x^2 + b*x + c può essere interpretata come un'equazione a due variabili (x e y):
y = a*x^2+b*x+c
In tal caso si mette in evidenza, invece della legge che associa al numero x il numero a*x^2+b*x+c, l'insieme delle coppie ordinate (x,y) tali chey=a*x^2+b*x+c.
Quindi, quando scriveremo f(x) = a*x^2 + b*x+c penseremo alla classica macchina input - output che appunto, per ogni input x restituisce a*x^2+b*x+c

x ----------------------------> a*x^2+b*x+c
Quando, invece, scriveremo y = a*x^2+b*x + c

ci riferiremo all'insieme delle coppie ordinate (x, y) che, nel linguaggio matematico si indicano con la scrittura: { (x; y) : y = a*x^2+b*x+c} (leggi: l'insieme delle coppie ordinate (x; y) tali che y è uguale ad a*x^2+b*x+c)
Nota che avremmo potuto anche scrivere:
{ (x; y) : y = f(x)}.
La rappresentazione di questo insieme sul piano cartesiano è la parabola grafico della funzione f(x) = a*x^2+b*x+ c.
Ecco allora che un'equazione di secondo grado a*x^2+b*x+c=0 assume una suggestiva interpretazione: essa può essere vista come la risolvente del sistema
y= 0 e y = a*x^2+b*x+c
Possiamo quindi dire che le soluzioni di a*x^2+b*x+c= 0, quando esistono, possono essere interpretate come le ascisse dei punti di ordinata nulla della parabola di equazione y =a*x^2+b*x+c.
È allora chiaro perché gli zeri di una funzione quadratica sono simmetrici rispetto a x_V: ciò equivale a dire che i punti di intersezione di una parabola con l'asse *x*, quando esistono, sono simmetrici rispetto al vertice!

Ora riassumi tu:

4. Descrivi una procedura che consenta di dire se la funzione quadratica
$f(x) = ax^2 + bx + c$
ha zeri e, in caso di risposta affermativa, di determinarli.

La mia risposta

5. (da svolgersi a casa, individualmente). Dopo aver detto se esistono o no, determina, nel caso in cui esistono, gli zeri delle seguenti funzioni quadratiche:

a) f(x)= x^2 + 5x + 6
b) f(x) = x^2 + x – 1
c) f/x) = x^2 + x + 1
d) f(x) = ˉx^2 + x – 1
e) f(x) = 3x^2 – x – 1/3

g) f(x) = x^2 – 0.4
h) f(x) = x^2 + 5x
i) f(x) = -2x^2 + 7x + 1
l) f(x) = 10x^2 – 20x + 10
m) f(x) = (2x– 3)*(4x+1)
n) f(x) = x^2 – 8x + 7
o) f(x) = x^ – 2
p) f(x) = -3x^2 + 2.4x
q) f(x) = 2x^2 – 2x– 1

La mia risposta

6. (Problema da svolgersi a coppie). Nel lancio di una moneta truccata si sa che la probabilità dell'uscita della faccia contrassegnata con testa (T) è *p*, mentre la probabilità dell'uscita della faccia contrassegnata con croce (C) è 1 – *p*. Qual è la probabilità di ottenere, in due lanci successivi una testa e una croce? Quanto deve valere *p* perché la probabilità di ottenere, in due lanci successivi, TC o CT sia 0.7?

La nostra risposta

7 (Problema da svolgersi individualmente a casa). Da un quadrato di lato unitario si tagliano dai quattro vertici triangolini rettangoli isosceli di lato *x*, ottenendo un ottagono. Per quale valore di *x* l'ottagono ha area che è 2/3 di quella del quadrato?

La mia risposta

8. (Problema da svolgersi individualmente a casa). La funzione di "profitto settimanale" per un prodotto è data da $P(x) = -0.0001x^2 + 3x - 12\,500$, dove x è il numero di unità prodotte per settimana e $P(x)$ è il profitto (in euro). Qual è il massimo profitto settimanale? Quante unità devono essere prodotte settimanalmente per ottenere il profitto massimo?

La mia risposta

9. (Problema da svolgersi a coppie). La variazione, rispetto al tempo t, dell'altezza h di un oggetto lanciato da terra verso l'alto (trascurando la resistenza dell'aria) è data dalla funzione $h(t) = -5t^2 + 10t$ (il tempo è dato in secondi e l'altezza in metri). Quale è la massima altezza raggiunta dall'oggetto? Dopo quanti secondi l'oggetto raggiunge l'altezza massima? Dopo quanto tempo ricade a terra? Dopo quanto tempo raggiunge l'altezza di 1 metro?

La nostra risposta

10. (Problema da svolgersi a coppie). Una grande agenzia immobiliare stima che 60 appartamenti di un grande complesso possano essere affittati se l'affitto mensile è di 600 euro. Inoltre suppone che per ogni 30 euro di aumento dell'affitto si perda l'affitto di 3 appartamenti. Quale somma dovrebbe essere richiesta per l'affitto degli appartamenti dall'agenzia per massimizzareil profitto?

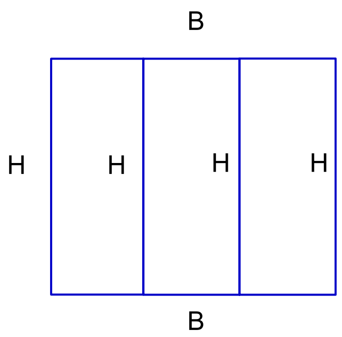
La nostra risposta

11. (Problema da svolgersi a casa, eventualmente a coppie). In una sala multicinema si vendono in media 2500 biglietti ogni sabato sera nel caso in cui il costo del biglietto sia di 5 euro. Grazie a uno studio accurato si sa che per ogni aumento di 50 centesimi del costo del biglietto si vendono 100 biglietti in meno. Determinate:

a) il prezzo per biglietto che consente di massimizzare il profitto
b) il profitto massimo
c) il numero di biglietti venduti quando il profitto è massimo.

La nostra risposta

12 (Problema da svolgersi a coppie). Una scuola dispone sdi 1600 metri di rete metallica per recintare tre campi da gioco rettangolari uguali e adiacenti (ossia aventi un lato in comune, come suggerisce la figura). Quali sono le dimensioni di base (B) e altezza (H) dei rettangoli che consentono di massimizzare l'area disponibile?



La nostra risposta

13. (da svolgersi in gruppo) Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = (2x - 1)*(1 - 3x)$?. Confrontate e discutete le strategie risolutive.

La nostra risposta

14. (da svolgersi in gruppo) Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = 5x*(1 - 2x)$?. Confrontate e discutete le strategie risolutive.

La nostra risposta

15. (da svolgersi in gruppo) Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = (2x - 1)^2$?. Confrontate e discutete le strategie risolutive.

La nostra risposta

16. (da svolgersi in gruppo) Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = 5x^2 + 1$?. Confrontate e discutete le strategie risolutive.

17. (da svolgersi in gruppo) Come si può determinare il segno della funzione $f(x) = -x^2 - 5$. Confrontate e discutete le strategie risolutive.

La nostra risposta

18. (da svolgersi in gruppo) La formula $f(x) = a*(x - x_V)^2 + y_V$ è molto utile per determinare il segno della funzione quadratica y=f(x). Perché? Giustificate la risposta e determinate il segno delle funzioni quadratiche
f(x)= 3(x– 1)^2 – 2 e g(x)= 3(x– 1)^2 + 2

La nostra risposta

19. (da svolgersi a casa, individualmente). Determina il segno delle seguenti funzioni quadratiche:

a) f(x)= x^2 + 5x + 6
b) f(x) = x^2 + x – 1
c) f/x) = x^2 + x + 1
d) f(x) = -x^2 + x – 1
e) f(x) = 3x^2– x – 1
g) f(x) = x^2 – 1
h) f(x) = x^2 + 5x
i) f(x) = -2x^2 + 7x + 1
l) f(x) = 10x^2 – 20x + 10
m) f(x) = (2x– 3)*(4x+1)
n) f(x) = x^2 – 8x + 7
o) f(x) = x^ – 2
p) f(x) = -3x^2 + 2x

La mia risposta

20. (Problema da svolgersi a coppie). Nel lancio di una moneta truccata si sa che la probabilità dell'uscita della faccia contrassegnata con testa (T) è *p*, mentre la probabilità dell'uscita della faccia contrassegnata con croce (C) è 1 − *p*. Qual è la probabilità di ottenere, in due lanci successivi una testa e una croce? Quanto deve valere *p* perché la probabilità di ottenere, in due lanci successivi, TC o CT sia almeno 0.7? E sia non più di 0.3?

La nostra risposta

21 (Problema da svolgersi individualmente a casa). Da un quadrato di lato unitario si tagliano dai quattro vertici triangolini rettangoli isosceli di lato *x*, ottenendo un ottagono. Per quale valore di *x* l'ottagono ha area che è almeno i 2/3 di quella del quadrato? E per quale valore di *x* l'area dell'ottagono non è maggiore di 1/3 di quella del quadrato?

La mia risposta

22. (Problema da svolgersi individualmente a casa). La funzione di "profitto settimanale" per un prodotto è data da $P(x) = -0.0001x^2 + 3x - 12\,500$, dove x è il numero di unità prodotte per settimana e $P(x)$ è il profitto (in euro). Qual è il massimo profitto settimanale? Quante unità devono essere prodotte settimanalmente per ottenere un profitto che sia almeno il 70% del profitto massimo?

La mia risposta

23. (Problema da svolgersi a coppie). Una grande agenzia immobiliare stima che 60 appartamenti di un grande complesso possano essere affittati se l'affitto mensile è di 600 euro. Inoltre suppone che per ogni 30 euro di aumento dell'affitto si perda l'affitto di 3 appartamenti. Quale somma dovrebbe essere richiesta per l'affitto degli appartamenti dall'agenzia per avere un profitto che sia non meno del 90% del profitto massimo?

La nostra risposta

24. (Problema da svolgersi a coppie). In una sala multicinema si vendono in media 2500 biglietti ogni sabato sera nel caso in cui il costo del biglietto sia di 5 euro. Grazie a uno studio accurato si sa che per ogni aumento di 50 centesimi del costo del biglietto si vendono 100 biglietti in meno. Determinate il prezzo per biglietto che consente di avere un profitto non inferiore all'85% del profitto massimo.

La nostra risposta

25. Dedicate cinque – dieci minuti di riflessione individuale per individuare una strategia risolutiva al seguente problema "come potete determinare, se esistono, i punti di intersezione della retta, grafico della funzione lineare $f(x)= 3x – 2$ e della parabola, grafico della funzione quadratica $f(x) = 4x^2 + x$?". In seguito confrontate le strategie risolutive.

Il confronto delle strategie risolutive

26. Determinate, se esistono, i punti di intersezione delle due parabole, grafici delle funzioni quadratiche f(x) = $x^2 - 2x + 3$ e g(x) = $x^2 + x$

La nostra risposta

27. (individuale, da svolgere a casa) Confronta le seguenti coppie di funzioni quadratiche (in alcuni casi, di funzioni quadratiche con una funzione lineare) graficamente, aiutandoti con TI-InterActive! o con Graphic Calculus (ossia di' per quali x la prima funzione di ogni coppia assume valori minori, uguali o maggiori della seconda).

$y = 3x^2 - 5$ $\quad y = 2x^2 + 10x$

$y = 0,5x^2 - 3$ $\quad y = 2x^2 - 20$

$y = -3x^2 + x + 1$ $\quad y = 2x^2 - 3x + 1$

$y = -5x^2 + 2x$ $\quad y = -3x^2 + 2x$

$y = -4x^2 - 1$ $\quad y = -5x + 2$

$y = 3x^2 - 5x + 1$ $\quad y = 2x$

Le mie risposte

28. Confrontate nel vostro gruppo di lavoro i procedimenti risolutivi attuati e le risposte fornite al precedente esercizio. Che cosa cambia rispetto al confronto fra due funzioni lineari?

La nostra risposta

Scheda 4: dalla formula al grafico; dal grafico a una possibile formula e da alcune condizioni alla formula

(Attività da svolgersi a casa individualmente e in classe per 2 ore)

1. Per ciascuna funzione quadratica:
a) individua il vertice (x_V; y_V)
b) individua i punti di ascissa $x_V -$ 0.5 e $x_V +$ 0.5
c) individua i punti di ascissa $x_V -$ 1 e $x_V +$ 1
d) individua i punti di ascissa $x_V -$ 1.5 e $x_V +$ 1.5
e) individua i punti di ascissa $x_V -$ 2 e $x_V +$ 2
f) disegna il grafico su un piano cartesiano xOy

$y = 3x^2 - 4$ $\quad$ $y= {}^{-}3x^2 +4$; $\quad$ $y = (x + 1)^2$; $\quad$ $y = {}^{-} x^2 - 2x - 1$ $\quad$ $y=x^2 +x$

Confronta la correttezza della tua risposta con il modulo grafico di TI-InterActive!

Eventuali errori commessi e motivazione; eventuali dubbi da chiarire a scuola:

2. (attività da svolgersi a coppie o in piccoli gruppi di lavoro, in laboratorio di informatica). Confrontate le risposte date agli esercizi proposti nella precedente attività da svolgere a casa.

Il risultato del confronto

3. Secondo voi è possibile, in teoria, dato il grafico di una funzione quadratica determinarne la formula? Cercate di giustificare la vostra risposta.

La nostra risposta

4. (da svolgersi a coppie, in laboratorio di informatica). Entrate nell'ambiente di graphic calculus "Finding the formula"; alla richiesta del percorso, cercate la cartella "Fichiers" e poi lanciate il file "formula". Selezionate "Quadratic" e partite. Cercate di capire che cosa vi chiede questo ambiente di Graphic Calculus e provate a rispondere alle varie domande. Prima di rispondere, pensate attentamente e confrontate la vostra strategia risolutiva con quella attuata dal vostro compagno o dalla vostra compagna di banco. Lavorate con attenzione e concentrazione e non con fretta, altrimenti non riuscirete a svolgere l'attività conclusiva di questa scheda.

Eventuali dubbi da chiarire con l'insegnante:

5. (Attività da svolgere a casa, possibilmente in piccoli gruppi, anche mediante collaborazione a distanza). Risolvete i seguenti esercizi:

a) determinate la formula della funzione quadratica il cui grafico passa per (5;2) e ha come vertice (0; 0).

b) determinate la formula della funzione quadratica il cui grafico ha come vertice (3; 0) e passa per (1; 2).

c) determinate la formula della funzione quadratica il cui grafico passa per A(2; 4) ; B (5; 6) e O (0, 0).
d) determinate la formula della funzione quadratica che ha come zeri 6 e -1 e il cui grafico passa per A(2; 5).

Le nostre risposte

6. (Attività da svolgere a scuola, in piccoli gruppi). Cercate di scrivere una procedura che, in generale, risolva le tre classi di problemi presentati nell'esercizio precedente.

La nostra risposta

Scheda 5. Operare con le funzioni quadratiche

(Attività da svolgersi parte a scuola a gruppi e parte a casa. Tempo previsto: 5 ore di lavoro in classe)

1. (Individuale) E' vero che la somma e la differenza di due funzioni quadratiche sono ancora funzioni quadratiche? Giustifica la risposta.

La mia risposta

2. (Individuale) E' vero che il prodotto e il quoziente di due funzioni quadratiche sono ancora funzioni quadratiche? Giustifica la risposta.

La mia risposta

3. (da svolgersi in piccoli gruppi). Considerate le due funzioni quadratiche $f(x)= 2x^2 - 5$ e $g(x) = {}^{-}3x^2 + 2x - 1$; calcolate le funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente. Cercate di immaginare le principali caratteristiche del loro grafico (soprattutto cercate di pensare a quali strategie vi consentono di avere un'idea del grafico delle funzioni quoziente e prodotto; potete aiutarvi con TI-InterActive! per testare le vostre congetture).

La nostra risposta e la dichiarazione di eventuali dubbi e perplessità

4. (Attività individuale) Ricorda che abbiamo considerato una funzione come una scatola nera con uno o più ingressi e un'unica uscita:

$$x \quad \text{------------------>} \quad f(x)$$

Secondo questa rappresentazione, comporre due funzioni f_1 e f_2 vuol dire applicarle in successione. La composta di f_1 con f_2, che si indica con la scrittura $f_1(f_2(x))$, vuol dire applicare a x la funzione f_2 e, in seguito, alla sua uscita $f_2(x)$ la funzione f_1. Viceversa per $f_2(f_1(x))$.

Per esempio, se consideriamo $f_1(x) = x^2 - 2$ e $f_2(x) = 3x - 1$, abbiamo che

$f_1(f_2(3)) = f_1(3*3 - 1) = f_1(8) = 8^2 - 2 = 62$.

Più in generale, $f_1(f_2(x)) = f_1(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 2 = 9x^2 - 6x - 1$.

Considera ora le due funzioni $f_1(x) = 2x^2 - 5$ e $f_2(x) = -3x^2 + 2x - 1$:

a) determina i valori di $f_2(f_1(2))$ e $f_1(f_2(2))$.

b) scrivi le equazioni delle composte $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$.

La mia risposta

5. (Individuale) E' vero che la composta di due funzioni quadratiche è ancora una funzione quadratica? Giustifica la risposta.

La mia risposta

6. (Attività in gruppo) Come è possibile avere un'idea dei grafici delle due funzioni $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$ dell'esercizio 4 a partire dai grafici di f_1 e di f_2? E in generale, dati i grafici di due funzioni quadratiche f_1 e f_2 è possibile avere informazioni sui grafici di $f_2(f_1(x))$ e $f_1(f_2(x))$? Verificate le vostre congetture con l'aiuto di TI-InterActive!

Le nostre risposte

Scheda 6: le tabelle delle differenze

(Attività da svolgersi in classe, in gruppo. Tempo previsto: 6 ore in classe)

1. La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2– B1, B3– B2, B4– B3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3– C2, C4– C3, C5– C4 … e così via). Cercate di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che avete utilizzato.

A	**B**	**C**	**D**		
0,3	1,41				
0,6	2,64	1,23			
0,9	3,69	1,05	-0,18		
1,2	4,56	0,87	-0,18		
1,5	5,25	0,69	-0,18		
1,8	5,76	0,51	-0,18		
2,1	6,09	0,33	-0,18		
2,4	6,24	0,15	-0,18		
2,7	6,21	-0,03	-0,18		
3	6	-0,21	-0,18		
3,3	5,61	-0,39	-0,18		
3,6	5,04	-0,57	-0,18		
3,9	4,29	-0,75	-0,18		
4,2	3,36	-0,93	-0,18		
4,5	2,25	-1,11	-0,18		
4,8	0,96	-1,29	-0,18		
5,1	-0,51	-1,47	-0,18		
5,4	-2,16	-1,65	-0,18		
5,7	-3,99	-1,83	-0,18		
6	-6	-2,01	-0,18		
6,3	-8,19	-2,19	-0,18		
6,6	-10,56	-2,37	-0,18		
6,9	-13,11	-2,55	-0,18		

La nostra risposta

2. Provate ora voi a immettere in un foglio elettronico una tabella che riporti, per incrementi costanti della variabile indipendente:
a) i valori di una funzione lineare e quelli delle differenze prime
b) i valori di una funzione quadratica, quelli delle differenze prime e quelli delle differenze seconde.
Riuscite a trovare relazioni che leghino le differenze prime alla pendenza delle funzioni lineari e le differenze prime e seconde ai parametri a e b di una funzione quadratica del tipo $f(x) = a*x^2 + b*x + c$? Cercate di organizzare il foglio elettronico in modo che sia semplice effettuare esperimenti e osservazioni (per esempio, mettete i parametri delle funzioni in apposite celle in modo tale che la modifica di un valore di queste celle si trasmetta a tutto il foglio di calcolo ... chiedete aiuto, per organizzare tale foglio, ai compagni più esperti o al vostro insegnante. In particolare, per fissare un valore in una cella, è necessario usare il carattere $; per esempio, digitando nel foglio elettronico E$1si fissa il valore della riga 1 sulla cella libera E. Si tratta di una competenza molto importante nell'uso del foglio elettronico, che è possibile acquisire velocemente guardando come opera una persona che sa usare il foglio elettronico. È per questo motivo che vi suggeriamo di chiedere a un tuo compagno esperto o all'insegnante come usare il carattere $ per fissare il valore scritto in una cella. In ogni caso riportiamo, per vostra comodità un foglio di lavoro già organizzato, che vi consente di effettuare esperienze ed osservazioni per quel che riguarda le funzioni quadratiche. Nel foglio sono riportate sette colonne che rappresentano, nell'ordine: la variabile indipendente x; la variabile indipendente f(x), ossia a*x^2+b*x+c; le differenze prime, le differenze seconde; il coefficiente a; il coefficiente b: il coefficiente c; il passo h di incremento costante della variabile indipendente. Modificando i parametri a,b,c, h il foglio si modifica e si possono osservare eventuali regolarità. Per entrare nel foglio fare due clik con il mouse).

x	f(x)	differenze prime	differenze seconde	a	b	c	h	
-5,00	-35	1,19	-0,02	-1	2	3	0,1	
-4,90	-33,81	1,17	-0,02					
-4,80	-32,64	1,15	-0,02					
-4,70	-31,49	1,13	-0,02					
-4,60	-30,36	1,11	-0,02					
-4,50	-29,25	1,09	-0,02					
-4,40	-28,16	1,07	-0,02					
-4,30	-27,09	1,05	-0,02					
-4,20	-26,04	1,03	-0,02					
-4,10	-25,01	1,01	-0,02					
-4,00	-24	0,99	-0,02					
-3,90	-23,01	0,97	-0,02					
-3,80	-22,04	0,95	-0,02					
-3,70	-21,09	0,93	-0,02					

La nostra risposta dopo l'esplorazione

I confronti con le risposte di altri gruppi

Eventuali suggerimenti e indicazioni dell'insegnante

4. Supponiamo che conosciate i valori f(0), f(1) e f(2) di una funzione quadratica f(x)= a*x^2+ b*x+ c.
Come potete determinare velocemente i coefficiente *a*,*b*, e *c* della funzione?
Suggerimento:
f(0) = ...
Calcolate le differenze prime: f(1) - f(0) = ... f(2) - f(1) = ...
Calcolate ora le differenze seconde ....
Ottenete quindi: ....

Le nostre risposte

5. (da risolvere individualmente) Sapendo che f(0) = 2; f(1) = -3 f(2) = 0.5, determina f(x) = a*x^2+b*x+c

La mia risposta

6. (Attività da svolgere in piccoli gruppi) La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A) a incrementi costanti; nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2– B1, B3– B2, B4– B3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3– C2, C4– C3, C5– C4 … e così via). Cercate di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che avete utilizzato.

0,3	0,897	-0,201	-0,936		
0,6	0,696	-1,137	-0,774		
0,9	-0,441	-1,911	-0,612		
1,2	-2,352	-2,523	-0,45		
1,5	-4,875	-2,973	-0,288		
1,8	-7,848	-3,261	-0,126		
2,1	-11,109	-3,387	0,036		
2,4	-14,496	-3,351	0,198		
2,7	-17,847	-3,153	0,36		
3	-21	-2,793	0,522		
3,3	-23,793	-2,271	0,684		
3,6	-26,064	-1,587	0,846		
3,9	-27,651	-0,741	1,008		
4,2	-28,392	0,267	1,17		
4,5	-28,125	1,437	1,332		
4,8	-26,688	2,769	1,494		
5,1	-23,919	4,263	1,656		
5,4	-19,656	5,919	1,818		
5,7	-13,737	7,737	1,98		
6	-6	9,717	2,142		
6,3	3,717	11,859	2,304		
6,6	15,576	14,163			
6,9	29,739				

La nostra risposta

7. (Attività da svolgere in piccoli gruppi) La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza B in funzione di una grandezza A. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (A) a incrementi costanti; nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente B. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (B2– B1, B3– B2, B4– B3 … e così via). Nella quarta colonna sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella colonna C (C3– C2, C4– C3, C5– C4 … e così via). Nella quinta colonna sono riportati i rapporti tra i successivi valori della variabile B (ossia B2/B1, B3/B2, B4/B3 e così via). Cercate di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione B = f(A), spiegando le strategie che avete utilizzato.

A	B	C	D	E	
0,3	6,15572	1,42286	0,32889	1,23114	
0,6	7,57858	1,75175	0,40491	1,23114	
0,9	9,33033	2,15665	0,4985	1,23114	
1,2	11,487	2,65515	0,61372	1,23114	
1,5	14,1421	3,26888	0,75558	1,23114	
1,8	17,411	4,02446	0,93023	1,23114	
2,1	21,4355	4,95469	1,14525	1,23114	
2,4	26,3902	6,09994	1,40997	1,23114	
2,7	32,4901	7,5099	1,73587	1,23114	
3	40	9,24578	2,13711	1,23114	
3,3	49,2458	11,3829	2,63109	1,23114	
3,6	60,6287	14,014	3,23925	1,23114	
3,9	74,6426	17,2532	3,98799	1,23114	
4,2	91,8959	21,2412	4,90979	1,23114	
4,5	113,137	26,151	6,04466	1,23114	
4,8	139,288	32,1957	7,44185	1,23114	
5,1	171,484	39,6375	9,16199	1,23114	
5,4	211,121	48,7995	11,2797	1,23114	
5,7	259,921	60,0792	13,887	1,23114	
6	320	73,9662	17,0969	1,23114	
6,3	393,966	91,0631	21,0487	1,23114	
6,6	485,029	112,112		1,23114	
6,9	597,141				

La nostra risposta

Notate che nella funzione descritta nella precedente tabella, non solo i valori della variabile dipendente aumentano e aumentano sempre più, ma anche i valori delle diferenze prime e quelli delle differenze seconde. Sarà così per tutte le differenze successive, oppure sarà possibile determinare un grado abbastanza alto delle differenze in modo tale da avere differenze di quel grado costanti? In altri termini, la successione delle differenze darà sempre termini che crescono e crescono sempre più o potremo trovare, prima o poi, una successione costante?
La risposta, per successioni caratterizzate dal fatto che il rapporto tra due termini consecutivi è costante, è che non è possibile trovare una successione di differenze che sia costante.
La dimostrazione non è immediata, ma si può dare un'idea osservando che le differenze seconde sono proporzionali alle differenze prime e le differenze terze sono proporzionali alle differenze seconde e così via. Insomma, se le differenze prime aumentano e aumentano sempre più, allo stesso modo si cmporteranno le differenze successive, a meno di un fattore di proporzionalità.
Se il rapporto fra due termini consecutivi è costante, allora abbiamo che
f(n+1)/f(n) = k
Ciò equivale a dire che   f(n+1) = k* f(n) con f(0) = b
La funzione che soddisfa tali condizioni è la funzione esponenziale
g(x) = b*k^x
Infatti g(0) = b*k^0 = b

$$\frac{k^{(x+1)}}{k^x}$$

$$k$$

8. (Attività da svolgere in piccoli gruppi) Esplorate il seguente foglio elettronico così costruito:
a) nella prima colonna si trova la variabile indipendente x incrementata con passo costante uguale a 1
b) nella seconda colonna si trova la variabile dipendente a^x
c) nella terza colonna e nella quarta, rispettivamente, le differenze prime e seconde;
d) nella quinta i rapporti fra due termini successivi
e) nella sesta colonna la base a dell'eponenziale
Modificando i valori della base dell'esponenziale puoi verificare come cambiano le differenze prime e le differenze seconde.

x	f(x)	diffeprime	diffseconde	rapporti	a		
-10	0,00098	0,0009766	0,0009765625	2	2		
-9	0,00195	0,0019531	0,001953125	2			
-8	0,00391	0,0039063	0,00390625	2			
-7	0,00781	0,0078125	0,0078125	2			
-6	0,01563	0,015625	0,015625	2			
-5	0,03125	0,03125	0,03125	2			
-4	0,0625	0,0625	0,0625	2			
-3	0,125	0,125	0,125	2			
-2	0,25	0,25	0,25	2			
-1	0,5	0,5	0,5	2			
0	1	1	1	2			
1	2	2	2	2			
2	4	4	4	2			
3	8	8	8	2			

Dovreste avere notato che i rapporti tra due successivi valori delle differenze prime o delle differenze seconde sono gli stessi rapporti tra due successivi valori della successione. Ciò vuol dire che, ameno di un fattore di proporzionalità, le differenze prime e le differenze seconde (e ogni successiva differenza) crescono in modo simile alla successione dei valori della funzione stessa. Non c'è quindi speranza, andando avanti con le differenze successive, di trovare una colonna delle differenze che sia costante: in altri termini la crescrita esponenziale è qualcosa di molto diverso da una crescita polinomiale, qualunque sia il grado del polinomio considerato.

Nostri eventuali dubbi dopo le diverse attività:

Scheda 7. Modelli quadratici continui

(Attività da svolgersi parte in classe, in gruppo e parte a casa Tempo previsto: 8 ore in classe)

1. (attività di gruppo). Avete visto che se un corpo si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante v, la sua posizione s, in un fissato sistema di riferimento, è data, al variare del tempo t, dalla legge oraria $s = s_0 + v*(t - t_0)$, ove $s0$ e $t0$ dipendono dal sistema di riferimento scelto (s_0 è la posizione che il corpo ha all'istante t_0 nel sistema di riferimento scelto). Che tipo di legge è quella che esprime il variare della posizione nel tempo di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato?

Riflettete sul fatto che l'accelerazione è una variazione di velocità nel tempo. Ciò vuol dire che l'accelerazione media di un corpo in un dato intervallo Δt è data dal rapporto tra la variazione di velocità Δv del corpo nell'intervallo di tempo considerato e l'intervallo stesso. In simboli, $a = \Delta v/\Delta t$.
Poiché il moto è uniformemente accelerato, l'accelerazione è costante, quindi $\Delta v = a\, \Delta t$ con a costante.
Ciò equivale a dire che la legge oraria della velocità (che esprime la variazione della velocità rispetto al tempo), in un moto uniformemente accelerato, è lineare: la velocità varia linearmente nel tempo:
$v = v_0 + a(t - t_0)$, ove si è indicato Δv con $v - v_0$ e Δt con $t - t_0$.

Potete risalire, avendo la legge oraria della velocità a quella della posizione?
Potreste iniziare a riflettere sul fatto che, poiché la velocità varia linearmente nel tempo, dopo un intervallo di tempo Δt, il corpo avrà percorso uno spazio Δs uguale a quello che avrebbe percorso, nello stesso intervallo di tempo, un corpo che si fosse mosso con una velocità costante uguale alla media aritmatica delle valocità iniziale e finale del corpo nell'intervallo Δt.
In simboli, in un intervallo di tempo Δt, il corpo avrà percorso uno spazio
$\Delta s = v_m \Delta t$ ove $v_m = (v + v_0)/2$ Quindi

$$\Delta s = (v + v_0)/2 * \Delta t$$

Sostituite ora alla variabile v l'espressione $v_0 + a * \Delta t$ .... che cosa ottenete?
Indicando Δs con $s - s_0$ e Δt con $t - t_0$
dovreste ottenere la legge oraria con cui varia la posizione di un corpo (in un determinato sistema di riferimento) che si muove di moto uniformemente accelerato:

$$s = s_0 + v_0 * (t - t_0) + 0.5\, a(t - t_0)^2$$

La posizione di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato è quindi una funzione quadratica del tempo. Il suo grafico sarà quindi una parte di parabola!

Eventuali punti che non abbiamo compreso o eventuali dubbi nati nella lettura di quanto scritto finora in questa scheda

2. (da svolgere in gruppo) Un corpo viene lanciato da terra, verso l'alto con una velocità iniziale di 5 m/s. Trascurando gli attriti e tenendo conto solo dell'accelerazione di gravità (approssima il suo valore, in modulo, a 9.8 m/s^2), dopo quanto tempo il corpo raggiungerà la massima altezza? In che posizione si troverà (rispetto al sistema di riferimento scelto) dopo 0,1s? E dopo 0,4 s? E dopo 0,8 s? Quale sarà la velocità del corpo dopo 0,1s? E dopo 0,4s? E dopo 0,5s? E dopo 0,7 s? Dopo quanti scondi passerà per la posizione 1m? E per la posizione 0,7 m? Che velocità avrà il corpo nel momento in cui cade nuovamente a terra? Giustificate le risposte.

Le nostre risposte

3. Lo spazio di arresto di un'automobile (attività da svolgersi parte in classe e parte a casa)

Lo spazio di arresto di un'autovettura è determinato da due grandezze: lo spazio che si percorre prima di iniziare la frenata, dato dalla velocità a cui si viaggia per il tempo di reazione, e lo spazio di frenata.

Naturalmente questi dati cambiano al variare delle condizioni dell'asfalto, delle condizioni ambientali, dell'autista, del modello dell'autovettura e delle loro condizioni.
Immaginiamo che si viaggi con una particolare autovettura a una velocità costante di *v* m/s e che il tempo di reazione sia di 0,8 s (i tempi di reazione variano in genere tra 0,5 s e 1,5s; noi abbiamo scelto un tempo di reazione medio).

Lo spazio che si percorre prima di iniziare la frenata è dato dal prodotto fra la velocità *v* supposta costante e il tempo di reazione (0,8s)

Supponiamo anche che la decelerazione media garantita dall'autovettura in questione sia di $9 m/s^2$ e che le condizioni dell'asfalto siano tali da ridurre questa decelerazione del 30% (quindi la decelerazione, supposta costante, è ………….)
In base a questi dati, quanto è lo spazio di frenata può essere calcolato utilizzando le due leggi orarie del moto uniformemente accelerato (dove si è considerato $t_0 = 0$):

$s = v_0 t - 3 t^2$

$v_f = v_0 - 6t$

Ma $v_f = 0$, dato che ci interessa quando la macchina si ferma e $v_0 = v$, nel nostro caso.
Quindi

$t = v/6$

e, quindi

$s = v^2 / 12$

Lo spazio totale di frenata è quindi dato da

$s_{tot} = 0,8\, v + v^2 / 12$

Costruite con TI - InterActive! un foglio elettronico che riporti:
a) nella prima colonna la velocità in m/s (a partire da 5m/s fino a 50 m/s)
b) nella seconda colonna la velocità in km/h
c) nella terza colonna lo spazio totale di frenata
d) nella quarta colonna le differenze prime degli spazi
e) nella quinta colonna le differenze seconde degli spazi

Il foglio elettronico richiesto:

4. (da svolgere a casa, in gruppo, anche mediante collaborazione a distanza) Commentate la tabella ottenuta nel precedente foglio elettronico, aiutandovi anche con l'articolo "La percezione del rischio e il rischio della percezione": il caso della sicurezza stradale di Franco Taggi e Pietro Maturano disponibile all'indirizzo
http://www.iss.it/sitp/sicu/publ/0003/0040.pdf ,
ma che potete leggere anche ciccando sull'hotword spazio di frenata .

I nostri commenti

5. (da svolgere a casa, individualmente). Sui manuali di scuola guida si dice che lo spazio totale di arresto può essere calcolato approssimativamente dividendo la velocità in km/h per 10 ed elevando il risultato al quadrato. Questa formula è coerente con i dati presenti nella tabella del foglio elettronico? Come può essere ricavato dalle formule che hai utilizzato nell'attività?

La mia risposta

6. (attività individuale). Collegati al sito
http://www.sicurauto.it/consiglisicurauto/distanzadisicurezza.php
e, se la pagina è ancora accessibile e si parla di spazio di frenata, prova a leggerla con attenzione e a vedere se tutto quello che c'è scritto ti è del tutto chiaro.

Eventuali dubbi o parti che devono essere chiarite

7. Un problema di massimo con Cabri géomètre (Attività da svolgersi a coppie in laboratorio di informatica)
Considerate tutti i rettangoli di perimetro fissato e uguale a 12. Che cosa si può dire della loro area? Provate a discutere una decina di minuti con il vostro compagno o con la vostra compagna di banco.

Il risultato della discussione

Cliccando sull'hotword rettangoli isoperimetrici puoi esplorare, nel file di cabrijava che abbiamo costruito, come varia l'area dei rettangoli di perimetro 12.

Potete costruire voi stessi il file in Cabri II o Cabri II plus, se disponete di tali software, seguendo le seguenti indicazioni. La costruzione utilizza tecniche simili a quelle viste per costruire il grafico di una funzione quadratica in Cabri. Cercate di diventare padroni di tali tecniche, perché potrebbero esservi piuttosto utili in seguito.

Indicazioni per la costruzione:
dopo aver costruito il segmento AB, preso su di esso un punto P, costruito i segmenti AP, PB e determinato le misure di AP, PB e AB:
a) tracciare la semiretta di origine A su cui trasportare la misura di AP
b) tracciare la perpendicolare ad AP per P
c) tracciare la semiretta di origine P giacente sulla perpendicolare tracciata in b) e poi trasportare su di essa la misura del segmento PB,
d) tracciare la perpendicolare per B a PB
e) tracciare la perpendicolare per A ad AP
f) segnare il punto Q di intersezione delle due rette costruite in d) e in e)
g) costruire, con il menu "poligono", il poligono APBQ che, per la costruzione effettuata, è un rettangolo
h) nascondere tutti gli oggetti tranne i segmenti AB, AP e PB e il rettangolo APBQ
i) colorare il rettangolo con lo strumento "riempimento"

Se volete accedere direttamente al file in Cabri II cliccate sull'hotword rettangoliisoperimeticiincabrill
Se volete accedere direttamente al file in Cabri II plus, cliccate sull'hotword rettangoliisoperimetricicbriplus

Dopo le vostre iniziali riflessioni e dopo l'esplorazione effettuata con Cabri srete sicuramente convinti che il rettangolo di area massima, fra tutti i rettangoli di perimetro 12 è il quadrato ... ma perché? Dovete cercare ora di giustificare la risposta, ossia spiegare perché ciò che avete osservato in Cabri funziona.
Attenzione: la domanda che vi stiamo ponendo è molto delicata e di fondamentale importanza: capire il senso della domande del tipo
"perché ciò che ho osservato e di cui sono convinto al di là di ogni ragionevole dubbio è vero?"
è fondamentale per comprendere come si organizza, si richiama e si comunica la conoscenza matematica. Discutete nel vostro gruppo il significato di tale domanda; confrontate le vostre opinioni e i vostri tentativi di spiegare *perché* il quadrato è il rettangolo di area massima con quelle degli altri gruppi di lavoro e seguite con attenzione, in seguito, i primi chiarimenti che l'insegnante vorrà fornirvi.

Le nostre risposte

Le nostre risposte dopo il confronto con altri gruppi di lavoro

Le nostre risposte dopo i chiarimenti dell'insegnante.

8. (attività da svolgere in gruppo, in classe) Sia dato un segmento AB di lunghezza fissata. Prendete su AB un punto C e costruite su AC e su CB due quadrati di lati, rispettivi, AC e CB. Che cosa si può dire dell'area e del perimetro della figura formata dai due quadrati? Giustificate le risposte.

La nostra risposta

Scheda 8. Sistemi dinamici discreti non lineari

(Attività da svolgersi in classe, in gruppo, sotto la guida dell'insegnante. Tempo previsto: dalle 3 ore alle 8 ore, a seconda che si scelga o meno di fare le attività 5 e 6)

1. (A coppie). Riprendete in considerazione e descrivete alcuni modelli già visti in precedenza, in particolare:

a) reazione nucleare non controllata

b) crescita di una popolazione cellulare per scissione in assenza di limitazioni di risorse

c) interesse composto

Modello per la situazione a)

Modello per la situazione b)

Modello per la situazione c)

2. (A coppie) Quali sono i limiti di questi modelli? Come evolve in realtà un'epidemia? Una "catena di Sant'Antonio"?

La nostra risposta

3. (In piccoli gruppi). Dopo aver confrontato le risposte date nei due precedenti esercizi, provate ad affinare il modello: non considerate più costante il tasso di crescita, ma consideratelo una funzione del numero di individui presenti. Naturalmente il tasso di crescita deve soddisfare due condizioni:
a) quando il numero di individui è molto piccolo, il tasso di crecita deve avere un valore molto vicino al valore del tasso di cerscita in assenza di limitazione di risorse;
b) all'aumentare del numero di individui, il tasso di crscita deve diminuire, fino a diventare zero (crescita zero) quando il numero di individui ha raggiunto il massimo sopportabile dall'ambiente.
Cercate di dare una spiegazione del perché le due condizioni precedenti sono ragionevoli. Indicate una semplice funzione decrescente che soddisfi entrambe le condizioni. Usate quindi questa funzione per rappresentare il tasso di crescita.

La nostra risposta

La nostra risposta dopo il confronto con altri gruppi

La nostra risposta dopo gli eventuali suggerimenti dell'insegnante

4. (In piccoli gruppi) Considerate il seguente modello che descrive l'evoluzione di una popolazione. In effetti, la variabile $x(n)$ rappresenta il rapporto tra il numero di individui presenti all'osservazione n e il numero massimo di individui che si stima possano vivere in quell'ambiente. In altri termini, detto $p(n)$ il numero di individui presenti all'osservazione n e k il numero massimo di individui che si stima la popolazione possa raggiungere, $x(n) = p(n) / k$. Ciò, naturalmente, equivale a dire che $x(n) =< 1$.

$x(n+1) = r * x(n)*(1 – x(n))$ con $0 =< x =< 1$, $x(0) = a$

Possiamo notare che la funzione che esprime $x(n+1)$ in funzione di $x(n)$ è di secondo grado:

$f(x) = r\, x\, (1 – x)$

(x, come già detto, rappresenta il rapporto fra il numero di individui e la capacità massima sopportabile dall'ambiente, ossia il numero massimo di individui che si ritiene l'ambiente possa sopportare; r è proporzionale alla velocità di riproduzione in assenza di limitazione di risorse).

Abbiamo già visto che i modelli rappresentati da una funzione lineare del tipo $x(n +1) = a*x(n) + b$ o divergono o convergono a un unico valore ricavabile dall'equazione $x = a*x + b$.

Nel caso
$x(n+1) = r * x(n)*(1 – x(n))$ con $0 =< x =< 1$, $x(0) = a$
la dipendenza tra $x(n+1)$ e $x(n)$ è di tipo quadratico. A vostro avviso anche in questo caso si può dire che la successione o diverge o converge a un unico valore? Fate un po' di prove modificando i vari parametri, aiutandovi con TI-InterActive! o un altro software di manipolazione simbolica.
Che cosa scoprite? Riportate i risultati della vostra esplorazione.

I risultati della nostra esplorazione

5. (Attività in piccoli gruppi). Per vrificare l'attendibilità e la significatività delle vostre esplorazioni e osservazioni, aprite Graphic Calculus, cliccate su Graphic Calculus plus e poi su CobWeb methods; scegliete quindi la finestra di default che vi viene proposta (assi x,y) e digitate, nella formula, l'espressione r*x*(1– x). Quindi definite *r* come parametro (per esempio assegnandogli come intervallo di variazione l'intervallo 0.1 ; 4.).
Definite infine la finestra grafica in [0; 1] X [0; 1].
Graphic Calculus disegnerà l'arco di parabola y= r*x*(1– x) per 0 =< x =< 1 e, con il cursore, potete modificare il parametro *r* da 0.1 a 4, ottenendo così diversi grafici. Graphic Calculus disegna anche la bisettrice del primo e terzo quadrante *y* = *x*.
Che cosa rappresentano, secondo voi, i punti di intersezione tra la parabola y= r*x*(1– x) e la bisettrice y = x? (Suggerimento: per trovare il valore a cui convergeva la successione x(n+1) = a*x(n)+b, ponevate x(n+1)=x(n)=x ...)

La nostra risposta

La nostra risposta dopo un confronto con quelle fornite dai nostri compagni

Provate ora a effettuare diverse prove; innanzitutto attivate anche la finestra "Time graph" (nono bottone del menu a icone) che, nonostyante indichi sempre y e x sugli assi, dà l'evoluzione nel tempo della successione, ossia coma veria x(n) al variare di n. In seguito esplorate la situazione, per esempio dando a *r* valori nei seguenti intervalli:

r =< 1 con diversi valori del passo iniziale u(0), ossia x(0) (sempre compresi tra 0 e 1)

1 < r < *2* con diversi valori del passo iniziale u(0), ossia x(0) (sempre compresi tra 0 e 1)

2=<*r* =< 2.6 con diversi valori del passo iniziale u(0), ossia x(0) (sempre compresi tra 0 e 1)

2.7 = < *r* < 4 con diversi valori del passo iniziale u(0), ossia x(0) (sempre compresi tra 0 e 1)

I risultati delle nostre osservazioni (precisate anche che cosa rappresentano le due finestre grafiche che avete attivato)

Sicuramente avrete notato che la situazione, oltre a dipendere, ovviamente, da x(0) e da *r*, è molto, molto più complicata di quanto non accada con le successioni in cui x(n+1) dipende linearmente da x(n). I sistemi dinamici discreti di secondo grado, il primo livello di non linearità, sono già tremendamente complicati eppure importanti, se si vogliono utilizzare modelli che consentano di descrivere meglio (e quindi di predire meglio) quel che accade in situazioni reali.

6. (da svolgere in gruppo, parte in classe e parte a casa).
Collegatevi al sito internet http://www.arcytech.org/java/population/
nel quale vengono proposte approfondite considerazioni sui modelli di crescita di una popolazione, sia in caso di risorse limitate, che in caso i risorse illimitate.
Leggete con attenzione il contenuto delle varie pagine e costruite, alla fine, una sintesi di ciò che avete capito

La nostra sintesi

Eventuali dubbi

6. (Discussione alla presenza di tutta la classe). Seguite con attenzione la discussione guidata dal vostro insegnante sulle precedenti attività.

Le mie idee sui sistemi dinamici discreti non lineari dopo le spiegazioni dell'insegnante

Le attività di esplorazione, scoperta e costruzione di significato relative alle funzioni quadratiche dovrebbero essere completate. Segue ora un'attività di sistemazione, formalizzazione e consolidamento delle conoscenze e tecniche apprese che devi compiere per la maggior parte del tempo individualmente, consultandoti con tuoi compagni o tue compagne solo dopo aver riflettuto bene sui chiarimenti di cui pensi di aver bisogno. Lo stesso vale per le richieste di precisazione e spiegazione che vuoi porre all'insegnante: cerca di chiarire bene che cosa e perché vuoi chiedere. Naturalmente devi chiedere aiuto se qualche passo del riassunto e della sistemazione non ti fosse chiaro o non riuscissi a svolgere qualche esercizio di consolidamento.
Ti consigliamo di rispondere prima al test di autovalutazione per vedere se hai acquisito le conoscenze e le tecniche fondamentali, quelle necessarie per proseguire nelle lezioni. In seguito passerai alla sistemazione e agli esercizi di consolidamento. Ricorda inoltre che le schede e le attività che hai svolto sono sempre un punto di riferimento importante per il tuo studio, per l'attività di sistemazione, per quella di ripasso e consolidamento e anche per quella di recupero (nel caso tu sia piuttosto disorientata o disorientato, ti consigliamo di riprendere con attenzione tutte le attività già svolte)

Riassumendo e sistematizzando

Test di autovalutazione

Esercizi di consolidamento

Esempi di verifiche