Corso introduttivo alla geometria e alla dimostrazione

Nome e cognome dei componenti del gruppo che svolge le attività di gruppo di questa lezione

Nome e cognome dei componenti della coppia che svolge le attività di coppia di questa lezione

Nome e cognome della studentessa o dello studente che svolge le attività individuali di questa lezione

Prerequisiti per la prima lezione del corso introduttivo alla geometria

Non ci sono particolare prerequisiti, ma tutto ciò che ricordi della geometria studiata nella scuola media potrà esserti utile.

Lezione 1 - Il problema del definire e del dimostrare. Una prima riflessione (si prevedono circa 15 ore di lavoro in classe)

Premessa

Nella scuola elementare e nella scuola media hai imparato tante conoscenze che riguardano lo studio delle figure. Probabilmente sai che cosa sono un triangolo isoscele, un rettangolo, un rombo;ricorderai le formule che consentono il calcolo della loro area. Forse ricorderai che cosa vuol dire che due rette sono parallele, oppure perpendicolari, o, ancora, che cosa si intende quando si dice che un quadrato ha quattro assi e un centro di simmetria. Sei quindi in una situazione molto simile a quella in cui si trovavano i geometri greci prima che Euclide scrivesse il suo libro "Elementi": come i geometri greci prima di Euclide, anche tu hai molte conoscenze geometriche e spesso sai applicarle per risolvere problemi. Quello che, molto probabilmente, ti manca è l'organizzazione di queste conoscenze in una struttura sistematica, nella quale siano precisati alcuni concetti e alcune proposizioni di partenza, scelte come base della struttura e a partire dalle quali sia possibile ottenere ogni altra conoscenza ritenuta importante e significativa. In altri termini, le tue conoscenze non sono ancora organizzate in una *teoria*. Con le lezioni di questo percorso introduttivo di geometria ci proponiamo di avviarti gradualmente al sapere teorico, cercando di aiutarti a comprendere e ad apprezzare soprattutto la funzione che una teoria ha nello spiegare *perché* valgono le proprietà che si osservano in una situazione geometrica.

In queste lezioni farai un uso costante di un software di geometria, Cabri géomètre, che ti aiuterà notevolmente nella fase di osservazione, di scoperta, di produzione di congetture e in quella successiva di controllo di plausibilità delle congetture prodotte. Cabri, quindi, ti aiuterà a *vedere* la geometria e a convincerti che ciò che hai osservato è corretto. Cabri, però, non potrà spiegarti *perché* le congetture che hai prodotto funzionano: una risposta esauriente a domande del tipo "perché è così" può essere data solo in una teoria. La teoria che gradualmente costruiremo ha quindi la funzione di aiutarti a rispondere a domande del tipo "perché è così?" dopo che ti sarai convinto che le cose stanno proprio così.

AVVERTENZA: le hotword rimandano a file che sono stati costruiti sia in cabri II (ma bisogna possedere la licenza del software o una demo) sia in cabrijava (sono esplorabili con un qualuque browser). Se possedete la licenza del software, cliccando sui link "filecabri", potrete intervenire e poi salvare le operazioni effettuate sui fogli di lavoro. Se non possedete òla licenza del software, né una versione demo, cliccat sui link che rimandano ai file di cabrijava, esplorabili con un qualunque browser.

Scheda 0 Classficazioni di quadrilateri

Tempo da dedicare all'attività della scheda 0, compresa la lezione di sistemazione: 4 ore

Attività 1 (a coppie o in piccoli gruppi)

Suddividetevi in coppie o a gruppi di tre per il lavoro in laboratorio di informatica con Cabri géomètre. Fate in modo che in ogni coppia o in ogni gruppo vi sia almeno un componente che abbia già utilizzato Cabri géomètre o che sia abbastanza abile con il computer.

Su cinque fogli diversi di Cabri géomètre costruite:
a) un rettangolo
b) un parallelogramma
c) un quadrato
d) un rombo
e) un trapezio

Descrivete quali proprietà delle figure avete utilizzato per costruirle.

La nostra descrizione delle costruzioni effettuate

Ora prestate bene attenzione: costruire una figura con Cabri vuol dire che, comunque si trascinano i punti liberi, quella figura mantiene le proprietà che la caratterizzano. Ciò vuol dire, per esempio, chese pensate di aver costruito un rettangolo, non è sufficiente che la figura che avete disegnato in Cabri sembri un rettangolo in una particolare configurazione. Muovendo i punti liberi deve continuare a essere un rettangolo, ossia ad avere gli angoli retti.
Per esempio, se cliccate sull'hotward quadrilatero e rettangolo troverete due

figure che sembrano due rettangoli. Una di esse, però, trascinando i vertici si deforma: i suoi angoli non rimangono retti. Invece l'altra, comunque si trascinino i vertici liberi A e B e il vertice C, mantiene la forma di rettangolo. In casi come questi diciamo che la prima figura non è un rettangolo, mentre la seconda sì.

quadrilatero e rettangolo (cabri)

quadrilatero e rettangolo (cabrijava)

Per vedere se effettivamente avete costruito i quadrilateri particolari che vi abbiamo chiesto di costruire in ogni foglio, dovreste sottoporre le figure al "test del trascinamento", ossia trascinare i vertici liberi e verificare che mantengano quelle particolari proprietà le caratterizzano come figure.
Fate molta attenzione a questo punto: un quadrato, un rombo, un trapezio, un parallelogramma, per essere considerati veramente tali devono resistere al test del trascinamento. Ciò vuol dire che, comunque si trascinino i vertici che è possibile muovere, quelle figure devono rimanere, rispettivamente, quadrati, rombi, trapezi parallelogrammi. Se una figura non regge al test del trascinamento, ossia le sue proprietà caratteristiche non si mantengono trascinando i vertici liberi, non potete considerare quella figura ben costruita.

Partiamo dalla figura con meno proprietà: il trapezio. Per costruire un trapezio dobbiamo innanzi tutto chiederci quale proprietà vogliamo considerare fondamentale per caratterizzare i trapezi. Ciò equivale a dire che dobbiamo *definire* il trapezio. La definizione deve consentire di individuare, nell'insieme dei quadilateri (ossia dei poligoni del piano con quattro lati e quattro vertici) tutte e sole quelle che sono trapezi.
Quando si definisce si è abbastanza liberi: si ha un vincolo necessario che è quello di non cadere in contraddizione (per esempio non definire oggetti impossibili) e un vincolo meno forte che è quello di caratterizzare le figure in base a proprietà che si considerano significative. Spesso i quadrilateri vengono definiti in base a proprietà che riguardano l'uguaglianza di lati o angoli, oppure il parallelismo o la perpendicolarità dei lati (in genere si preferisce utilizzare il termine congruenza per indicare l'uguaglianza di oggetti geometrici. Per ora consideriamo i termini uguaglianza e congruenza come sinonimi e quindi puoi usare quello che preferisci).
Possiamo quindi provare a definire il trapezio come un quadriletro che ha due lati paralleli.

Domanda Prestate bene attenzione: "due lati paralleli" vuol dire "solo due lati paralleli" o "almeno due lati paralleli"?
Se non si precisa si rischia di essere ambigui.

Noi pensiamo che "due lati paralleli" voglia dire:

Su alcuni libri di testo si sceglie la prima formulazione:
un trapezio è un quadrilatero che ha solo due lati paralleli

Su altri libri di testo si sceglie la seconda fomulazione:
un trapezio è quadrilatero che ha almeno due lati paralleli.

Attività 2 (in piccoli gruppi). Provate ad aprire il seguente file (scegliete cabri o cabrijava a seconda se disponete o non disponete di una copia del software Cabri gémètre) e dite se, secondo voi, chi ha costruito il file ha optato per la prima o per la seconda formulazione

trapeziocabri

trapeziocabrijava

A nostro avviso chi ha costruito il file ha optato per la seguente definizione di trapezio:

infatti:

Esplorando il file abbiamo notato le seguenti proprietà di un trapezio (oltre al parallelismo delle basi)

La costruzione del file è stata così effettuata:
segmento AB
punto D
retta per D parallela ad AB
punto C sulla retta per D parallela ad AB
segmento CD
segmento AD
segmento BC
nascondi retta per P parallela ad AB
misure varie

Scegliamo la seguente definizione di trapezio:
si dice trapezio ogni quadrilatero che ha almeno due lati paralleli (detti basi)

Vediamo ora la definizione di parallelogramma. Come dice la parola stessa, un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati paralleli a due a due (ovviamente si tratta delle coppie di lati opposti).
Potremmo anche dire che

si dice parallelogramma ogni trapezio che ha due coppie di lati paralleli.

In questo modo si capisce che ogni parallelogramma è un caso particolare di trapezio.

Attività 3 (in piccoli gruppi) Potete esplorare le proprietà di un parallelogramma aprendo uno dei due seguenti file:

parallelogrammacabri

parallelogrammacabrijava

Proprietà di cui gode un parallelogramma (che abbiamo notato durante l'esplorazione):

Domanda **Naturalmente dovreste avere notato che tutte le proprietà che valgono per i trapezi valgono anche per i parallelogrammi. Perché?**

La nostra risposta

La costruzione del file è stata effettuata così:
segmento AB
segmento AD
parallela per D ad AB
parallela per B ad AD
intersezione (C) tra la parallela per D ad AB e la parallela per B ad AD
segmenti CD e BC
nascondi rette parallele
misure varie

Attività 4 **(a coppie) Provate ora a costuire voi stessi un rettangolo (ossia un parallelogramma che ha tutti e i quattro angoli retti) con Cabri géomètre e poi esplorate le proprietà di cui gode un rettangolo. Se non disponete di Cabri gèomètre, aprite, per l'esplorazione, il seguente file di Cabrijava**

rettangolocabrijava

Il risultato della nostra esplorazione

Domanda: **Abbiamo detto che un rettangolo è un parallelogramma che ha tutti gli angoli retti. Avremmo potutto definire il rettangolo come un parallelogramma che ha un angolo retto? Perché?**

La nostra risposta

Vediamo ora come è possibile costruire un rombo.
Definiamo il rombo come un parallelogramma che ha tutti i lati uguali.
Possiamo quindi effettuare la seguente costruzione:

segmento AB
circonferenza di centro A e raggio AB
punto D sulla circonferenza
segmento AD
parallela per D al segmento AB
parallela per B al segmento AD
intersezione C tra le due parallele precedenti
segmento DC
segmento CB
nascondi circonferenza
nascondi rette parallele
misure varie

Attività 5 **(individuale, a casa) Apri ora uno dei due seguenti file e fai le esplorazioni opportune per riscoprire le varie proprietà del rombo.**

rombocabri

rombocabrijava

Il risultato delle nostre esplorazioni. Le proprietà del rombo sono le seguenti:

Nota che la circonferenza di centro A e raggio AB ha avuto lo scopo di costruire un segmento AD uguale ad AB. La costruzione seguente ha semplicemente chiuso un parallelogramma avente due lati consecutivi uguali. Quindi abbiamo utilizzato la circonferenza come un vero e proprio compasso.

Domanda: Avresti potuto definire il rombo come un parallelogramma che ha due lati consecutivi uguali? Perché?

La mia risposta

Attività 6 (a coppie) Provate ora a costuire voi stessi un quadrato (ossia rombo rettangolo, che ha quindi lati uguali e angoli retti) con Cabri géomètre e poi esplorate le proprietà di cui gode un quadrato. Se non disponete di Cabri gèomètre, aprite, per l'esplorazione, il seguente file di Cabrijava

quadrato

Il risultato della nostra esplorazione

Domanda: **È possibile definire il quadrato come un rettangolo avente due lati consecutivi uguali? O come un rombo avente un angolo retto? Perché?**

La nostra risposta

Domanda: **È vero che un quadrato gode di tutte le proprietà di un rombo e di tutte quelle di un rettangolo? Perché?**

La nostra risposta

Rispondete ora alla seguente domanda:

Come definite un trapezio isoscele?

Risposta

Confrontate la vostra risposta con quella fornita da altri gruppi di lavoro. Qualche gruppo ha sicuramente scritto che un trapezio isoscele è un quadrilatero avente due lati obliqui uguali.
È vero che ogni trapezio isoscele ha due lati obliqui uguali, ma non è possibile prendere questa proprietà come definizione di trapezio isoscele. Infatti abbiamo detto che un parallelogramma è un particolare trapezio (ha infatti due lati paralleli). Inoltre un parallelogramma ha due lati uguali e, quindi sarebbe un trapezio isoscele. Qui nasce un grosso problema, perché le scelte compiute portano a una contraddizione. Infatti abbiamo ogni parallelogramma, in base alle definizioni date è un trapezio isoscele. Questo vuol dire che tutte le proprietà di cui gode un trapezio isoscele devono essere godute anche dai parallelogrammi. Purtroppo, però, un trapezio isoscele ha un asse di simmetria, mentre un parallelogramma ha solo un centro, ma non un asse di simmetria (per convincervi di tale fatto aprite una delle due seguenti figure ed esploratela).
nosimmetriacabri

nosimmetriacabrijava

Come abbiamo detto prima, si può essere abbastanza liberi nell'attività di definire, ma non si può cadere in contraddizione. Quindi siamo obbligati a scegliere un'altra definizione per il trapezio isoscele: non un trapezio con i due lati obliqui uguali, ma un trapezio che ha le diagonali uguali, oppure un trapezio che ha gli angoli alla base uguali o, ancora, un trapezio che ha un asse di simmetria. Queste, infatti, sono proprietà che non valgono per ogni parallelogramma e, quindi, non generano contraddizioni.
Naturalmente sarà poi possibile dimostrare che un trapezio isoscele (ossia un trapezio con le diagonali uguali) ha anche i lati obliqui uguali, ma il fatto di non utilizzare la proprietà dell'uguaglianza dei lati obliqui come proprietà definitoria (ossia che definisce il trapezio isoscele) consente di evitare di considerare il parallelogramma come un particolare trapezio isoscele e, quindi, evita la contraddizione.

Attività 7 (individuale da svolgersi a casa).
Abbiamo parlato di simmetria. Prova a classificare i quadrilateri in base alle simmetrie di cui godono.

La mia risposta

Attività 8 (individuale da svolgersi a casa).

Esplora nuovamente le precedenti figure dei quadrilateri particolari ponendo attenzione ai movimenti concessi a ciascuno dei loro vertici.

In un quadrilatero generico puoi spostare ovviamente un qualunque vertice in una qualunque posizione del piano. Non ci sono limitazioni al movimento di ciascun vertice. Poiché un punto è individuato nel piano da una coppia ordinata di numeri reali (dette ascissa e ordinata), possiamo dire che un punto che si può muovere senza limitazioni ha sia l'ascissa, sia l'ordinata libere di assumere qualunque valore, indipendentemente l'una dall'altra. Diciamo che un punto di questo tipo ha due gradi di libertà. Un quadrilatero generico ha ciascun vertice con due gradi di libertà, quindi in totale diciamo "otto gradi di libertà". E un trapezio? Nella figura che hai a disposizione e che hai già esplorato, i punti A, B e D hanno due gradi di libertà ciascuno. Invece il punto C, come puoi notare, è vincolato a muoversi solo orizzontalmente, sul segmento DC. Quindi ha un solo grado di libertà. Il trapezio è quindi un quadrilatero con sette gradi di libertà.

Esplora i file che riportano la costruzione ei vari quadrilateri e classifica i quadrilateri in base ai loro grdi di libertà. Nota che, in base a questa classificazione, non è possibile distinguere tra rombo e rettangolo.

La mia classificazione delle figure in base ai gradi di libertà

Seguite ora con attenzione la lezione di sistemazione dell'insegnante, in particolare alle riflessioni che farà sull'azione del definire e sul ruolo delle definizioni.

Ciò che non abbiamo capito al termine di questa attività

Scheda 1 Un primo problema aperto. Il parallelogramma di Varignon

Tempo da dedicare all'attività della scheda 1, compresa la lezione di sistemazione: 3 ore

Attività 1 (a coppie)
Considerate un quadrilatero ABCD e i punti medi: M, del lato AB; N del lato BC; P del lato CD; Q del lato DA.
Congiungete ora i punti N, M, P,Q e considerate il quadrilatero NMPQ. Che cosa potete dire delle proprietà di tale quadrilatero al variare di ABCD?
Vi chiediamo di eslorare la situazione o costruendo voi stessi il file con Cabri o, se non avete il software a disposizione, aprendo il file di cabrijava (cliccando sull'hotword che segue). In entrambi i casi richiediamo una risposta articolata per ogni congettura che produrrete, secondo lo schema di seguito riportato (da ripetere per ogni congettura prodotta).

varignonjava

La nostra risposta:

Prima congettura prodotta:

Descrizione delle modalità di esplorazione che hanno portato alla produzione della prima congettura:

Modalità di validazione (verifica o confutazione) della congettura prodotta:

Spiegazione finale del perché la congettura vale:

Sicuramente, nell'esplorazione del file avrete notato che, al variare di ABCD il quadrilatero MNPQ varia e, facendo determinate ipotesi su ABCD, è possibile far sì che MNPQ goda di determinate proprietà.
Per esempio avrete notato che, quanto più ABCD assomiglia a un quadrato, tanto più anche MNPQ assomiglia a un quadrato. Questo fatto si vede chiaramente con Cabri! Il risultato di questa osservazione è la formulazione della congettura:

SE ABCD è un quadrato ALLORA MNPQ è un quadrato

Come potete vedere, abbiamo formulato la congettura in forma condizionale, ossia nella forma SE valgono certe condizioni (dette "ipotesi"), ALLORA possiamo affermare una ben determinata proposizione (detta "tesi").
È probabile che voi non abbiate formulato le vostre congetture nella forma
SE ..... ALLORA ....

Prima di proseguire nella lettura, vi invitiamo a farlo, esplicitando, per ogni congettura riformulata nella forma SE .... ALLORA.... ipotesi e tesi, come suggerito qui di seguito:

Se ABCD è un quadrato, allora MNPQ è un quadrato.
Ipotesi: AB=BC=CD=DA e ABC = BCD=CDA=DAB = 90° e AM=MB; BN=NC; CP=PD; DQ=QA
Tesi: MN=NP=PQ=QM e MNP=NPQ=PQM=QMN=90°

La riformulazione delle nostre congetture nella forma SE...ALLORA ... e l'esplicitazione, per ciascuna congettura, di ipotesi e tesi:

Come è possibile testare la validità della congettura prodotta?
La domanda può sembrare piuttosto curiosa . Infatti si vede chiaramente che, nel caso in cui ABCD sia un quadrato, MNPQ è anch'esso un quadrato. D'altra parte dovreste sapere bene che aver fatto in modo da far sembrare ABCD un quadrato non garantisce assolutamente che ABCD goda delle proprietà dei quadrati. Le "regole del gioco" che abbiamo stabilito dicono che ABCD è un quadrato solo se regge al test del trascinamento, ossia se ABCD continua a rimanere un quadrato comunque si sposti un suo vertice libero.
Quanto ora affermato suggerisce che, se si vuole testare la congettura con Cabri, sia sensato costruirsi un quadrato ABCD e poi verificare che MNPQ, comunque si spostino i vertici liberi, continua a essere un quadrato. Provate ad effettuare tale costruzione con Cabri o a aprire il file quadratovarignonjava e a esplorare la situazione.

quadratovarignonjava

Certamente ora sarete del tutto convinti e sicuri che la vostra congettura è corretta. Cabri vi ha consentito di verificarla al di là di ogni ragionevole dubbio. Potete averla verificata misurando lati e angoli o chiedendo, a Cabri, la verifica della proprietà di perpendicolarità. In ogni caso Cabri vi ha detto che la vostra congettura è corretta:
se ABCD è un quadrato, allora MNPQ è un quadrato
è stata validata con Cabri. Questo è un primo livello di giustificazione della validità della congettura: lo strumento che abbiamo deciso di utilizzare per lo studio delle figure geometriche, ossia un software di geometria dinamica, consente di dire che la congettura vale.

Provate a rivedere le vostre congetture alla luce di quanto abbiamo ora detto. Discutete nel vostro gruppo su quanto è stato detto ed esplicitate per scritto eventuali punti poco chiari.

Non abbiamo capito i seguenti punti:

Abbiamo quindi un'idea di come utilizzare Cabri o un altro software di geometria dinamica per effettuare esplorazioni, osservare dinamicamente come variano certe configurazioni geometriche, scoprire proprietà e formulare, nella forma condizionale, congetture, precisandone ipotesi e tesi. Abbiamo anche un'idea di come utilizzare Cabri o un altro software di geometria dinamica per validare le congetture prodotte (si costruisce una figura che soddisfi le ipotesi e poi, con lo strumento "misura" o con lo strumento "verifica di proprietà" di Cabri, si controlla che la tesi regga al test del trascinamento).

Dopo un lavoro di questo tipo possiamo dire che la congettura vale, ma possiamo anche dire "perché" vale? Abbiamo, cioè, una spiegazione che ci soddisfa pienamente del perché la congettura vale?

In matematica si considera veramente soddisfacente una spiegazione quando si struttura nella forma di una argomentazione che, tecnicamente, viene chiamata dimostrazione. Lo scopo della prossima attività sarà quella di lavorare proprio sul concetto di dimostrazione.
Ecco quello che dice sulle dimostrazioni un logico che lavora al dipartimento di matematica di Torino, Gabriele Lolli in un libro, QED, Fenomenologia della dimostrazione pubblicato nel 2005:

"Nulla è più importante in matematica delle dimostrazioni, e nulla paradossalmente è meno studiato. I matematici ne discutono in continuazione, le fanno, le giudicano, le confrontano, ne valutano i rispettivi meriti, ma manca una considerazione teorica [...] Non si sa neanche dare una definizione che accontenti tutti [...] Per studiare le dimostrazioni occorre per prima cosa avere presenti molti esempi."

Deve essere chiaro che si tratta di un concetto difficile e delicato, che può essere appreso solo gradualmente e attraverso un coinvolgimento forte nel lavoro che di seguito proponiamo.

Scheda 2 Perché se ABCD è un quadrato, allora MNPQ è un quadrato? Una prima riflessione sulle dimostrazioni

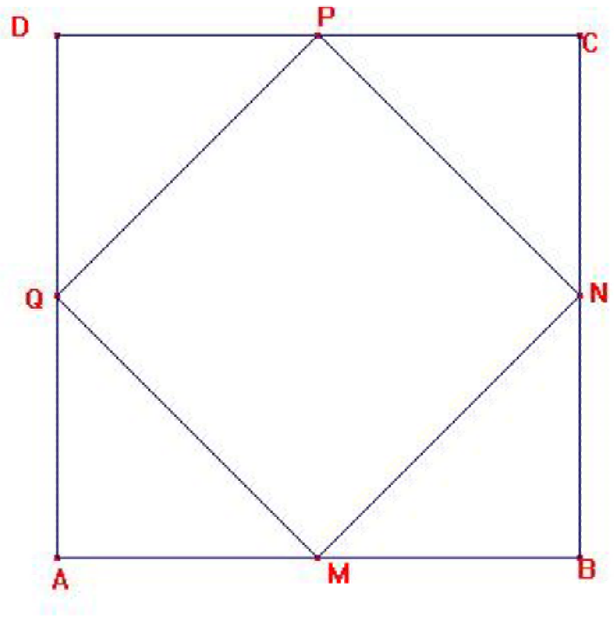
Tempo da dedicare all'attività della scheda 2, compresa l'attività di sistemazione dell'insegnante: 5 ore

Riprendiamo in considerazione la congettura
Se ABCD è un quadrato, allora MNPQ è un quadrato
precisandone ipotesi e tesi:

Ipotesi:
1. AB=BC=CD=DA
2. ABC = BCD=CDA=DAB = 90°
3. AM=MB; BN=NC; CP=PD; DQ=QA

Tesi: MN=NP=PQ=QM e MNP=NPQ=PQM=QMN=90°

Sappiamo che è vera e vogliamo spiegare perché.
Spiegare perché, in matematica vuol dire produrre un ragionamento che parte da alcune proposizioni assunte per buone e, utilizzando anche le ipotesi ed eventuali definizioni, giunge alla tesi.
Questo ragionamento è detto dimostrazione (la tesi è la proposizione da dimostrare).
In genere, per comunicare un dimostrazione in geometria ci si aiuta con una figura che rappresenti, senza aggiungere ipotesi, la configurazione descritta.



Per dimostrare la tesi abbiamo quindi bisogno di qualche proposizione messa a fondamento della teoria, che vogliamo via via costruire, e che consenta di ricavare (meglio dedurre) la tesi a partire dalle ipotesi fatte.

Nella scuola media avrete sentito parlare dei criteri di uguaglianza dei triangoli. Qui richiamiamo il primo, che metteremo a fondamento della nostra teoria. Il primo criterio di uguaglianza dei triangoli parte dalla considerazione che se di un triangolo ci vengono dati due lati e l'angolo fra essi compreso, noi siamo in grado di disegnare quel triangolo e solo quello. Ossia non ve ne sono altri con quelle caratteristiche.

Attività 1 (a coppie)

Per convincervi di tale fatto, potete esplorare la seguente figura di Cabrijava, dove vengono dati solo due lati e potete costruire con essi infiniti triangoli, proprio perché potete variare l'ampiezza dell'angolo compreso fra i due lati dati.
Nel file toverete oggetti verdi: sono quelli che dovete muovere per esplorare la situazione e osservare aspetti significativi per la teoria; oggetti rossi: sono gli oggetti che variano quando si muovono gli oggetti verdi; oggetti blu: sono i parametri del problema, ossia oggetti che non dipendono da quelli verdi e quindi non variano con essi. Variando i parametri si ottiene un problema dello stesso tipo di quello di partenza, ma con dati iniziali diversi.

duelatijava

Se ora aprite il seguente file di Cabrijava, dove è stato fissato l'angolo compreso tra i due lati assegnati, vedrete che il triangolo è unico (cambia solo la sua posizione).

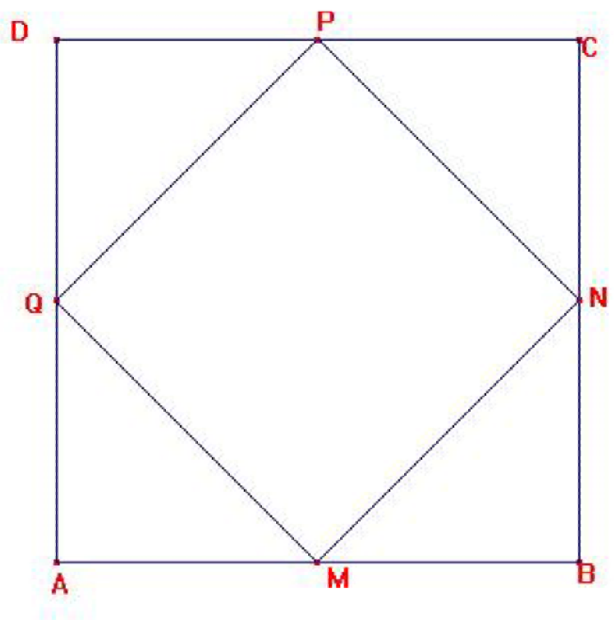
duelatieangolocompresojava

Il primo criterio di uguaglianza dice quindi che
SE
due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo fra essi compreso
ALLORA
i due triangoli sono uguali.

Questa proposizione viene messa a fondamento della teoria: si tratta di un assioma, ossia di una proposizione che non deve essere dimostrata, ma che, anzi, può essere utilizzata in una qualunque dimostrazione senza necessità di giustificarla.

Riprendete in considerazione la congettura da dimostrare:
Ipotesi:
1. AB=BC=CD=DA
2. ABC = BCD=CDA=DAB = 90°
3. AM=MB; BN=NC; CP=PD; DQ=QA

Tesi: MN=NP=PQ=QM e MNP=NPQ=PQM=QMN=90°



Ora considerate i due triangoli DPQ e PCN. Essi hanno:
DP = PC per l'ipotesi 3.
DQ = CN, perché DQ e CN sono rispettivamente le metà dei segmenti uguali DA e CB (ipotesi 1 e 3).
QDP = NCP per l'potesi 2.

Quindi i due triangoli sono uguali per il primo criterio di uguaglianza dei triangoli. In particolare. i due triangoli hanno uguali anche i lati PQ e PN.

Proseguite voi la dimostrazione dimostrando che PQ = QM e che QM = MN, prendendo come esempio la precedente dimostrazione.

Dimostriamo che PQ=QM

Dimostriamo che QM = MN

Siamo ora in grado, dopo aver dimostrato che PN = PQ; PQ = QM; QM = MN, di dire che MN=NP=PQ=QM, ossia di affermare la prima tesi?
Sì, basta assumere come assioma che
"se un segmento A è uguale a un segmento B e B è uguale a C, allora anche il segmento A è uguale al segmento C" (proprietà transitiva dell'uguaglianza).

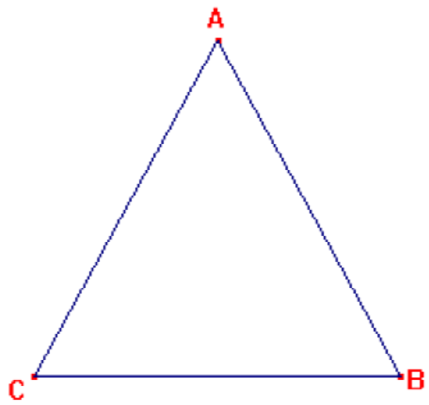
Nella dimostrazione abbiamo utilizzato anche un'altra proprietà che assumeremo come assioma:

"metà di segmenti uguali sono uguali".

Una volta che una congettura è stata dimostrata, ossia si è prodotta una dimostrazione che precisi come la tesi è legata alle ipotesi e alle proposizioni messe a fondamento della teoria (assiomi), essa assurge al rango di teorema.

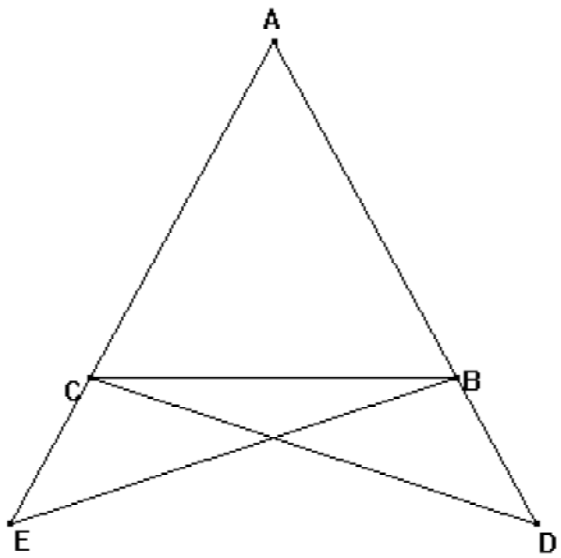
La dimostrazione della prima tesi consente di affermare che PQMN è un rombo, in quanto è un quadrilatero che ha tutti i lati uguali. Per affermare che PQMN è un quadrato dobbiamo dimostrare anche la seconda tesi, ossia che

MNP=NPQ=PQM=QMN=90°.
Per ottenere questa tesi dimostriamo innanzitutto che:
se un triangolo ABC è isoscele sui lati AB e AC, allora gli angoli alla base ACB e ABC sono uguali fra loro.



Ipotesi:
AC = AB
Tesi
ACB = ABC

Dimostrazione
Sulle rette individuate dai lati AC e AB, prolunghiamo i due lati AC e AB di due segmenti CE e BD fra loro uguali.



Questa costruzione consente di considerare i due triangoli così ottenuti AEB e ABD che hanno:
AE = AD (perché somme di segmenti uguali, per l'ipotesi e per la costruzione effettuata);
AC = AB, per ipotesi;
EAB=DAC perché in comune.
Quindi i due triangoli sono uguali per il primo criterio di uguaglianza e, in particolare, BE = CD e BEC = CDB.

Consideriamo ora i due triangoli ECB e DBC. Essi hanno:
EC=BD per costruzione;
BE = CD per la dimostrazione precedente;
BEC = CDB per la dimostrazione precedente.
Quindi i due triangoli sono uguali per il primo criterio di uguaglianza e, in particolare, ECB = DBC.

Ma ECB e DBC sono supplementari rispettivamente degli angoli ACB e ABC (ciò vuol dire che ECB + ACB = 180° e DBC + ABC = 180°). Quindi ACB e ABC possono essere visti come differenze di angoli uguali e, pertanto, sono fra loro uguali e ciò è proprio quanto volevamo dimostrare.

Notate che questa dimostrazione è piuttosto complessa: parte con una costruzione di cui solo alla fine si capisce l'utilità. Perché prolungare i lati AC e AB di due segmenti uguali? Per ottenere due triangoli cui poter applicare il primo criterio per dimostrarne l'uguaglianza e poi proseguire considerando altri due triangoli in modo da dimostrare, sempre applicando il primo criterio, l'uguaglianza di due angoli che sono supplementari di ACB e ABC, gli angoli che interessano la tesi. Questa dimostrazione veniva considerata, ancora in tempi relativamente recenti, il "pons asinorum", ossia il primo vero e proprio ostacolo necessariamente da affrontare e sorpassare per chi volesse avvicinarsi al concetto di dimostrazione. In questo corso non vogliamo mettere alcun "pons asinorum", ma è bene riguardare con calma e dedicare il giusto tempo alla riflessione su questa dimostrazione ...

Con il teorema appena dimostrato (in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono fra loro uguali) e con l'assioma che afferma che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, su cui ritorneremo più avanti, ma che dovresti già conoscere dalla scuola media, siamo in grado di completare la dimostrazione che PQMN è un quadrato. Ci limitiamo ad accennare ai passi fondamentali di questa dimostrazione, chiedendoti di completarla rispondendo alle domande "perché?" e "come?" che compaiono tra parentesi.
Infatti, consideriamo il triangolo PDQ. Esso ha PD = DQ (perché?)
Quindi DPQ = DQP (perché?)
Allora, poichè la somma degli angoli interni vale 180° e QDP = 90°, abbiamo che

DQP = DPQ = 45°.
Analogamente si dimostra che AQM = 45° (come?   ).
Possiamo quindi concludere che PQD+AQM = 90° e quindi che PQM=90° (perché?
).
Analogamente si dimostra che PNQ = NMQ = NPQ = 90° (come?   )
e, con ciò, la tesi.

Riassumiamo gli assiomi che fino a ora abbiamo esplicitato, generalizzando quello sulla metà di segmenti uguali:

se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali, allora i due triangoli sono uguali

se due segmenti o due angoli sono somme o differenze di segmenti o angoli uguali, allora essi sono uguali

se due segmenti o due angoli sono multipli o sottomultipli, secondo uno stesso numero, di segmenti o angoli uguali, allora essi sono uguali

se un segmento (o un angolo) A è uguale a un segmento (o un angolo) B e B è uguale a C, allora anche A e C sono uguali

la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° (su questo assioma ritorneremo in seguito).

Ma quanti e quali sono gli assiomi di cui ci dotiamo per fare le nostre dimostrazioni?
La ricerca degli assiomi è attività di grande importanza nella costruzione di una teoria. Ci sono problemi legati alla scelta degli assiomi; per esempio quello di scegliere di un numero di assiomi minimale (tutti e soli quelli necessari e sufficienti a dimostrare i teoremi che riteniamo significativi). Noi, per ora, non ci preoccuperemo di questi problemi scegliendo un'assiomatica sovrabbondante (ossia con alcuni assiomi non necessari) e, in ogni caso, riempiremo la lista dei nostri assiomi gradualmente.

Le due seguenti proposizioni precisano gli strumenti che potrete utilizzare nella geometria euclidea per effettuare costruzioni: la riga e il compasso.

Per due punti del piano passa una e una sola retta
Questa proposizione, che scegliamo come assioma, garantisce che esiste uno strumento, detto riga, che consente di tracciare rette.

Dato un punto C, detto centro, e un segmento, detto raggio, è possbile costruire una e una sola circonferenza di centro C e raggio r.
Questa proposizione, che segliamo come assioma, garantisce che esiste uno strumento, detto compasso, che consente di tracciare circonferenze.

La riga (che consente di tracciare rette e segmenti), il compasso (che consente di tracciare circonferenze) e il segnapunti (che consente di tracciare punti) sono gli strumenti basilari della geometria, quelli che consentono di costruire le figure geometriche.

Andiamo ora alla scoperta di nuove proposizioni che sceglieremo come assiomi, anche se nella geometria di Euclide esse possono in realtà essere dimostrate.

Queste proposizioni sono note come secondo e terzo criterio di uguaglianza dei triangoli. Invece che enunciarle, provate a eseguire la seguente attività che dovrebbe aiutarvi a scoprire da soli gli enunciati del secondo e del terzo criterio di uguaglianza.

Attività 2 (in piccoli gruppi)
Se avete tre lati e tre angoli che soddisfano a determinate condizioni che pereciseremo in seguito, il triangolo è determinato, nel senso che esiste un solo triangolo avente quei lati e quegli angoli. D'altra parte avete anche visto che essendo noti due lati e l'angolo fra essi compreso, il triangolo è univocamete determinato. In altri termini, se un vostro amico vi telefona da un paese lontano e vi dice che ha disegnato un triangolo di lati 23 e 43 e angolo fra essi compreso di 30°, voi sarete in grado di ridisegnare quel triangolo ed eventuali piccole differenze dipenderanno dagli strumenti utilizzati e dalla precisione del disegno e non dal fatto che esistono diversi triangoli con quelle caratteristiche!
Quindi tre elementi possono bastare ... ma bastano sempre? E quattro? E cinque? Per rispondere a queste domande vi chiediamo di esplorare i seguenti file in Cabrijava riportando, per ogni esplorazione compiuta i risultati delle vostre osservazioni espresse sotto forma di congettura.
In ogni file ci sono oggetti verdi: sono quelli che dovete muovere per esplorare la situazione e osservare aspetti significativi per la teoria; oggetti rossi: sono gli oggetti che variano quando si muovono gli oggetti verdi; oggetti blu: sono i parametri del problema, ossia oggetti che non dipendono da quelli verdi e quindi non variano con essi. Variando i parametri si ottiene un problema dello stesso tipo di quello di partenza, ma con dati iniziali diversi. Gli oggetti di colore verde acqua, quando ci sono, sono costruzioni che aiutano a ottenere informazioni dall'esplorazione, ma che non è detto siano necessari alla stessa.

Trelatijava

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Duelatiangolooppostojava

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Tre angoli

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Dueangoliunlatojava

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Dueangolilatocompresojava

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Cinque elementi

Le nostre conclusioni sull'esplorazione di questo file

Riepilogando, dovreste aver notato che il triangolo è univocamente determinato nei seguenti tre casi:
a) sono noti due lati e l'angolo compreso
b) sono noti due angoli e il lato compreso
c) sono noti tre lati.

In corrispondenza di ciascuna delle precedenti situazioni si ha un criterio di uguaglianza dei triangoli e, in particolare:

a) Primo criterio di uguaglianza: se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali, allora i due triangoli sono uguali.

b) Secondo criterio di uguaglianza: se due triangoli hanno due angoli e il lato compreso ordinatamente uguali, allora essi sono uguali.

c) Terzo criterio di uguaglianza: se due triangoli hanno tre lati ordinatamente uguali, allora esi sono uguali.

Come potete notare, quindi, tre elementi possono essere o non essere sufficienti. Infatti anche 5 elementi non sono a volte sufficienti a individuare univocamente un triangolo: in generale, non basta il numero di dati che si hanno a disposizione per determinare un triangolo, ma è decisivo sapere quali elementi si danno. Ciò fa capire, nella formulazione dei criteri di ugualglianza dei triangoli il ruolo strategico della corrispondenza fra elementi uguali che è indicato da quel termine "ordinatamente" che prima vista non sembra giocare un ruolo così decisivo.

In precedenza abbiamo detto che conoscendo tre lati di un triangolo se ne possono conoscere, necessariamente, anche i tre angoli. Ma quali sono le condizioni per cui tre numeri possano rappresentare le misure dei tre lati di un triangolo?

Attività 3 (in piccoli gruppi)
I tre numeri 2, 2 , 7 possono essere le misure dei lati di un triangolo? E i tre numeri 13, 20, 6? E 14, 14, 15? In generale, quali condizioni devono essere soddisfatte affinché tre numeri possano rappresentare le misure dei lati di un triangolo?

La nostra risposta

Attività 4 (in piccoli gruppi)
Analogamente, quali sono le condizioni per cui tre misure angolari possono rappresentare gli angoli di un triangolo? Per rispondere costruite con Cabri un qualunque triangolo e segnate le misure dei suoi angoli interni. Quindi con la calcolatrice di Cabri calcolate la somma dei tre angoli interni e vedete quanto vale al variare dei lati e degli angoli del triangolo. Se non avete Cabri aprite il file di cabrijava cliccando sulla seguente hotword
sommaangoliinterni

La nostra risposta

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

Attività 5 (in piccoli gruppi)
Sempre considerando il precedente file di cabrijava (o quello di cabri che eventualmente avete costruito) cercate di dire quali relazioni esistono tra lati e angoli (suggerimento: al lato maggiore è sempre opposto ....., mentre al lato minore ....)

La nostra risposta

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

Attività 6 (in piccoli gruppi)
Aprite il file di Cabrijava "criteri di parallelismo" e esplorate la situazione cercando di individuare le condizioni che garantiscono che le due rette r e s sono parallele.
criteridiparallelismo

La nostra risposta

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

Scheda 3 Una sistemazione per produrre vere e proprie dimostrazioni

Tempo da dedicare all'attività della scheda 3: 4 ore

Riepiloghiamo alcune delle conoscenze che probabilmente avevate già dalla scuola media, ma che avete ripassato con le precedenti attività. Queste proposizioni costituiranno i primi assiomi della nostra teoria:

1. Nel piano è possibile tracciare tanti punti quanti se ne vogliono.

2. Per due punti del piano passa una e una sola retta.

3. Dato un punto C, detto centro, e una misura r, detta raggio, è possbile costruire una e una sola circonferenza di centro C e raggio r.

4. Segmenti uguali a uno stesso segmento sono uguali tra loro.

5. Angoli uguali a uno stesso angolo sono uguali tra loro.

6. Se due segmenti o due angoli sono somme o differenze di segmenti o angoli

uguali, allora essi sono uguali

7. Se due segmenti o due angoli sono multipli o sottomultipli, secondo uno stesso numero, di segmenti o angoli uguali, allora essi sono uguali

8. Se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente uguali, allora i due triangoli sono uguali.

9. Se due triangoli hanno due angoli e il lato compreso ordinatamente uguali, allora essi sono uguali.

10. Se due triangoli hanno tra lati ordinatamente uguali, allora esi sono uguali.

11. In un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

12. In ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due e minore della loro somma.

13. La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

14. Due rette sono parallele se e solo se tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali.

Vediamo ora quante proprietà di quelle osservate nel problema del quadrilatero dei punti medi è possibile dimostrare con questi assiomi e quali, invece, richiedono nuovi assiomi.
Due osservazioni prima di passare alla prossima attività:
a) nota che il numero di assiomi è, per ora, superiore ai teoremi che abbiamo dimostrato; se la nostra teoria funziona abbastanza bene, prima o poi questo rapporto si deve invertire, nel senso che una teoria è potente e funziona bene se con pochi assiomi si riescono a ottenere molti teoremi significativi.
b) Ciascun teorema che dimostri potrà essere utilizzato nelle successive dimostrazioni. Ogni nuovo teorema può quindi essere visto come una conoscenza esplicita che può essere utilizzata (senza dover essere nuovamente giustificata) nelle successive dimostrazioni. In questo senso la teoria è un po' come un organismo che cresce gradualmente, ma sempre più ...

Attività 1 (in piccoli gruppi)

Vi presentiamo le seguenti congetture relative al parallelogramma di Varignon, che molti gruppi avranno formulato nelle precedenti attività:

1. Se ABCD è un rettangolo, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un rombo

2. Se ABCD è un rombo, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un rettangolo
3. Se ABCD è un trapezio isoscele, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un rombo
4. Se ABCD è un parallelogramma allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un rombo
5. Se ABCD è un quadrilatero qualsiasi, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un parallelogramma
6. Se ABCD è un quadrato, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD
7. Se ABCD è un rettangolo, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD
8. Se ABCD è un rombo, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD
9. Se ABCD è un parallelogramma, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD
10. Se ABCD è un trapezio, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD
11. Se ABCD è un quadrilatero qualunque, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ ha area che è la metà di quella di ABCD

Provate, partendo dalla prima, a dimostrarle utilizzando gli assiomi che avete a disposizione ed eventuali teoremi che riuscite a dimostrare e che si rivelano utili per la dimostrazione delle congetture proposte.

La nostra risposta (le dimostrazioni delle congetture che siete riusciti a dimostrare e qualche riflessione sul perché le altre non siete riusciti a dimostrale)

È probabile che alcune congetture non siate riusciti a dimostrarle perché vi mancano alcuni teoremi sui quadrilateri che, pure, è facile dimostrare.

Attività 2 (in piccoli gruppi)
Dimostrate i seguenti teoremi relativi ai quadrilateri:
1. Un parallelogramma ha i lati opposti e gli angoli opposti uguali (notate che da questo teorema discende che anche un rettangolo ha gli angoli opposti e i lati opposti uguali ... perché?).
2. Le diagonali di un parallelogramma lo dividono in quattro triangoli a due a due uguali.
3. Le diagonali di un rettangolo sono uguali (e quindi anche quelle di un quadrato ... perché?).
4. I lati di un trapezio isoscele sono uguali.
5. Le diagonali di un rombo sono bisettrici degli angoli al vertice.
6. Le diagonali di un rombo sono fra loro perpendicolari e si tagliano a metà.

Le nostre dimostrazioni

Anche se avete dimostrato tutti questi teoremi e magari qualche altra proprietà che riguarda i quadrilateri non riuscirete a dimostrare tutte le congetture che abbiamo in predeneza formulato. In particolare (ma non solo) la 5 dovrebbe aver resistito ai vostri tentativi.
Ciò può dipendere da due ragioni:
1) non siete stati abbastanza abili a utilizzare gli strumenti a vostra disposizione (assiomi, definizioni, teoremi già dimostrati);
2) la dimostrazione della congettura necessita di un nuovo assioma, perché riguarda proprietà che non sono completamente catturate dalla teoria che abbiamo finora a disposizione.
È chiaro che le due possibilità hanno una portata profondamente diversa e la seconda ci fa capire che esistono problemi estrememente interessanti e delicati relativi al potere rappresentativo ed esplicativo di una teoria (è possibile che qualcuno di voi affronti brevemente tali questioni alla fine dell'ultimo anno di scuola secondaria o in eventuali futuri studi universitari).
In effetti lo strumento che manca in questo caso è un teorema che è possibile derivare dagli assiomi che abbiamo a disposizione:

In un triangolo la retta che congiunge i punti medi di due lati è parallela al terzo

lato.

Attività 3 (in piccoli gruppi)
Provate a dimostrare il teorema appena enunciato (suggerimento: considerate un triangolo ABC e i punti medi M e N dei lati AC e BC. Dal punto medio N di BC tracciate la parallela ad AB che incontra in P il lato AC. Poi considerate i triangoli AMN e PNC ...)

La nostra dimostrazione

Il teorema appena dimostrato è una conseguenza immediata di un altro teorema che vogliamo inserire come assioma nella nostra teoria, per l'importanza che ha, nella geometria euclidea, nell'approccio ai triangoli simili. Si tratta del cosiddetto teorema di Talete. Il fatto stesso che si chiami "teorema" suggerisce che possa essere dimostrato (e in effetti nella geometria Euclidea viene dimostrato). Noi , però, lo prenderemo come quindicesimo assioma e lo utilizzeremo per dimostrare altri teoremi.

15. Teorema di Talete
Un fascio di rette parallele stacca su due trasversali segmenti proporzionali.

Attività 4 (in piccoli gruppi)
Cercate di dare significato al teorema di Talete e di individuarne alcune applicazioni

La nostra risposta

La nostra risposta dopo il confronto con altri gruppi di lavoro

La nostra risposta dopo l'intervento dell'insegnante

Attività 5 (in piccoli gruppi)

Una conseguenza dell'assioma 15. è, come abbiamo già detto, il teorema:

In un triangolo la retta che congiunge i punti medi di due lati è parallela al terzo lato.

Dimostrate questo teorema a partire dall'assioma 15.

La nostra risposta

Attività 6 (in piccoli gruppi)

Come può essere utilizzato il teorema dimostrato nelle attività 3 e 5 per dimostrare la congettura 5?
5. Se ABCD è un quadrilatero qualsiasi, allora il quadrilatero dei punti medi MNPQ è un parallelogramma.

La nostra risposta

La nostra risposta dopo il confronto con altri gruppi

La nostra risposta dopo l'eventuale intervento dell'insegnante

Attività 7 (in piccoli gruppi o individuale, a casa)

Completate la dimostrazione delle congetture dell'attività 1.

La nostra risposta (con eventuali richieste di chiarimento all'insegnante)

Attività 8. (a coppie o anche individuale, a casa)

Se avete Cabri costruite un triangolo equilatero; poi osservatene diverse proprietà e, per ciascuna di esse, producete una proposizione che la esprima e dimostrate tale proposizione (se non avete Cabri cercate di fare lo stesso lavoro con carta e matita).

La nostra risposta

Attività 9. **(a coppie o anche individuale, a casa)**
Se avete Cabri costruite un triangolo isoscele; poi osservatene diverse proprietà e, per ciascuna di esse, producete una proposizione che la esprima e dimostrate tale proposizione (se non avete Cabri cercate di fare lo stesso lavoro con carta e matita).

La nostra risposta

Attività 10 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**

Tracciate la bisettrice di uno degli angoli di un triangolo. Quali ipotesi sul triangolo dovete fare affinché essa risulti perpendicolare al lato opposto considerato?

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 11 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Sia dato un triangolo ABC.
Quali ipotesi dovete aggiungere su ABC affinché risulti divisibile in due triangoli isosceli da una semiretta uscente da un suo vertice?

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 12 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Sia dato un triangolo equilatero.
Studiate la relazione esistente tra i segmenti di perpendicolari condotti da un punto interno (esterno) a ciascuno dei tre lati.

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 13 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Qual è il percorso minimo che congiunge due punti A e B appartenenti a uno stesso semipiano mediante una spezzata ACB che ha il vertice C sulla retta origine del sempiano?

La nostra risposta:

a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Segue ora una lunga successione di attività che coinvolgono oltre ai triangoli, anche i quadrilateri e le circonferenze. Si tratta di costruzioni geometriche, problemi aperti di geometria che vi suggeriamo di svolgere aiutandovi anche con Cabri (per osservare e scoprire proprietà e produrre congetture), senza mai tralasciare di provare a dimostrare, alla fine, quelle congetture formulate che hanno retto la validazione con gli strumenti di Cabri. Chi desiderasse affiancare a questo percorso uno più tradizionale relativo alla dimostrazione, può scaricare, cliccando sulla seguente hotword, alcuni esercizi di consolidamento che propongono compiti del tipo "dimostra che ...".

Esercizi di consolidamento sulla dimostrazione

Attività 14 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Costruite un parallelogramma data la lunghezza delle sue diagonali. È unico?

La nostra risposta:

a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 15 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Individuate una procedura che consenta di dividere un segmento AB in *n* parti uguali mediante una costruzione (suggerimento: tracciate una semiretta uscente dall'estremo A del segmento dato; prendete su questa semiretta un'unità di misura; riportate *n* volte questa unità di misura e congiungete l'ultimo punto P_n ottenuto con l'altro estremo B del segmento; ora tracciate, da ciascuno dei punti ottenuti sulla semiretta l'unità di misura, una parallela a P_nB ...)

La nostra risposta:
a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 16 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

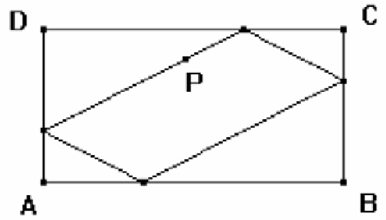
Sia dato un triangolo.
Tracciate le sue mediane, le sue altezze e i suoi assi. Che cosa si può dire delle relazioni che esistono tra baricentro, ortocentro e circocentro al variare del triangolo?

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 17 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Individuate la direzione di lancio della pallina, che si trova inizialmente in un punto *P* del biliardo, in modo che, dopo aver battuto successivamente contro le quattro sponde consecutive, ripassi per il punto *P*.



La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 18 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Ariele ha trovato una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni:
"vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2".
Ariele giunto sull'isola del tesoro ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 19 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)
Costruite una circonferenza dati due suoi punti e la lunghezza del raggio.

La nostra risposta:
a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 20 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Siano date due circonferenze *c* e *c'* con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su *c* e *c'*.

- **Che relazione c'è tra i punti D, B ed E?**
- **Quali relazioni ci sono tra i segmenti DE e OO'?**
- **Che tipo di quadrilatero è DOO'E?**
- **Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?**

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 21 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Siano dati una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t. Costruite la circonferenza che passa per P e Q ed è tangente a t in P.

La nostra risposta:
a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 22 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)

Sia data una circonferenza di centro O.
a) Costruite un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza; siano *A*,*B*,*C*,*D*, i suoi vertici;
b) facendo variare il quadrilatero *ABCD*, quali quadrilateri particolari si possono

ottenere?
c) C'è una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Si può trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 23 (a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)
Sia data una circonferenza di centro O.
a) Costruiste un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza e chiamate i suoi vertici A, B, C, D.
b) Facendo variare il quadrilatero ABCD, quali quadrilateri particolari potete ottenere?
c) Potete trovare una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Riuscite a trovare una condizione per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza?
La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 24 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**
Sia dato un quadrilatero ABCD. Tracciate gli assi *a* del lato AB, *b* del lato BC, *c* del lato CD, *d* del lato DA. Sia H il punto di incontro degli assi *a* e *b*, K il punto di incontro di *a* e *d*, L il punto di incontro di *c* e *d*, M il punto di incontro di *c* e *b*.
a) Studiate come varia HKLM al variare di ABCD.
b) Dimostrate le congetture prodotte durante l'esplorazione fatta in Cabri.

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 25 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**
Costruire una tangente comune a due circonferenze.

La nostra risposta:
a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 26 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**

Data una circonferenza C_1 e una circonferenza C_2 tangente internamente a C_1, costruite una circonferenza C_3 tangente esternamente a C_2 e internamente a C_1.

La nostra risposta:
a) la costruzione e la sua validazione in Cabri

b) la dimostrazione della correttezza della costruzione

Attività 27 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**

Sia dato un quadrilatero ABCD. Considerate le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (in senso orario).
Fate variare ABCD, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura HKLM? Scrivete tutte le scoperte e congetture e dimostratele.

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Attività 28 **(a coppie, possibilmente utilizzando Cabri géomètre)**

Determinate, fra tutti i triangoli PQR aventi l'area assegnata e un lato assegnato c = PQ, quello per cui è minima la somma degli altri lati a = PR e b = RQ.

La nostra risposta:
a) osservazioni, congetture prodotte e loro validazione in Cabri

b) dimostrazioni

Alla fine di questa attività non ti proponiamo né una sistemazione di quanto appreso (è facilmente ricavabile da queste pagine), né, tantomeno, un test di autovalutazione. Riteniamo, infatti, che il percorso di avvio alla dimostrazione e al sapere teorico necessiti di periodi di tempo molto lunghi per consolidarsi e che non possa essere verificato con test a risposta chiusa.

Ti segnialiamo che cliccando sull'hotword seguente puoi accedere a tutta l'opera di Eucide (in inglese, però), con varie animazioni java.

Gli Elementi di Euclide