Lezione 2 - Modelli dinamici lineari (si prevedono circa 20 ore di lavoro in classe)

I prerequisiti per questa attività sono gli stessi di quelli della lezione sulle funzioni lineari a cui si devono aggiungere i contenuti e le tecniche apprese nella lezione sulle funzioni lineari.
In questa lezione si utilizzano conoscenze e tecniche apprese nella lezione sulle funzioni lineari per costruire alcuni semplici modelli di situazioni di carattere principalmente economico.
Il materiale non è in questo caso organizzato in schede: infatti vi si chiede soprattutto un lavoro di attenta lettura, comprensione e interpretazione del testo. Naturalmente i compagni di gruppo e l'insegnante saranno importanti per chiarire le questioni che porrete durante il lavoro.

Nome e cognome dei componenti del gruppo che svolge le attività di gruppo di questa lezione

Nome e cognome dei componenti della coppia che svolge le attività di coppia di questa lezione

Nome e cognome della studentessa o dello studente che svolge le attività individuali di questa lezione

Modelli dinamici discreti e continui: un primo approccio

Le funzioni lineari che abbiamo affrontato nella prima lezione sono formate da coppie ordinate di numeri reali: nella formula $y = mx + q$, la variabile indipendente x può assumere qualunque valore reale, ossia "varia con continuità"; ciò fa sì che il suo grafico possa essere tracciato senza staccare la matita dal foglio. In molte situazioni, però, una variabile cambia per passi discreti. Per esempio, pensa alle macchine che passano per un casello autostradale; possiamo descrivere la situazione in almeno due modi:

1. facciamo partire le osservazioni da un certo istante che chiamiamo istante iniziale, a cui associamo il valore 0 e rileviamo, ogni volta che passa una nuova macchina, l'intervallo di tempo trascorso e il numero totale di macchine che sono passate per il casello;

2. facciamo partire le osservazioni da un certo istante che chiamiamo istante iniziale, a cui associamo il valore 0, fissiamo un determinato intervallo di tempo, per esempio 10 minuti, e rileviamo quante macchine passano ogni 10 minuti.

Nel primo caso la variabile indipendente, il tempo, varia con continuità, ma non così la variabile dipendente, ossia il numero di macchine: tale numero, infatti, è un numero intero, il che vuol dire che ne possono passare 2, 5, 100, 1000, ma non 0.7 oppure 0.02. Si dice che la variabile dipendente è una variabile discreta (questo termine sta a indicare che essa può assumere valori in un insieme in cui possibile definire, dato un valore qualunque assunto dalla variabile, il valore precedente o quello successivo).

Nel secondo caso anche la variabile indipendente, ossia il tempo, pur variando con continuità, può essere resa discreta. Infatti, essendo l'intervallo di tempo costante, possiamo pensare di sostituire a esso il numero d'ordine della rilevazione; per esempio alle due tabelle seguenti, nelle quali nella prima colonna compare la misura dell'intervallo di tempo considerato (singolo nella prima e cumulato nella seconda),

Tempo	Numero macchine
10	8
10	11
10	7
10	5
10	9

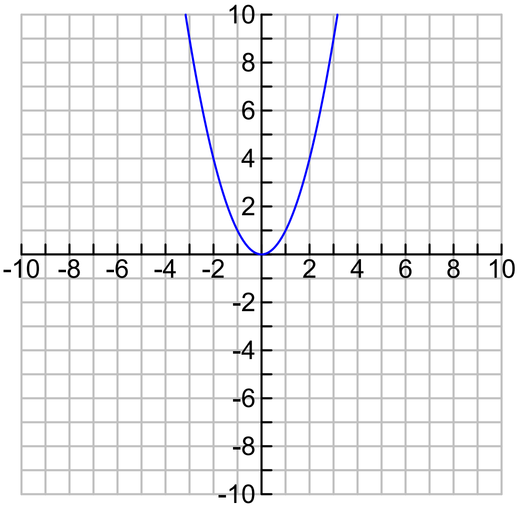
Tempo	Numero macchine
10	8
20	19
30	26
40	31
50	40

è possibile sostituire la tabella

Rilevazione	Numero macchine transitate
1	8
2	19
3	26
4	31
5	40

nella quale la variabile della prima colonna, ossia il numero d'ordine delle osservazioni, è una variabile discreta. In questa tabella, quindi, sia la variabile indipendente, sia quella dipendente sono variabili discrete.

Altri esempi di fenomeni che possono essere descritti con variabili discrete sono, per esempio, la crescita di una popolazione, il numero di occupati, il numero di studenti che sostengono con successo l'esame di stato ogni anno ...
Inoltre anche i fenomeni intrinsecamente continui possono essere descritti con successo con variabili discrete. In un certo senso la tua calcolatrice grafica usa proprio un'approssimazione discreta per rappresentare i grafici di funzioni continue: se, infatti, fai disegnare alla tua calcolatrice il grafico della funzione quadratica descritta dalla formula $y = x^2$, vedrai sullo schermo una curva apparentemente continua, ma in realtà formata da un numero finito di punti (pixel), al più quanti ne consente la risoluzione grafica del tuo schermo.



I cambiamenti discreti sono a volte concettualmente più semplici e computazionalmente più efficienti (soprattutto dopo l'avvento dei calcolatori); così, anche quando la descrizione di un fenomeno con variabili continue risulta più adeguata, è possibile che una sua approssimazione con variabili discrete sia più efficace.

Per indicare la descrizione di un fenomeno mediante il linguaggio matematico utilizzeremo il termine "modello matematico".

Ma che cosa è un modello matematico dinamico?

Abbiamo detto che un modello matematico è una descrizione di un fenomeno mediante linguaggio matematico (ossia mediante numeri, equazioni, formule, teorie matematiche). In effetti si tratta di una descrizione di ciò che conosciamo del fenomeno e che riteniamo interessante e significativo per caratterizzare e descrivere il fenomeno stesso. Cerchiamo di spiegarci meglio con un esempio:
se vogliamo studiare l'evoluzione nel tempo del prezzo di un prodotto alimentare, faremo innanzitutto una scelta delle variabili che riteniamo significative e importanti per descrivere il fenomeno. Difficilmente, almeno in prima approssimazione, prenderemo in esame, come variabile significativa, il colore del prodotto. Quasi sicuramente non considereremo l'umore dei possibili acquirenti e, con ancora maggiori probabilità, trascureremo di prendere in considerazione il risultato della partita di calcio Raddavero - Amici via Monterosa!
Insomma, ogni modello matematico richiede una scelta preliminare delle variabili significative: quelle, cioè, che saranno oggetto di rilevazione e osservazione per descrivere la situazione presa in considerazione.
Un modello dinamico è un modello che descrive una situazione che evolve nel tempo. Nelle prossime sezioni vedremo esempi di modelli dinamici continui e

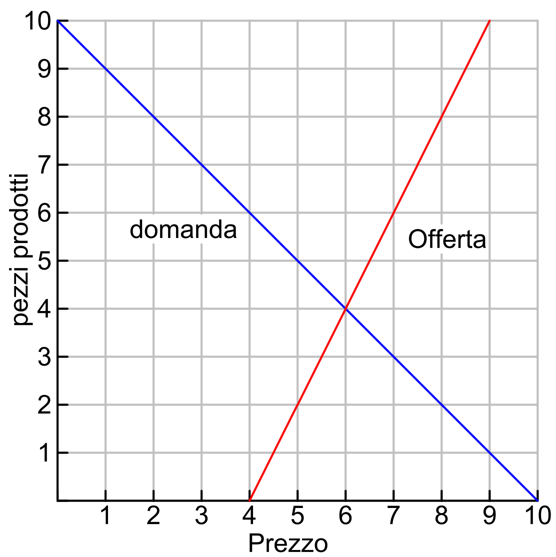
discreti che hanno tutti la caratteristica di essere lineari, ossia di essere espressi da funzioni lineari delle variabili significative.

Modelli dinamici lineari continui

E' abbastanza sensato considerare, in prima approssimazione e in generale, come uniche variabili significative nella descrizione dei cambiamenti nel tempo del prezzo di un prodotto, oltre al tempo t:

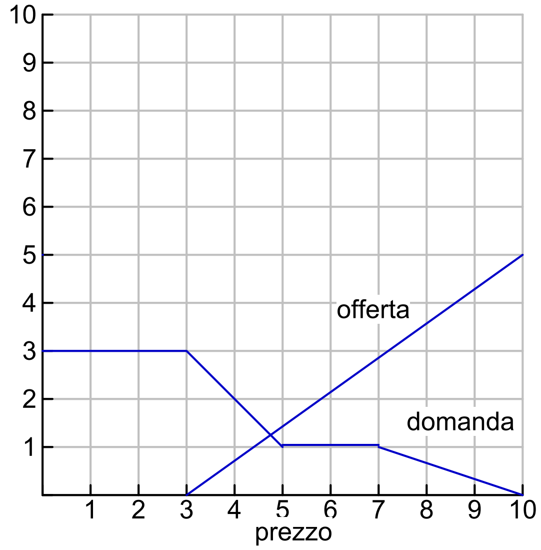
a) il prezzo del prodotto (*p*)
b) l'offerta, ossia il numero di pezzi prodotti (*o*)
c) la domanda, ossia il numero di unità del prodotto che vengono acquistate (*d*)

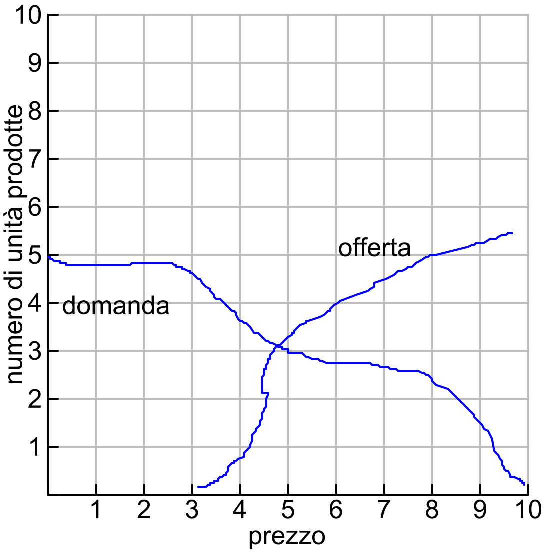
Tra *p*, *o* e *d* esistono importanti relazioni che regolano l'evoluzione nel tempo del prezzo e descrivono la situazione presa in considerazione.
Il grafico qui di seguito riportato dà un'idea di come l'offerta e la domanda possono essere legate al prezzo del prodotto:



I grafici sopra riportati (puoi lanciare con TI - InterActive! un'animazione cliccando prima due volte sul grafico e poi sulla seconda delle icone della barra superiore) affermano che la domanda è una funzione decrescente del prezzo (più aumentano i prezzi, più diminuiscono le unità acquistate del prodotto), mentre l'offerta è una funzione crescente del prezzo (più aumentano i prezzi, fino a che la domanda è maggiore dell'offerta, maggiore è l'interesse a produrre più pezzi per venderli).
In prima ipotesi abbiamo immaginato che domanda e offerta variassero linearmente con i prezzi: si tratta, però, di una rozza approssimazione, per (almeno) i seguenti motivi:

a) c'è un prezzo al di sotto del quale non ha senso produrre pezzi, perché i costi di produzione non verrebbero coperti. Al di sotto di questo prezzo, quindi, l'offerta è nulla. Di questo fatto si tiene conto nel grafico, visto che le unità prodotte iniziano a essere diverse da 0 solo per prezzi superiori a 4.
b) La domanda rimane in generale costante per determinati prezzi: è piuttosto irrealistico pensare che non appena il prezzo subisce una minima variazione, la domanda ne risenta immediatamente. Inoltre la reazione alla variazione di prezzi sarà meno sensibile per prezzi molto bassi e, forse, anche per eventuali altri valori dei prezzi per i quali piccole variazioni non sono quasi avvertite dalla grande maggioranza di consumatori che acquista a quei prezzi. Tra l'altro, è possibile che, all'aumentare dei prezzi, si creino consumatori nuovi che sostituiscono parzialmente i consumatori che decidono di non acquistare più i prodotti, proprio perché i nuovi consumatori sono attirati da beni di consumo di lusso (ritenendo il prezzo elevato un indicatore di qualità)
Si possono quindi produrre modelli più sofisticati, affidabili e adeguati (come ad esempio quelli rappresentati nei grafici seguenti), ma meno semplici di quelli lineari e quindi meno adatti a un primo approccio.





Iniziamo a ragionare sui modelli lineari, dei quali ci occupiamo in questa lezione. Le variabili domanda e offerta non sono indipendenti fra di loro: è ovvio che, se la domanda va al di sotto di un certo valore, non è più conveniente produrre pezzi ed è necessario abbassare i prezzi per riportare la domanda a livelli significativi.
Molti economisti affermano che si raggiunge in generale un punto di equilibrio, in cui la domanda è uguale all'offerta, che segna un punto di stabilità del mercato e che individua il prezzo equo per un determinato prodotto. Secondo alcuni economisti basterebbe lasciare libero il mercato e ogni situazione evolverebbe più o meno rapidamente verso l'equilibrio con l'individuazione del prezzo corretto

quando la domanda e l'offerta diventano uguali.

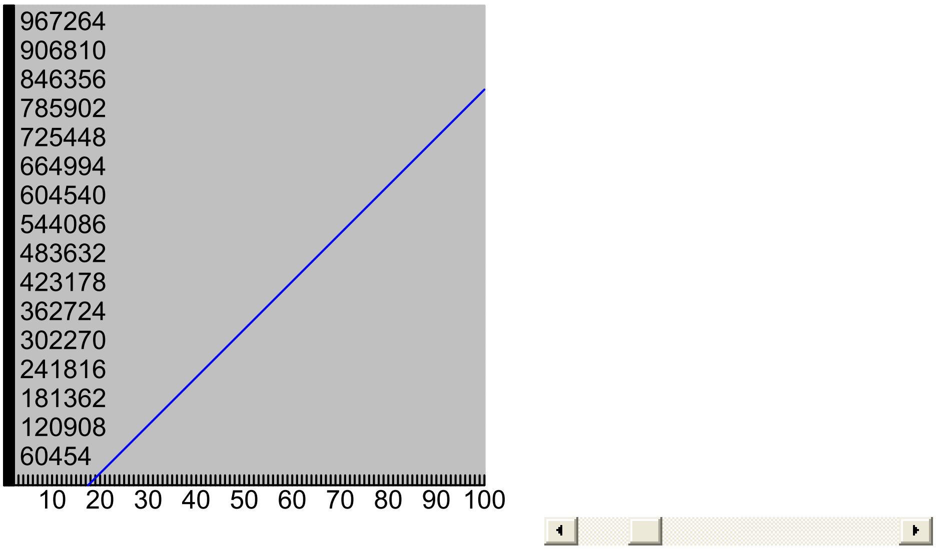
Esercizio (da svolgersi individualmente)
Considera le due seguenti funzioni lineari, $d(p)$ e $o(p)$ che rappresentano, rispettivamente, la domanda e l'offerta di un bene che ha un prezzo unitario p:
$d(p) = 10000 - 1000p$
$o(p) = 10000p - 4000$
Qual è il prezzo di equilibrio per tale prodotto? (Naturalmente puoi utilizzare TI - InterActive! per rispondere)

Risposta (ricordati di segnare il tuo nome... non dimenticare le consegne che ti sono state date nella precedente lezione!)

Rappresenta graficamente la situazione descritta nel precedente esercizio e la soluzione trovata aiutandoti con TI - InterActive!

Risposta

Problema (da svolgersi in piccoli gruppi).
Considerate nuovamente le due funzioni
$d(p) = 10000 - 1000p$
$o(p) = 10000p - 4000$
Esse possono essere così riscritte:
$d(p) = 10000\,(1 - 0.1p)$
$o(p) = 10000(\,p - 0.4)$
Osservate ora la funzione $o(p) = 10000(\,p - 0.4)$. In generale, essa può essere scritta nella forma $o(p) = k(p - c)$. Fissate ora $k = 10000$ e vedete come variano i grafici delle funzioni $o(p) = 10000(p - c)$ al variare di c, aiutandovi l'uso dello sliders, che consente di fare variare c da 0 a 100:



Che cosa rappresenta *c*? Cercate di spiegare come influisce il variare di *c* sui grafici delle funzioni *o*(*p*) e quali situazioni reali è possibile rappresentare con tali grafici.

Risposta (nomi dei componenti del gruppo)

Attività da effettuarsi in gruppo, con l'aiuto dell'insegnante.
La prima legge di Ohm afferma che la tensione applicata ai capi di un conduttore e la corrente che lo attraversa sono direttamente proporzionali e che la costante di proporzionalità è la resistenza del conduttore. In realtà, se provate a raccogliere dati in laboratorio, senza avere l'accortezza di evitare che il conduttore si scaldi troppo a causa del passaggio della corrente, vedrete che la legge di proporzionalità diretta non è ben rispettata. Infatti la resistenza varia con la temperatura. Quale ipotesi potete fare sulla dipendenza della resistenza dalla temperatura? Di che cosa avete bisogno per verificare tale ipotesi in laboratorio?

Risposta del gruppo

Esercizi da svolgersi individualmente.

1. Un ciclista A parte da Milano alle 7.30 e viaggia quasi costantemente a 35 km/h, dirigendosi verso Mestre (che è vicino a Venezia). Un secondo ciclista B parte da Mestre dirigendosi verso Milano, viaggiando con velocità quasi costante di 30 km/h. Se i due ciclisti fanno la stessa strada, dopo quanto tempo e a quanti km. da Milano si incontreranno?

2. Determina una funzione che rappresenti la variazione del costo totale di una merce in funzione della quantità della merce. Discuti i limiti del tuo modello.

3. Come puoi esprimere la dipendenza della lunghezza di un filo metallico dalla temperatura sapendo che si tratta di una legge lineare?

4. Come puoi esprimere la dipendenza della velocità dal tempo di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato?

5. Come puoi esrpimere la dipendenza dello posizione dal tempo di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme?

6. Come puoi esprimere la dipendenza del perimetro di un quadrato dal suo lato?

Risposte

1

2

3

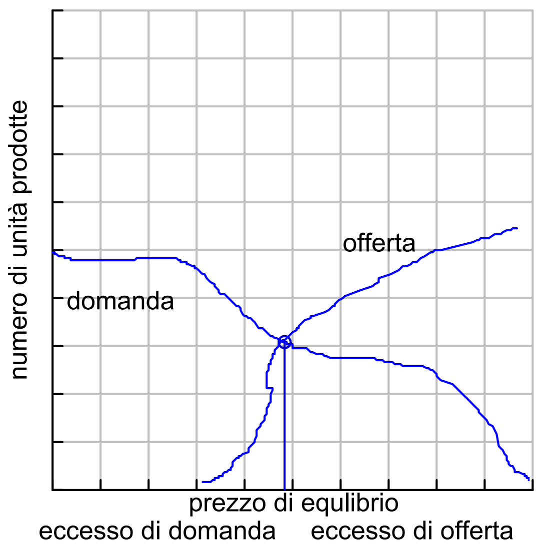
4

5

6

Modelli dinamici lineari discreti: un esempio

Riprendiamo in considerazione la situazione in precedenza considerata relativa alle relazioni fra domanda, offerta e prezzi.



Come abbiamo già notato in precedenza, è abbastanza ovvio che, quando la domanda è superiore all'offerta, i prezzi tendano a salire, verso il prezzo di equilibrio. Quando, invece, si ha un difetto di domanda (l'offerta supera la domanda), allora i prezzi tendono a scendere, per la necessità di smaltire la sovraproduzione. La variabile significativa che regola l'evoluzione dei prezzi è quindi la differenza tra domanda e offerta, in simboli la quantità $d(p) - o(p)$.

Naturalmente, se domanda e offerta dipendono linearmente dai prezzi, anche la loro differenza è una funzione lineare dei prezzi; in ogni caso è abbastanza naturale pensare che quando la differenza $d(p) - o(p)$ è positiva i prezzi tendano a salire, mentre quando tale differenza è negativa i prezzi tendano a scendere. Se, come molti economisti teorizzano, il mercato tende all'equilibrio, possiamo immaginare oscillazioni dei prezzi che tendono via via ad assestarsi attorno al valore di equilibrio.

Per verificare queste congetture anche da un punto di vista quantitativo, possiamo considerare una successione di prezzi in cui ciascun valore dipende dal prezzo precedente: è questa una situazione che modellizza bene quanto accade in alcuni casi nella realtà. Pensate, per esempio, ai prezzi che vengono imposti dalle compagnie aeree: è ovvio che dipendano dalla domanda, nel senso che se questa è alta, allora i prezzi sono relativamente elevati, mentre se la domanda è bassa (per esempio a causa di timori per attentati terroristici) i prezzi devono scendere. D'altra parte una compagnia aerea non può modificare i prezzi con continuità nel tempo: per esempio deve pianificare per tempo il costo di un volo per consentire a chi prenota di farlo a condizioni trasparenti. Naturalmente può modificare i prezzi dei voli successivi in seguito alle informazioni che ha ottenuto sui voli precedenti. Insomma, possiamo pensare che vi sia una successione di prezzi p_0, p_1, p_2, ... , p_n, in cui ciascun valore dipende dal precedente e dalla differenza tra domanda e offerta. Possiamo supporre, in prima approssimazione, che la differenza tra due prezzi successivi sia direttamente proporzionale alla differenza tra domanda e offerta. Quanto detto è precisato dalla seguente equazione:

$p_{n+1} - p_n = k(d(p_n) - o(p_n))$ ossia $p_{n+1} = p_n + k(d(p_n) - o(p_n))$

dove p_{n+1} e p_n sono, rispettivamente i prezzi a un'osservazione e a quella che la precede, mentre k è la costante (positiva) di proporzionalità.

La relazione tra p_{n+1} e p_n è di tipo lineare, se tale è la dipendenza della differenza tra domanda e offerta dai prezzi; il modello è dinamico (riguarda l'evoluzione dei prezzi) e discreto (i prezzi non variano con continuità, ma è possibile individuare, dato un prezzo qualunque, quello che lo precede o quello che lo segue).

Per studiare l'evoluzione di successioni di questo tipo sono assai utili i fogli di calcolo elettronici e i sistemi di manipolazione grafico simbolica. Useremo gli uni e gli altri per lo studio dell'evoluzione dei prezzi al variare del parametro k, per fissate leggi (lineari) di domanda e offerta.

Prima, però, facciamo notare che la relazione $p_{n+1} = p_n + k(d(p_n) - o(p_n))$ non è sufficiente per calcolare i valori della successione dei prezzi. Infatti, proviamo a chiederci quanto vale p_2.

Otteniamo:

$p_2 = p_1 + k(d(p_1) - o(p_1))$

Il che vuol dire che dobbiamo prima calcolare p_1.

Ma quanto vale p_1?
$p_1 = p_0 + k(d(p_0) - o(p_0))$
Come si vede, tutto è demandato al calcolo di p_0: se non precisiamo un valore di partenza, ossia un primo prezzo, non potremo calcolare alcun valore della successione. Se, invece precisiamo il valore del primo prezzo, ossia p_0, allora, a partire da questo, potremo calcolarci via via p_1, poi p_2 e così via...
In definitiva dovremo quindi scrivere
$p_{n+1} = p_n + k(d(p_n) - o(p_n))$ e $p_0 = a$

Successioni di questo tipo si dicono "successioni ricorsive". Ritorneremo su questo delicato e importante aspetto in seguito, cercando anche di approfondire questioni di carattere computazionale legate alla definizione di successioni ricorsive.

Occupiamoci ora di vedere come sia possibile utilizzare un foglio elettronico per studiare la successione

(*) $p_{n+1} = p_n + 0.0002(d(p_n) - o(p_n))$ e $p_0 = 0.50$, supponendo che
$o(p) = 1000*p - 400$
e
$d(p) = 1000 - 500*p$
Sostituendo nella (*) le espressioni sopra considerate per o(p) e d(p) otteniamo:

$p_{n+1} = p_n + 0.0002(1000 - 500*p_n - 1000*p_n + 400)$ ossia:
$p_{n+1} = p_n + 0.0002(1400 - 1500*p_n)$ e $p_0 = 0.50$.

Possiamo strutturare un foglio elettronico nel quale mettiamo nella prima colonna il numero d'ordine dell'osservazione e nella seconda colonna i valori della successione p_0, p_1, p_2 , ... , p_n, ..., fino a un ben determinato valore di n che stabiliremo in base alle nostre esigenze (l'idea è quella di andare avanti nel calcolo fino a che non si intravede il raggiungimento di un prezzo di equilibrio, situazione suggerita da uno stabilizzarsi dei valori della successione). In altre celle metteremo il valore di p_0 e quello dei coefficienti significativi dell'evoluzione dei prezzi, ossia 0.0002, 1000, 1000, 500, 400, in modo tale che sia possibile, volendo, modificare i parametri, modificare il valore nella cella, lasciando le formule inalterate. Il foglio calcola i valori della successione a partire da p_0, applicando successivamente la formula che dà p_{n+1} in funzione di p_n. Si tratta di un calcolo tipicamente iterativo: un insieme di operazioni identiche viene applicato su valori diversi (prima su p_0, poi su p_1, poi su p_2 , ... , poi su p_n, ...). A ogni operazione successiva rimane in memoria solo l'ultimo valore del prezzo, ossia quello che serve per procedere nel calcolo. Naturalmente è possibile

chiamare il prezzo di partenza p_1, invece di p_0 : non cambia nulla, è solo una questione legata a quale numero si intende utilizzare per indicare il primo valore dell successione.
Osserva come è stato strutturato il foglio di lavoro 1 (dove il primo valore è stato indicato con p_1)
Dovresti anche vedere che i valori si stabilizzano dopo poche iterazioni (dopo le prime quindici iterazioni si stabilizzano sulla seconda cifra dopo la virgola e dopo le prime trentotto i valori visualizzati delle cifre decimali non cambiano più.
Sui due grafici sono stati riportati, rispettivamente, i primi cinquanta e i primi venti valori dei prezzi.
Naturalmente l'evoluzione dipende da diversi parametri: il modello, in generale, si può esprimere con le relazioni:

$p_{n+1} = p_n + k(d(p_n) – o(p_n))$ e $p_0 = a$, supponendo che
$o(p) = m*p – n$
e
$d(p) = g - h*p$
Al variare di k, a, m, n, g, h si ottengono evoluzioni diverse, alcune magari sorprendenti, almeno a prima vista.
Puoi provare a fare qualche esplorazione, discutendo dei risultati con i tuoi compagni e con l'insegnante.

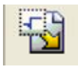
Risultati delle mie esplorazioni

Discussione dei risultati con quelli ottenuti dai miei compagni

Sintesi dopo i chiarimenti dell'insegnante

Invece di usare un foglio elettronico è possibile utilizzare TI-InterActive!, sia utilizzando il foglio elettronico di TI-InterActive! in modo analogo a quanto fatto con Excel, sia utilizzando, come suggeriamo qui di seguito, il comando "seq".

Riprendiamo in considerazione il modello
(*) $p_{n+1} = p_n + 0.0002(d(p_n) - o(p_n))$ **e** $p_0 = 0.50$**, supponendo che**
$o(p) = 1000*p - 400$
e
$d(p) = 1000 - 500*p$
e cerchiamo di utilizzare TI-InterActive! per calcolare i valori della successione definita da (*)
Iniziamo utilizzando il manipolatore simbolico di TI-InterActive! per far semplificare il l'espressione
$p_n + 0.0002(1000 - 500*p_n - 1000*p_n + 400)$

Allo scopo apriamo la finestra di calcolo cliccando su  **e poi digitiamo il comando EXPAND, come suggerito qui di seguito:**

$$\text{EXPAND}(pn + 0.0002\cdot(1000 - 500\cdot pn - 1000\cdot pn + 400))$$

$$.7\cdot pn + .28$$

TI-InterActive! suggerisce quindi che la successione dei prezzi sia esprimibili in modo più semplice nella forma:
$p_{n+1} = 0.7* p_n + 0.28$ **e** $p_0 = 0.5$

Definiamo ora questa successione con il comando Define. Dovremo dire a TI-InterActive! che quando n=0, allora p(n) varrà 0.5, altrimenti il valore di p(n) si otterrà moltiplicando per 0.7 il valore precedente, ossia p(n–1) e addizionando al risultato così ottenuto 0.12.
In simboli:
Define p(n)=when(n=0, 0.5, 0.7*p(n– 1)+0.28)

$$\text{Define } p(n) = \begin{cases} 0.5 & n = 0 \\ 0.7\cdot p(n-1) + 0.28 & \text{else} \end{cases}$$

"Done"

Se ora digitiamo il comando "seq", che richiede come argomenti la funzione (ossia p(n)), la variabile della funzione (ossia n), il primo valore che si vuole calcolare e l'ultimo, tutti separati da virgole, possiamo ottenere alcuni valori della successione e quindi studiarne l'evoluzione.

Per esempio, il comando
seq(p(n),n,0,10) restituisce i primi dieci valori della successione dei prezzi:

$\text{seq}(p(n), n, 0, 10)$

$$\{.5, .63, .721, .7847, .82929, .860503, .882352, .897646, .908353, .915847, .921093\}$$

Come puoi vedere, nella riga di output compare una lista di numeri che contiene i primi dieci valori della nostra successione. Puoi anche assegnare una variabile a questa lista. Ciò può essere effettuato selezionando la lista, battendo ENTER e poi digitando, in successione, il tasto STO, una lettera che indica il nome della variabile in cui viene memorizzata la lista, ENTER.
Il vantaggio è che, da questo punto in poi, puoi operare facilmente sugli elementi della lista; per esempio, utilizzando il comando "Difference List" (che si trova aprendo la calcolatrice di TI-InterActive! e poi selezionando Math e List) puoi far determinare alla calcolatrice la lista delle differenze prime, ossia la lista formata dalle differenze tra ciascun valore della lista di partenza e il precedente, come suggerisce quanto scritto qui di seguito in TI-InterActive! (dove il comando ans STO L signifca: metti nella variabile L l'ultima risposta fornita, ossia la lista generata in precedenza)

$ans \rightarrow L$

$$\{.5, .63, .721, .7847, .82929, .860503, .882352, .897646, .908353, .915847, .921093\}$$

$\text{deltaList}(L)$

$$\{.13, .091, .0637, .04459, .031213, .021849, .015294, .010706, .007494, .005246\}$$

Come puoi vedere, le differenze prime della lista L (deltaList(L)) sono ottenute eseguendo le seguenti differenze:
p(1)– p(0); p(2) – p(1); p(3) – p(2); ... ; p(10) – p(9).

Le differenze prime sono importanti per determinare l'andamento di una funzione: se esse sono costanti e positive vuol dire che la funzione cresce linearmente; se, invece, sono positive e aumentano, allora vuol dire che la funzione cresce e cresce sempre più, ossia ha la concavità rivolta verso l'alto; se, infine, sono positive, ma diminuiscono, allora vuol dire che la funzione cresce, ma cresce sempre meno, ossia ha la concavità rivolta verso il basso. Rifletti su quanto ora detto; magari, aiutandoti con un foglio elettronico, produci qualche tabella che ti consenta di verificare quanto ora affermato.
Che cosa si può dire se le differenze prime sono negative? Quali tipi di andamenti può avere una funzione che presenta differenze prime negative?

Risposta

Confronta la tua risposta con quelle fornite dai tuoi compagni di gruppo e discutete eventuali differenze.

Risultato della discussione

Proponete al vostro insegnante il risultato della discussione e ascoltate attentamente che cosa vi dice.

La nostra idea, dopo la lezione dell'insegnante, sull'uso delle differenze prime

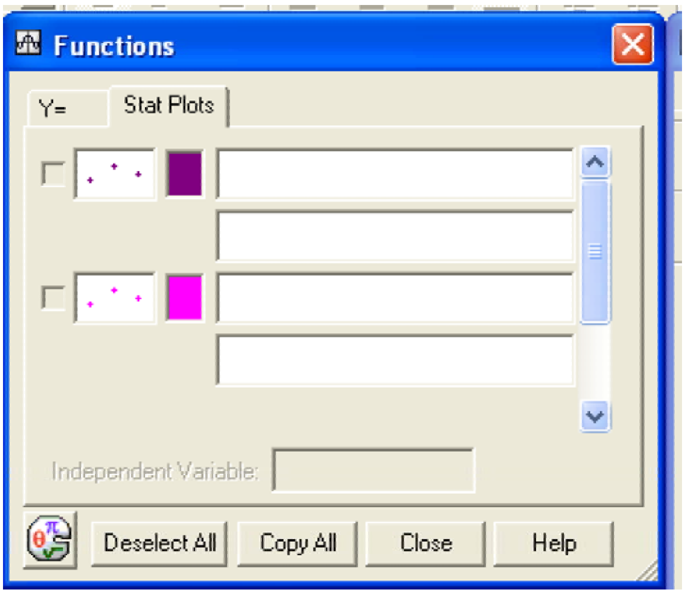
Supponiamo ora di voler avere un'idea dell'andamento grafico della successione dei prezzi. Possiamo utilizzare il modulo grafico di TI-InterActive! chiedendogli di rappresentare sul piano cartesiano i punti
(0; 0.5) ; (1; 0.63) ; (2; 0.721) ; (3; 0.7847); .... (10; 0.921093).
Ciò può essere affettuato con le seguenti operazioni:

a) definire la lista G
{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} STO g

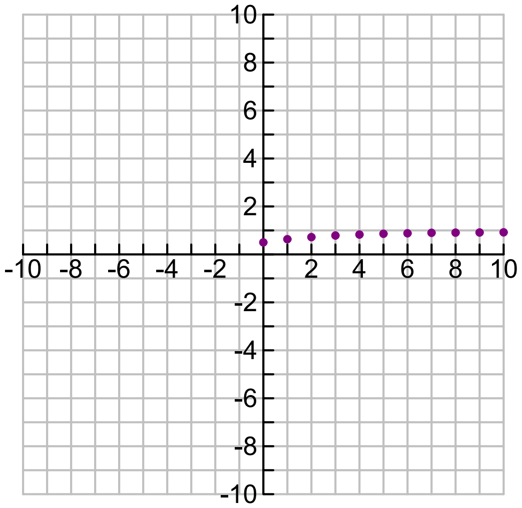
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow G$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

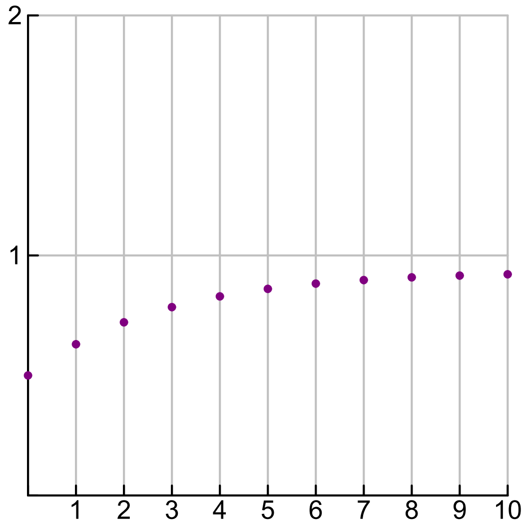
b) aprire il modulo grafico di TI-InterActive! e selezionare l'opzione statplot



c) cliccare sul primo rettangolino contenente i puntini e definire nella prima lista G (i valori che verranno rappresentati sull'asse delle x) e come seconda lista L (i valori che verranno rappresentati sull'asse y, ossia i prezzi):



d) dimensionare la finestra grafica per rendere più efficace la rappresentazione:



Abbiamo studiato l'evoluzione del nostro modello dal punto di vista numerico e grafico; abbiamo anche dato una formula ricorsiva che ci consente di trovare un qualunque valore della successione, purché sia noto il valore che lo precede. Questo tipo di definizione, pur essendo molto elegante, non è molto efficiente dal punto di vista del tempo di calcolo e dello spazio occupato in memoria. Cerchiamo di capire perché. Partiamo dall'analisi di come TI-InterActive! calcola i valori della successione a partire dalla definizione ricorsiva. Per esempio, chiediamoci come calcolerebbe u1(5).
La prima cosa che TI-InterActive! incontra è l'espressione
0.7*p(4) + 0.28

Non sapendo quanto è p(4), tiene in memoria l'espressione e tenta il calcolo di p(4), incontrando l'espressione
0.7* p(3) + 0.28

Non sapendo quanto è p(3), tiene in memoria l'espressione e tenta il calcolo di p(3), incontrando l'espressione
0.7* p(2) + 0.28

Non sapendo quanto è p(2), tiene in memoria l'espressione e tenta il calcolo di p(2), incontrando l'espressione
0.7* p(1) + 0.28

Non sapendo quanto è p(1), tiene in memoria l'espressione e tenta il calcolo di p(1), incontrando l'espressione
0.7* p(0) + 0.28

Questa volta TI-InterActive! può iniziare a calcolare, perché p(0) è noto: nella definizione della successione è stato posto uguale a 0.5. Quindi TI-InterActive! può iniziare a svuotare progressivamente la memoria, calcolando prima p(1), poi da questo valore può calcolare p(2) che gli consente di calcolare p(3), che a sua volta consente di calcolare p(4) e, finalmente può dare l'atteso (parola particolarmente appropriata!) responso, ossia il valore di p(5).

È chiaro che questo tipo di calcolo occupa uno spazio eccessivo di memoria... pensa a quanta memoria viene occupata nel calcolo di p(20): dovrebbe anche esserti chiaro perché, oltre certi valori di *n,* TI-InterActive! non riesce a dare risposte o non riesce a darle in tempo ragionevole. Prova, per credere, a chiedere il calcolo prima di seq(p(n),n,1,15) poi di seq(p(n),n,1,20), poi di seq(p(n),n,1,25), poi di seq(p(n),n,1,30) e a calcolare ogni volta di quanto aumenta il tempo di risposta.

Un'altra possibilità di calcolo è quella che abbiamo usato con il foglio elettronico: si parte da p(0) e si calcolano successivamente, a partire da p(0) i valori della successione fino a quello desiderato. Per esempio, se chiediamo p(4), il foglio elettronico si calcola prima p(1), poi, a partire da p(1) calcola p(2), quindi p(3) e, infine, p(4). Il vantaggio è innegabile: lo spazio di memoria occupato è notevolmente inferiore. Certo che se chiediamo p(1000), il foglio elettronico, per quanto veloce, deve fare molte operazioni (deve calcolarsi i precedenti 999 valori prima di dare la risposta). Poiché i tempi di calcolo di un computer sono brevissimi, abbiamo l'impressione che le risorse adoperate per questo calcolo siano trascurabili. Anche TI-InterActive! ha un foglio elettronico che puoi utilizzare per calcoli di questo tipo. Puoi ache utilizzare due funzioni già predefinita in TI-InterActive!: la funzione ANS che consente di avere nella riga di comando dell'ambiente HOME l'ultimo OUTPUT della calcolatrice di

TI-InterActive! e la funzione ENTRY, che consente di immettere l'ultimo INPUT. Immettendo nell'ambiente HOME della calcolatrice di TI-InterActive! il valore iniziale 0,5 e poi scrivendo nella successiva riga ANS*0.7+0.28, viene calcolato il valore 0.5*0.7 + 0.28 , ossia la soimma tra 0,28 e il prodotto tra l'ultimo output fornito (0.5) e 0.7. Premendo successivamente il tasto ENTRY viene immesso ogni volta il comando ANS*0.7+0.28, dove, però, ANS viene continuamente aggiornato, essendo l'ultimo output della calcolatrice di TI-InterActive! In tal modo puoi generare iterativamente (come fa un foglio elettronico) i successivi valori della successione p(n) in ambiente HOME:

0.5

.5

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.63

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.721

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.7847

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.82929

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.860503

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.882352

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.897646

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.908353

$ans \cdot 0.7 + 0.28$

.915847

Questi metodi di calcolo sono sicuramente interessanti e forse consentono di dare bene l'idea di come evolve una successione. Sarebbe però bello avere una formula che consenta un calcolo immediato di un qualunque valore della successione.

La parte che ora seguirà, scritta in colore verde, è piuttosto impegnativa e non è obbligatorio leggerla e studiarla. Potrai riprenderla, eventualmente, nei prossimi anni di corso. Se, però, hai curiosità di capire come si possa, in questo caso, trovare una formula che consenta un calcolo immediato di un qualunque valore della successione senza conoscere il valore di quello che lo precede, prova a leggere il testo che segue

Per trovare una formula che consenta di calcolare immediatamente un qualunque valore della successione senza bisogno di conoscere il valore precedente, ma solo il posto che il termine occupa nella successione, iniziamo a osservare eventuali regolarità nella formazione dei termini della successione a partire dal valore p(0) che consideriamo noto (nel nostro caso vale 0.5).
p(n+1) = 0.7 * p(n)+0.28 p(0) = 0.5

In generale possiamo quindi scrivere

p(n+1) = m *p(n)+ q u1(0) = a

Come vedi esiste una relazione lineare tra il termine p(n+1) e il termine p(n) che lo precede nella successione.
Quello che ora vogliamo trovare è proprio il tipo di dipendenza di p(n) da n, a partire dall'osservazione della dipendenza di p(n+1) da p(n).

Iniziamo a osservare la formazione dei termini successivi per individuare eventuali regolarità:

$p(1) = m * a + q$
$p(2) = m * p(1) + q = m * (m * a + q) + q = m^2 * a + m* q + q$
$p(3) = m * p(2) + q = m * (m^2 * a + m* q + q) + q = m^3 * a + m^2 * q + m*q + q$
Prova a calcolare tu p(4)
Verifica poi che $p(5) = m^5 * a + m^4 * q + m^3 *q + m^2 * q + m* q + q$
In generale possiamo quindi scrivere che

$p(n) = m^n * a + q (m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} +.... + m + 1)$

Nel nostro caso, quindi,
$u1(n) = 0.5 * 0.7^n + 0.28 (0.7^{n-1} + 0.7^{n-2} + 0.7^{n-3} + ... + 0.7 + 1)$

Per completare il lavoro resta da calcolare la somma
$(m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + ... + m + 1)$
magari aiutandoci prima con la calcolatrice di TI-InterActive! e poi cercando di capire perché la calcolatrice dà quella risposta.

Per far effettuare il calcolo alla calcolatrice scegli, dall'ambiente HOME, i menu Math, poi Calculus e poi Sum. La funzione Sum, richiede, come argomenti, l'espressione che genera i termini della successione che si vogliono addizionare (in questo caso la funzione è m^i), la variabile (i), il primo termine (0) e l'ultimo termine (n–1).
Digitiamo quindi in ambiente HOME:
sum(m^i,i,0,n–1)
ottenendo, dopo aver battuto il tasto ENTER:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(m^i\right)$$

$$\frac{m^n}{m-1}-\frac{1}{m-1}$$

Che istruzione abbiamo dato alla calcolatrice? E' abbastanza semplice: quel simbolo che compare prima della parentesi tonda vuol dire "Esegui la somma"; dentro la parentesi tonda si specificano quali sono i termini di cui si deve fare la somma. Essi sono del tipo m^i, ossia le potenze di base m ed esponente i con i che prende successivamente, i valori 0, 1, 2, 3, ... fino all'esponente n-1.
In altri termini TI-InterActive! esegue la somma
$m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \dots + m + 1$
e ci dice che è uguale a m^n / (m– 1) – 1 / (m– 1) o, equivalentemente,
(m^n – 1) / (m– 1)

TI-InterActive! quindi consente di scrivere la formula che dà un prezzo direttamente in funzione del numero n dell'osservazione, senza bisogno di conoscere i prezzi precedenti:

p(n) = m^n * a + q (m^n – 1) / (m– 1)
Per esempio, per avere u1(1000) basta sostituire 1000 al posto di n e ottenere immediatamente:
u1(1000) = m^{1000} * a + q (m^1000 – 1) / (m– 1)
Facile e veloce, no? Tra l'altro, se m è maggiore di 0 e minore di 1, all'aumentare di n, la successione tende ad assumere il valore di equilibrio:

q / (1– m)

Sai spiegare perché?

Risposta

Nel caso in cui $m = 0.7$ e $q = 0.28$ abbiamo che i prezzi tendono a $0.28 / 0.3$ che vale approssimativamente 0.9333
E che cosa accade, invece se m è negativo o se m è maggiore di 1?

Risposta

Rimane ancora da capire come si possa calcolare
$m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots + m + 1$

Supponiamo che questa somma dia come risultato un numero, che chiamiamo x e che vogliamo trovare. Possiamo allora scrivere:
$m^{n-1} + m^{n-2} + m^{n-3} + \ldots + m + 1 = x$
Moltiplichiamo ora entrambi i membri dell'uguaglianza scritta sopra per m, ottenendo:
(*) $m^n + m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + m^2 + m = mx$
Attento; osserva la somma
$m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + m^2 + m$
Essa è proprio $x - 1$. Se hai seguito e capito quanto ora ti abbiamo suggerito di osservare, allora al posto della (*) possiamo scrivere

$m^n + x - 1 = mx$
da cui possiamo ricavare x (si tratta di un'equazione lineare nell'incognita x, ossia, si tratta di calcolare lo zero della funzione lineare $y = m^n + x - 1 - mx$)
Otteniamo
$mx - x = m^n - 1$
ossia
$x(m - 1) = m^n - 1$
e, quindi, $x = (m^n - 1) / (m - 1)$
Nota anche che ciò consente di dimostrare che m^n-1 si può scomporre nel prodotto
$(m- 1)(m^{(n- 1)} + m^{(n- 2)} + \ldots + m + 1)$

Prima di passare a svolgere le attività che ti proponiamo sui modelli lineari continui e discreti, ti suggeriamo di dare un'occhiata al sito

http://www.math.montana.edu/frankw/ccp/modeling/simple/contdisc/body.htm :

è ad esso che si è ispirata la trattazione dell'esempio ora proposto sui modelli dinamici discreti ... può essere un buon esercizio per fare un po' di pratica con la lingua inglese e, al tempo stesso, ripercorrere i passi fondamentali ed essenziali dell'esempio ora presentato.

Attività sui modelli lineari continui

Collegati al sito
Esempi di fenomeni che possono essere modellizzati con una funzione lineare

e naviga leggendo con attenzione i vari modelli economici, fisici e vari che vengono proposti.

Osservazioni sulla navigazione (che cosa ho capito e quali dubbi vorrei cercare di chiarire)

Dai modelli lineari continui a quelli discreti: attività 0

Svolgete in gruppo la seguente attività descritta nella scheda di lavoro alla quale potete accedere cliccando sulla parola calda scheda0._ Riportate le vostre risposte su questo foglio di lavoro

Le risposte del gruppo

Dai modelli lineari continui a quelli discreti: attività 1

La seguente attività è da svolgere prima individualmente, poi devi confrontare la tua risposta con quella data da almeno una tua compagna o un tuo compagno. Puoi accedere all'attività cliccando sulla parola calda scheda1 .

La mia risposta

La mia risposta dopo il confronto con una mia compagna o un mio compagno (motivare eventuali ripensamenti)

Dai modelli lineari continui a quelli discreti: attività 2

La seguente attività è da svolgere in gruppo. Collegatevi al sito degli NCTM cliccando sulla parola calda Studiare l'eliminazione di un farmaco dal corpo e seguite l'attività proposta, rispondendo alla varie domande che vengono poste.
Riportate le domande che trovate sul sito e le vostre relative risposte su questo foglio di lavoro

Le domande proposte

Le nostre risposte

I nostri dubbi

Questa attività è da svolgersi individualmente. Visita il sito Evoluzione delle trote in un allevamento_ e, anche con l'aiuto dell'insegnante, lavora secondo le indicazioni in esso fornite. Riporta le domande che trovi sul sito e le tue relative risposte su questo foglio di lavoro

Le domande proposte

Le mie risposte

I miei dubbi

Le attività di esplorazione, scoperta e costruzione di significato relative ai modelli lineari dovrebbero essere completate. Segue ora un'attività di sistemazione, formalizzazione e consolidamento delle conoscenze e tecniche apprese che, dopo aver seguito le due ore di lezione a esse dedicate, devi compiere per la maggior parte del tempo individualmente, consultandoti con tuoi compagni o tue compagne solo dopo aver riflettuto bene sui chiarimenti di cui pensi di aver bisogno. Lo stesso vale per le richieste di precisazione e spiegazione che vuoi porre all'insegnante: cerca di chiarire bene che cosa vuoi chiedere e perché lo vuoi. Naturalmente devi chiedere aiuto se qualche passo della sistemazione non ti fosse chiaro o se non riuscissi a svolgere qualche esercizio di consolidamento. Ti consigliamo di rispondere prima al test di autovalutazione per vedere se hai acquisito le conoscenze e le tecniche fondamentali, quelle necessarie per proseguire nelle lezioni. In seguito passerai alla sistemazione e agli esercizi di consolidamento. Ricorda inoltre che le schede e le attività che hai svolto sono sempre un punto di riferimento importante per il tuo studio, per l'attività di sistemazione, per quella di ripasso e consolidamento e anche per quella di recupero (nel caso tu sia piuttosto disorientata o disorientato, ti consigliamo di riprendere con attenzione tutte le attività già svolte)

Test autovalutazione

Riassumendo e sistematizzando

Esercizi di consolidamento

Esempi di verifiche